Een, twee, vier, ...

M. Kindt
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Dit artikel werd ingegeven door het artikel 'de zeef van Sierpinski' van Sieb Kemme in de vorige Nieuwe Wiskrant (nr. 1). Punten die beurtelings door drie vaste punten worden aangetrokken vormen een rij met drie verdichtingspunten. De constructie van die verdichtingspunten blijkt aanleiding te zijn tot een stukje zwaartepuntsmeetkunde.

Een tamelijk bekend, maar daarom niet minder aardig vraagstuk:

Neem P, Q, R respectievelijk op de zijden AB, BC, CA van driehoek ABC zodanig dat
$AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$.
Bewijs dat de lijnen AQ, BR en CP een driehoek insluiten, waarvan de oppervlakte één zevende deel van de oppervlakte van driehoek ABC is.

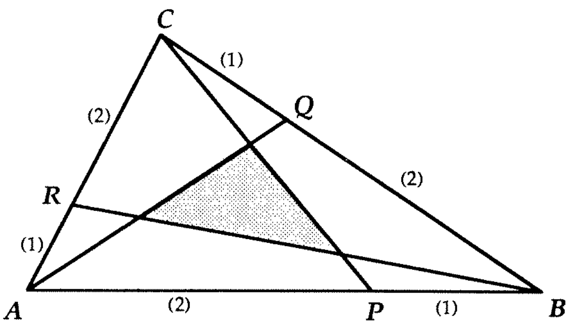

fig. 1

Als dit vraagstuk u onbekend is, leg dan de Wiskrant even terzijde en beproef uw krachten ...

Ik liep tegen dit probleem aan toen ik nog wat mijmerde na het lezen van Sieb Kemme's artikel 'de zeef van Sierpinski' in de vorige Nieuwe Wiskrant [1]. Het startpunt van dat artikel was een toevalsproces met driehoek *ABC* in de hoofdrol, waarbij steeds een hoekpunt door het lot moest worden aangewezen om adhesie uit te oefenen op een springend punt.
Omdat ik gewend ben bij meetkunde niets aan het toeval over te laten, probeerde ik me voor te stellen wat er zou gebeuren als die punten niet ad random, maar netjes beurtelings door *A, B, C, A, B, C, A, B, C*, enzovoort zouden worden aangetrokken.
Of, om het wat duidelijker te zeggen: uitgaande van een punt X_0 in het vlak van driehoek *ABC* wordt een rij punten $X_1, X_2, X_3, \ldots$ geconstrueerd door het voorschrift:

X_1 is het midden van X_0A,
X_2 is het midden van X_1B,
X_3 is het midden van X_2C,
X_4 is het midden van X_3A,
enzovoort.

Een oneindig cyclisch proces.
Uiteraard zal nu slechts een zeer klein deel van Sierpinski's mooie zeef worden bestreken. Samenklontering in één punt is natuurlijk uitgesloten; ook twee zwarte gaten zijn niet mogelijk, maar wat te denken van een triootje?

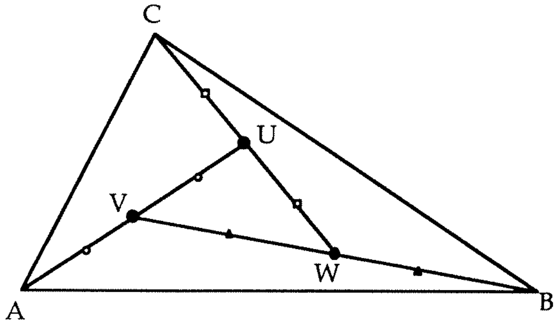

fig. 2

Als begonnen wordt met één van de punten *U, V, W* (zie figuur 2) ontstaat een periodieke rij:

$U \to V \to W \to U \to \ldots$

Het bestaan van de punten U, V, W bij een willekeurige driehoek ABC kan worden aangetoond met vectoralgebra.
Het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}U \\ W = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}V \\ U = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}W \end{cases}$$

heeft als oplossing:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{7}A + \frac{2}{7}B + \frac{4}{7}C \\ V = \frac{4}{7}A + \frac{1}{7}B + \frac{2}{7}C \\ W = \frac{2}{7}A + \frac{4}{7}B + \frac{1}{7}C \end{cases}$$

Er is klaarblijkelijk één invariant trio.
U, V, W zijn gewogen gemiddelden van A, B, C waarbij de gewichten zich verhouden als één, twee en vier.
Rekenen kan leuk zijn, maar meetkunde is nog leuker, dus wil ik die $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$ graag zichtbaar maken.

Geef driehoek ABC de oppervlakte 1.
Als X een punt is zo dat opp. $BCX = \alpha$, opp. $CAX = \beta$ en opp. $ABX = \gamma$, dan: $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$

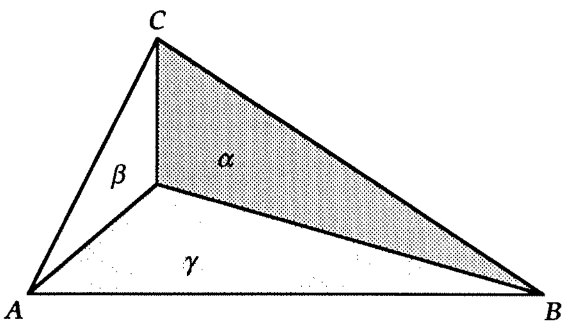

fig. 3

Omgekeerd stellen de gewichten in een gewogen gemiddelde van A, B, C de oppervlakten van driehoeken aan de overstaande zijden voor [2].
De coëfficiënten $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{7}$ kunnen met oppervlakten zichtbaar worden gemaakt, een kwestie van drie hulplijntjes.

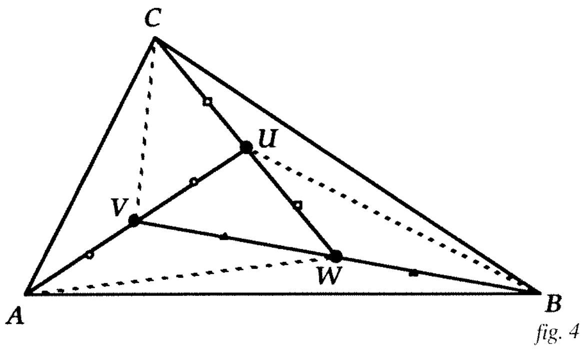

fig. 4

Het is niet moeilijk te bewijzen dat de zeven stukjes van de legpuzzel gelijk van oppervlakte zijn.
Dus geldt bijvoorbeeld: opp. $BCU = \frac{1}{7}$, opp. $CAU = \frac{2}{7}$ en opp. $ABU = \frac{4}{7}$. De constructie van driehoek UVW heeft alles te maken met het vraagstuk in de aanvang van dit artikel. Met nog wat oppervlakte-beschouwingen kan worden aangetoond dat AU, BV en CW de zijden BC, CA en AB snijden in stukken met verhouding 2 : 1.
Dit laatste kan ook worden gevonden door de gewichten 1, 2, 4 letterlijk op te vatten.

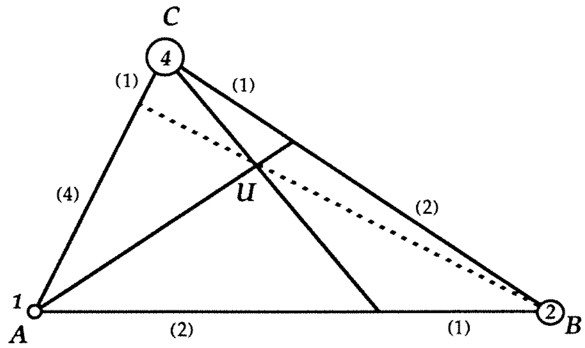

fig. 5

Het zwaartepunt van het systeem van de gewichten 1 in A, 2 in B en 4 in C kan immers worden geconstrueerd door twee lijnen naar de zwaartepunten van de koppels 1, 2 en 2, 4.
De gewichten 1, 2 en 4 kunnen op zes manieren over de drie hoekpunten worden verdeeld. Dat levert twee tripels van invariante punten op. Het ene tripel is U, V, W, het andere past bij een tegengestelde oriëntatie van de uitgangsdriehoek.

Het tripel U, V, W heeft zijn bestaan als invariant drietal inmiddels volledig waargemaakt. De zuigende kracht van het drietal moet nog worden aangetoond.
De barycentrische coördinaten ten opzichte van A, B, C zijn tot nu toe goed bevallen, dus daar ga ik mee verder.
Een willekeurig punt X_0 in het vlak stel ik voor door het drietal (α, β, γ) met $\alpha+\beta+\gamma = 1$. Als een of twee coördinaten negatief zijn, ligt het punt buiten de driehoek.
Het proces in het begin van dit artikel beschreven, wordt algebraïsch vertaald in:

$$(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$\downarrow$$
$$(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\beta, \tfrac{1}{2}\gamma)$$
$$\downarrow$$
$$(\tfrac{1}{4}\alpha + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\beta + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\gamma)$$
$$\downarrow$$
$$(\tfrac{1}{8}\alpha + \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{8}\beta + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\gamma + \tfrac{1}{2})$$

enzovoort.

De noemers met oplopende machten van 2 zorgen ervoor dat de invloed van de keuze van α, β, γ snel taant. In elk van deze coördinatendrietallen kan nu $2^{-n} \cdot (\alpha, \beta, \gamma)$ worden afgesplitst en als op den duur verwaarloosbaar, worden afgevoerd. Wat overblijft is een rij met drie verdichtingspunten.

Omdat machten van 2 hier zo nadrukkelijk aanwezig zijn is het aardig om die restanten uit te drukken in *binale breuken*.
Merk op: $\frac{1}{2} = 0.1$, $\frac{1}{4} = 0.01$, enzovoort.

De breuken $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ en $\frac{4}{7}$ zijn oneindig repeterende breuken met periode 3.
Er geldt:

$\frac{1}{7} = 0.001001001001\ldots$
$\frac{2}{7} = 0.010010010010\ldots$
$\frac{4}{7} = 0.100100100100\ldots$

Met de aloude somformule voor de oneindig voortlopende meetkundige reeks kan dit netjes worden aangetoond.
Nog even controleren: de som van de drie is $0.111111111111\ldots$, en dat is 1.

Door de transformatie 'met 0.1 vermenigvuldigen en 0.1 optellen bij de coördinaat die aan de beurt is' toe te passen op de restdrietallen, komt er:

$$(0.1, 0, 0)$$
$$(0.01, 01, 0)$$
$$(0.001, 0.01, 0.1)$$
$$(0.1001, 0.001, 0.01)$$
$$(0.01001, 0.1001, 0.001)$$
$$(0.001001, 0.01001, 0.1001)$$
enzovoort.

Met systematisch overslaan van twee stapjes wordt de convergentie naar, tientallig gezegd, $(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$, $(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7})$ en $(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7})$ snel zichtbaar.
Daarmee is aangetoond dat U, V en W inderdaad de drie zwarte gaten zijn.

Terzijde: bij de driehoek UVW hoort ook weer zo'n zwarte-gaten-driehoek, (afhankelijk van de oriëntatie), daarbij ook weer een, enzovoort. Dat zal uiteindelijk naar één punt convergeren. Omdat ABC en UVW hetzelfde zwaartepunt hebben, zal dit punt het limietpunt zijn.

De transformatie die een driehoek op één van zijn twee zwarte-gaten-driehoeken afbeeldt is te vangen in een matrix $\frac{1}{7}M$ met:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Voor de kenners van lineaire algebra: M heeft drie eigenwaarden, namelijk:

$$1, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

Bij de eigenwaarde 1 hoort de eigenvector $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, het zwaartepunt van de begindriehoek dus.

Ik wil nog even kijken naar periodieke puntenrijen met een andere periode dan drie. Voor de rij $ABABABAB\ldots$ zijn de zwarte gaten gauw gevonden. Merk op dat U en V corresponderen met $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$, binaal genoteerd: $0.010101\ldots$ en $0.101010\ldots$

Voor een rij met vier basispunten kan men zonder risico gokken op de vier gewogen gemiddelden met gewichten (alweer binaal):

$0.000100010001\ldots$
$0.001000100010\ldots$
$0.010001000100\ldots$
$0.100010001000\ldots$

Vier keer cyclisch gepermuteerd levert vier zwarte gaten op.

In de gewone breuknotatie vinden we de noemer 15 en de tellers 1, 2, 4 en 8. De gewichtenconstructie levert gemakkelijk de vier punten in een gegeven driehoek:

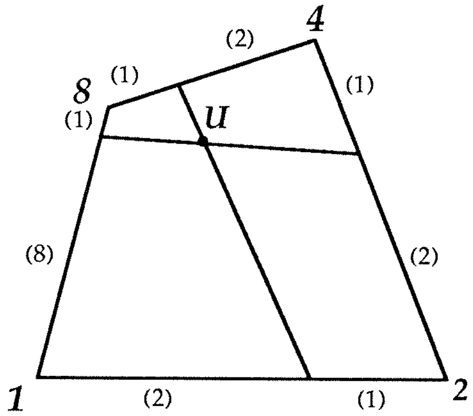

fig. 6a

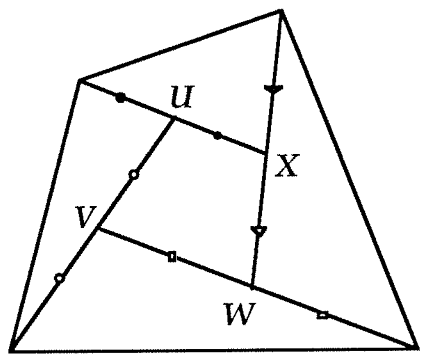

fig. 6b

Het oppervlakteverhaal dat bij de driehoek nog illustratief was, gaat niet meer op. De analogie moet nu één dimensie hoger worden gezocht. Het verdelen van een viervlak in 15 (=4+6+4+1) even grote viervlakjes is niet zo simpel, maar het gaat echt.

15 viervlakken:

1	*UVWX*
4	1 *UVW* 2 *VWX* 4 *WXU* 8 *XUV*
6	12 *VW* 24 *WX* 48 *XU* 81 *UV* 14 *WU* 28 *VX*
4	128 *V* 241 *W* 482 *X* 814 *U*

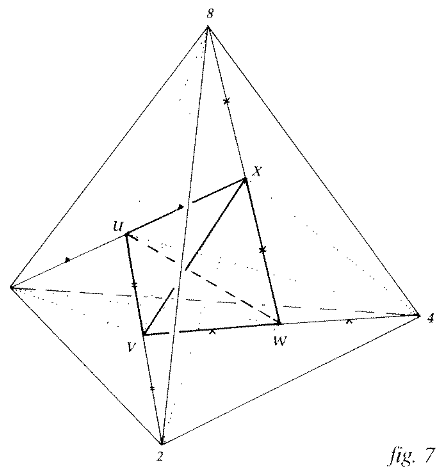

fig. 7

Het voorgaande laat zich generaliseren voor een puntenrij met periode n. De gewichten van de zwarte gaten zijn dan breuken met noemer $2^n - 1$ en tellers $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$
Bij $n = 5$ beland je desgewenst in de vierde dimensie. Het 'vijfhypervlak' heeft vijf hoekpunten, tien ribben, tien vlakken en vijf hypervlakken en kan in 31 vijfhypervlakjes met hetzelfde volume worden verdeeld.

Terug met de benen op de grond: de tweede dimensie. De n punten van de rij hoeven niet verschillend te zijn. Uitgaande van de drie punten A, B, C van het beginprobleem kunnen bijvoorbeeld bij de rij $ABCCBABCCBABCCB\ldots$ vijf zwarte gaten worden geconstrueerd. Alles bij elkaar vinden we zo een interessante deelverzameling van de zeef van Sierpinski, namelijk die van de punten met barycentrische coördinaten α, β, γ ten opzichte van A, B, C, waarbij α, β, γ uit *alle* breuken tussen 0 en 1 met noemers $3, 7, 31, 63, \ldots$ (kortom $2^n - 1$) worden geput.

Literatuur

[1] Kemme, S.: *De zeef van Sierpinski*, Nieuwe Wiskrant jrg 8, nr 1.

[2] Kindt, M.: *Gewichtige Meetkunde*, Wiskrantboek 13/24, blz 150.

VELON

Vereniging Lerarenopleiders Nederland

VELON-CONGRES 1989 'SCHOOLVAK-IN-ONTWIKKELING'

Onder deze titel organiseert de nieuwe vereniging VELON, Vereniging lerarenopleiding Nederland, (voorheen VULON) haar eerste congres op *donderdag 6 en vrijdag 7 april 1989* in het Novotel te Amsterdam.
Een goede gelegenheid voor onderwijswetenschappers, lerarenopleiders, bestuurders en docenten van basis- en voortgezet onderwijs om met collega's en andere belangstellenden van gedachten te wisselen over de laatste ontwikkelingen op onderwijsgebied.

In plenaire discussies, lezingen en verschillende presentaties en werkgroepen zal aandacht worden besteed aan de ingrijpende veranderingen die de vernieuwing in het basis- en voortgezet onderwijs teweeg zullen brengen en de consequenties daarvan voor de inhoud en vormgeving van schoolvakken, de opleiding van docenten, de nascholing en het (vak)didactisch onderzoek. Vooral de practische gevolgen van de ontwikkelingen zullen aan bod komen.

Het programma ziet er als volgt uit:

Donderdag 6 april
Thema: Basisvorming

Het congres start met een plenaire bijeenkomst over de ontwikkelingen binnen het basisonderwijs en de onderbouw van het voortgezet onderwijs de komende tien jaar. Onder leiding van Dhr. J. Ahlers (Hoofdredacteur School) discussiëren:
Dhr. W. Deetman* (Minister van Onderwijs) en
Dhr. H. Radstake (Hoofd afdeling voortgezet onderwijs van de Stichting Leerplanontwikkeling).

Mevr. M. v.d. Brink (Voorzitter van de Raad voor het Jeugdbeleid) zal in een gesproken column de voorgaande discussie kritisch beschouwen.
Aansluitend zullen de voorzitters van enkele eindtermen-commissies basisvorming verslag uitbrengen van de werkzaamheden van de commissies tot nu toe. Hierna zal het behandelde thema worden uitgewerkt in vakgerichte en onderwijskundige werkgroepen en een management werkgroep.

Vrijdag 7 april
Thema: Modulering van leerstof

Deze congresdag start met een plenaire bijeenkomst over de te verwachten ontwikkelingen met betrekking tot de modulering van leerstof, zoals die met name in het mbo en de bovenbouw havo/vwo vorm krijgt. Aan de discussie nemen deel:
Dhr. H. van Aalst (Voorzitter A.R.V.O.) en
Dhr. B. Cras (Hoofd volwassenen-educatie van de S.L.O.)

Vervolgens zal verslag worden gedaan van een aantal ervaringen die in modulerings-projecten met betrekking tot verschillende vakken en leergebieden zijn opgedaan. Hierna zal het behandelde thema worden uitgewerkt in vakgerichte en onderwijskundige werkgroepen en een management werkgroep.

* In afwijking van wat in de congresfolder staat vermeld heeft dhr. Deetman (i.p.v. Mevr. Ginjaar-Maas) zich bereid verklaard aan deze disucssie deel te nemen.

Plaats congres:	Novotel Amsterdam
Adres:	Europaboulevard 10 1083 AD Amsterdam
Informatie:	Secretariaat VELON-congrescommissie p/a Bureau Lerarenopleiding V.U. t.a.v. Drs. B.E.M. Elders-Blauwhoff de Boelelaan 1105 1081 HV Amsterdam tel. 020 - 548 4324