Het gebruik van materialen bij de behandeling van het oppervlaktebegrip

S.P. van 't Riet/A. van der Wal
Chr. Hogeschool Windesheim, Zwolle

Samenvatting

In een eerder artikel [1] hebben we laten zien hoe men langs de weg van de materiële handelingen het begrip 'omtrek van een cirkel' kan introduceren. Tevens gaven we een zestal aspecten aan van wiskundeleren op materieel niveau. Aan een van die aspecten, het leerpsychologische, willen we in dit artikel enige aandacht schenken. Daarbij stippen we slechts het leerpsychologische standpunt van Galperin en zijn medewerkers kort aan en zullen proberen er een praktische toepassing van te laten zien met betrekking tot de introductie van het oppervlaktebegrip.

Wat is oppervlakte? [2]

Het begrip 'oppervlakte' behoort samen met begrippen als 'lengte', 'inhoud', 'gewicht' en dergelijke tot de zogenaamde maatbegrippen [3], ook wel aangeduid met het woord 'metriek'. Samen met lengte en inhoud behoort oppervlakte tot de leerplannen van lbo, mavo, havo 2 en 3, vwo 2, 3 en 4 [4]. Lengte en oppervlakte hebben boven de andere maatbegrippen het voordeel dat zij in het algemeen direct zichtbaar zijn.

De wijze waarop het oppervlaktebegrip echter in vele schoolboeken wordt behandeld, getuigt weinig van een reële benadering van oppervlakte als maatbegrip. Vaak beperkt de behandeling zich tot 'mooie' figuren zoals rechthoeken, driehoeken en cirkels. Dat meten in feite het vergelijken van een grootheid met een eenheid is, wordt meestal niet expliciet behandeld. De gebruikte eenheid is in het algemeen de vierkante eenheid (meestal alleen de vierkante centimeter) en de bepaling van de oppervlakte is vaak alleen maar een kwestie van het aantal vierkantjes tellen dat een rechthoek opvult, waarbij dan bovendien een mooi rond telresultaat ontstaat. Vanuit de oppervlakte van de rechthoek en de bijbehorende formule worden dan vervolgens de oppervlakte van driehoeken en cirkels bepaald.

Op deze wijze wordt het hele maatbegrip, dat met name in de toegepaste wiskunde van zo grote betekenis is, tot een karikatuur. Maat en meten worden een kwestie van simpel tellen met een eenduidige uitkomst. Precisie en exactheid gaan het oppervlaktebegrip dat leerlingen opbouwen, overheersen. Het werken met oppervlakteformules versterkt dan bovendien de gedachte dat de oppervlakte altijd een nauwkeurig te berekenen getal is. De leerlingen krijgen op deze manier geen werkelijk inzicht in wat oppervlakte in feite is, laat staan dat zij iets leren over het maatbegrip in het algemeen. Zaken als schattingen, benaderingen, fouten, onder- en bovengrenzen van metingen, foutvoortplanting en dergelijke, allemaal zaken waar men in de werkelijkheid van alledag voortdurend mee te maken heeft, dat alles ontbreekt in vele wiskundeprogramma's. Hoe het maatbegrip zich historisch ontwikkelde uit het vergelijken van grootte, waarde en prijs, de idee van de replicatie van een eenheid en de problemen die daarbij kunnen ontstaan, het werken met onder- en bovengrenzen, de noodzaak het verschil tussen beide te verkleinen, de methoden die daartoe kunnen worden gebruikt, het verfijnen van verdelingen en het werken met eenheden van verschillende grootte..., daarvan krijgen leerlingen vaak geen flauwe notie. Onzes inziens is de belangrijkste reden waarom men in het huidige voortgezet wiskundeonderwijs het oppervlaktebegrip niet werkelijk als maatbegrip *kan* behandelen, gelegen in het feit dat dat wiskundeonderwijs in het algemeen zo a-materieel van karakter is [5].

In dit verband is het opmerkelijk dat juist in de leertheorie van Galperin het maatbegrip een zeer centrale plaats inneemt. De experimenten van Galperin en zijn medewerkers tonen aan dat men de ontwikkeling van het getalbegrip bij kinderen in de basisschoolleeftijd sterk kan beïnvloeden door bij het onderwijs gebruik te maken van het maatbegrip. Doorslaggevend hierbij is het gebruik van materiële voorwerpen en het verrichten van de juiste materiële handelingen op basis waarvan de nodige cognitieve operaties gevormd worden [6]. Galperins onderzoek beperkt zich voornamelijk tot het leren van elementaire begrippen bij jonge kinderen in het aanvangsonderwijs. Dat wil nog niet zeggen dat leren op materieel niveau ook niet in het voortgezet onderwijs van betekenis zou kunnen zijn, met name als het gaat om een moeilijker begrip als oppervlakte bijvoorbeeld, bij leerlingen in het ibo, lbo en mavo. Onderzoek zal in deze meer inzicht moeten verschaffen. Voor een uitgebreide bespreking van Galperins aanpak is het hier niet de plaats. De literatuur over de theorie van Galperin is tamelijk goed toegankelijk [7]. Overigens merken we op dat Galperins opvattingen zelfs binnen de Russische leerpsychologie niet onweersproken zijn gebleven. Het zou echter te ver voeren daarop in te gaan in het kader van dit artikel.

Een materiële introductie van het oppervlaktebegrip

De leergang die Galperin en Georgiëv ontwierpen om met behulp van het maatbegrip de ontwikkeling van het getalbegrip van kinderen op zes- tot zevenjarige leeftijd te bevorderen, kan gemakkelijk model staan voor een leergang ter introductie van het oppervlaktebegrip [8]. Over de plaats in het wiskundeonderwijs waar onderstaande leergang het beste zou kunnen worden opgenomen, willen en kunnen we geen definitieve uitspraken doen. Men zou kunnen denken aan het basisonderwijs, maar zeker kan ook aan de eerste leerjaren van het lbo en mavo, wellicht zelfs havo en vwo, worden gedacht. Docenten zullen zelf, met aan hun situatie aangepast lesmateriaal, kunnen uitzoeken of onderstaande leergang voldoet en op welk moment en voor welke leerlingen deze geschikt is. Men zou als volgt te werk kunnen gaan.

De leergang bestaat uit vijf delen.
Het *eerste deel* is een oriëntatie op het maatbegrip in het algemeen. Het begint ermee datgene wat de leerlingen al weten over maat en meten 'op te frissen'. Allerlei verschillende vormen van meten kunnen worden besproken en eventueel getoond met behulp van audio-visueel materiaal. Het wegen van goederen in winkels, het afpassen van stukken stof op de markt, het meten van de lichaamstemperatuur, het schatten van de prijzen van artikelen, het bepalen van een hoeveelheid meel met behulp van een lepel of een kopje, het maken van een hoogste en een laagste schatting, het verschil tussen meten en schatten, de kennis van allerlei eenheden en dergelijke zaken meer, kunnen de revue passeren. Aan het slot van deze oriëntatie wordt de aandacht gevestigd op het 'meten' van oppervlakte. Men zal er niet automatisch vanuit moeten gaan dat de leerlingen wel zullen snappen dat oppervlaktebepaling ook een vorm van meting is. Met name in het voortgezet onderwijs zullen vele leerlingen oppervlaktebepaling op grond van voorgaand onderwijs uitsluitend als een activiteit van berekening ervaren. Aan de overgang naar het verrichten van eigen oppervlaktemetingen zal dan ook veel aandacht moeten worden besteed.

In het *tweede deel* wordt een vast verband gelegd tussen de kwantitatieve beoordeling van oppervlakken en het afmeten met behulp van een maat. Onder een maat verstaan we in dit verband een vlak voorwerp van willekeurige vorm en grootte, dat gebruikt kan worden om andere oppervlakken geheel of gedeeltelijk te bedekken (zie noot 3, betekenis 1). Hierbij moet worden voorkomen dat de leerlingen dit begrip 'maat' gaan vereenzelvigen met één concreet voorwerp. De oppervlakte van allerlei vlakke voorwerpen en figuren wordt nu daadwerkelijk door de leerlingen gemeten met behulp van verschillende oppervlaktematen. Men kan allerlei vlakke voorwerpen met verschillende vormen nemen om er de oppervlakte van op te meten, zoals enveloppen, tafelbladen van schoolbanken, uitgevouwen krantepagina's, een bordgeodriehoek, ronde vloerkleden, de vloer van de gang, platgestreken T-shirts, of andere speciaal voor dit doel vervaardigde figuren van welk materiaal dan ook. Ook kan men de oppervlakte van de buitenkant van driedimensionale figuren, zoals bijvoorbeeld kasten en plantenbakken, laten meten.
Alle oppervlakten zullen met oppervlaktematen van verschillende vormen en grootten gemeten moeten worden. Te denken valt aan voorwerpen zoals schoolschriften, geodriehoeken, schoteltjes, lucifersdoosjes, L-vormige en zeshoekige voorwerpen. Ook samengestelde maten zoals twee geodriehoeken aan elkaar, drie aan elkaar geplakte luciferdoosjes of iets dergelijks, worden als maat gebruikt om te voorkomen dat de leerlingen het begrip 'maat' gaan beperken tot enkelvoudige voorwerpen.
Ook kan men de grotere voorwerpen die als maat dienen, laten opmeten met behulp van de kleinere maten, om te laten zien dat men de oppervlakte van de ene maat kan uitdrukken in die van de andere. In eerste instantie is het van belang te komen tot een globale bepaling van oppervlakten met behulp van maten. Precisie is in deze fase van ondergeschikt belang. De resultaten worden verzameld in een tweedimensionale tabel, waarbij elke oppervlakte wordt uitgedrukt in elke geschikte maateenheid (zie bijvoorbeeld tabel 1). Men kan hierbij werken met geschatte waarden of met onder- en bovengrenzen.

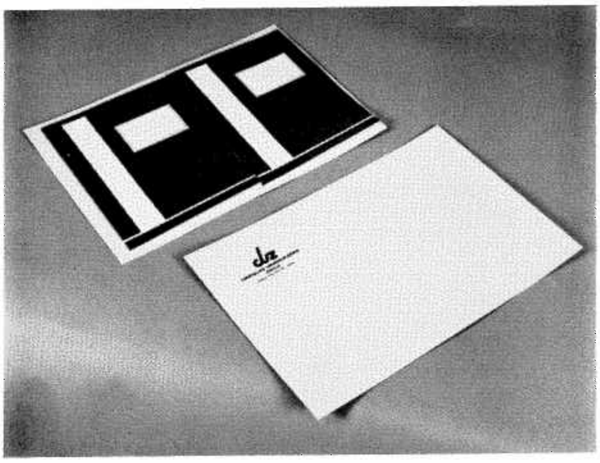

Foto 1: De oppervlakte van een enveloppe is iets groter dan die van twee schoolschriften.

Naar aanleiding van de tabel wordt nu een klassegesprek gevoerd over de ervaringen die de leerlingen hebben opgedaan bij het meten. De leraar dient er zorg voor te dragen dat allerlei aspecten aan de orde komen, zoals het benaderingskarakter van de metingen, de geschiktheid of ongeschiktheid van de voorwerpen om als maat te dienen, zowel qua vorm als qua

		Maten			
		Schoolschrift	Geodriehoek	Drie lucifersdoosjes	Enz.
Voorwerpen:	Enveloppe	±2	12	..	..
	Tafelblad	..	..	..	..
	Krantepagina	..	..	..	..
	Enz.	..	..	..	..

Tabel 1 De oppervlakte van verschillende voorwerpen uitgedrukt in die van verschillende oppervlaktematen.

grootte, de mogelijkheid de grootten van oppervlakken met elkaar te vergelijken op grond van de meetresultaten. Het is van belang de resultaten van dit klassegesprek weer te geven in goed geformuleerde samenvattingen, die later door de leerlingen gebruikt kunnen worden om zich de opgedane ervaringen snel weer te herinneren. Het klassegesprek zal er nu vervolgens op moeten uitlopen een selectie uit de maten te maken.

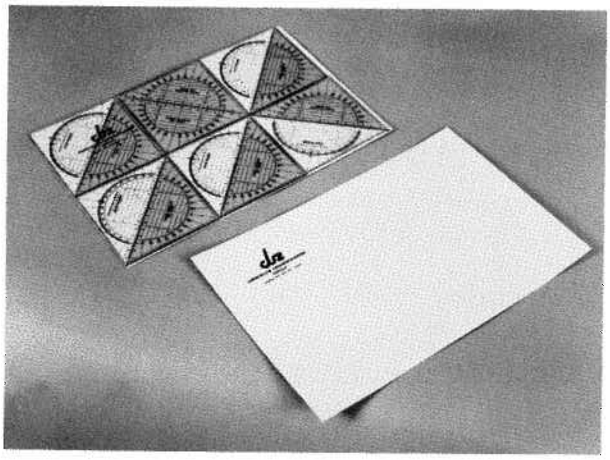

Foto 2: Dezelfde enveloppe maar nu bedekt met twaalf geodriehoeken.

Deze selectie moet een instrumentarium opleveren om het oppervlaktebegrip nader te onderzoeken. Men kan bijvoorbeeld besluiten met een drietal rechthoekige en/of vierkante voorwerpen van verschillende afmetingen verder te gaan, bijvoorbeeld een uitgevouwen krantepagina, een schoolschrift en een luciferdoosje.

In het *derde deel* wordt dan het begrip 'eenheid van oppervlakte' ingevoerd, als dìe oppervlakte die gelijk is aan dìe van de maat. Niet de maat is dus de eenheid, maar elk oppervlak dat precies door de maat bedekt wordt, heeft de oppervlakte van de eenheid. Belangrijk is het inzicht dat eenheid een relatief begrip is: elke eenheid is altijd een *maateenheid*, dat wil zeggen, is altijd verbonden met een of andere maat. Bij een grotere maat behoort een grotere eenheid. Is het begrip eenheid aldus geïntroduceerd, dan komt het er vervolgens op aan nauwkeurig met de verschillende eenheden te leren werken. Bij het bepalen van oppervlakten die niet gelijk zijn aan een geheel aantal malen de eenheid, moet nu allereerst weer worden teruggegrepen op de begrippen boven- en ondergrens. Na bepaling daarvan ontstaat de vraag naar grotere nauwkeurigheid. Men kan de leerlingen nu twee benaderingen laten uitvoeren: de maat wordt verdeeld in halven, kwarten, tienden, enzovoorts, om de nauwkeurigheid van de meting te vergroten, of er wordt overgeschakeld op een kleinere maat om het 'gat' tussen onder- en bovengrens te dichten. De oppervlakte van de vloer van het lokaal wordt bijvoorbeeld uitgedrukt in 246,56 eenheden krantepagina, of in 230 eenheden krantepagina plus 120 eenheden schoolschrift plus 144 eenheden lucifersdoosje. Van belang is dat de leerlingen de meethandelingen weer zelf verrichten en dat de leraar de werkwijze en het resultaat na afloop met ze bespreekt en helder samenvat.

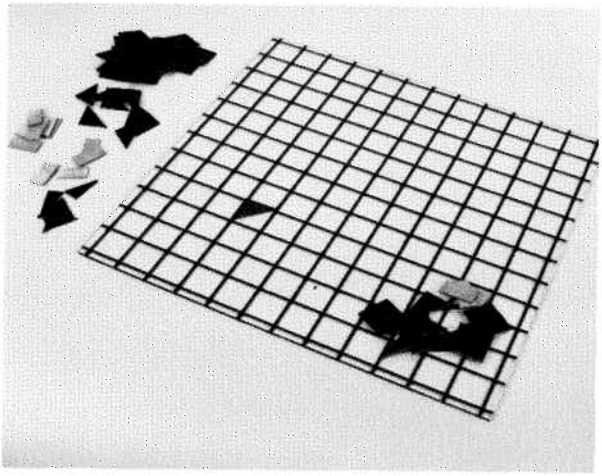

Foto 3: Het oppervlaktebord van plexiglas met bijbehorende fiches in verschillende kleuren.

Men zou in dit deel van de leergang ook gebruik kunnen maken van de volgende materialen. Op een bord van doorzichtig plexiglas is een rooster van vierkantjes aangebracht. Het bord is te beschrijven met behulp van viltstiften met afwasbare inkt. We zullen dit bord het 'oppervlaktebord' noemen. Daarbij zijn fiches aanwezig in de vorm van de roostervierkanten, rechthoeken en rechthoekige driehoeken, met afmetingen die bij het rooster aansluiten (zie foto 3). Bij elke vorm van de fiches hoort een aparte kleur. Men kan nu figuren op het oppervlaktebord laten tekenen, of uit karton geknipte figuren onder het oppervlaktebord leggen en daarvan de oppervlakte laten bepalen, waarbij men steeds een ander soort fiche als maat kan nemen. Men heeft dan het 'voordeel' ook te werken met niet-rechthoekige maten. Men kan de oppervlakte van figuren laten bepalen of schatten met behulp van één enkele maat, maar de oppervlakte van grillig gevormde figuren kan men ook met behulp van verschillende maten laten opmeten of schatten. Op het oppervlaktebord met toebehoren, kan men in het vervolg steeds teruggrijpen om er nieuwe onderwerpen mee te behandelen.

Het werken met verschillende eenheden doet nu verder de vraag rijzen naar de onderlinge relatie tussen die eenheden en de met hen verkregen meetresultaten. In het middelpunt van het *vierde deel* van onze leergang staat dan ook de abstracte functionele betrekking tussen een oppervlakte, de maat en het getal dat het meetresultaat vormt. Hier komen vragen aan de orde zoals: 'Hoe verandert het meetresultaat als de oppervlakte hetzelfde blijft, maar de maat groter wordt?' 'Hoe moet de maat veranderen als het meetresultaat hetzelfde blijft, maar de oppervlakte kleiner wordt?' De bij de maten behorende eenheden kunnen nu in elkaar worden uitgedrukt. Er wordt een omrekeningstabel opgesteld (zie bijvoorbeeld tabel 2), die langs verschillende wegen gecontroleerd kan worden. De relatie tussen het meetresultaat en de maateenheid en de betrekking van beide tot de te meten oppervlakte, kan in tal van oefeningen worden uitgewerkt.

	eenheden krante-pagina	eenheden school-schrift	eenheden lucifers-doosje
1 eenheid krantepagina =	1	7,6	180,4
1 eenheid schoolschrift =	..	1	23,7
1 eenheid lucifersdoosje =	..	..	1

Tabel 2 Omrekeningstabel van de oppervlakte-eenheden krantepagina en lucifersdoosje.

Ook hier kan het oppervlaktebord goede diensten bewijzen. Mits goed gekozen, zijn de oppervlakten van de verschillende als maten te gebruiken fiches, gemakkelijk in elkaar uit te drukken (bijvoorbeeld de oppervlakte van één groen vierkantje is gelijk aan de oppervlakte van twee rode driehoekjes, enzovoort.). Men kan de maateenheden zo kiezen dat de ene een veelvoud is van de andere, of dat zij zich tot elkaar verhouden als gebroken getallen. In dat laatste geval kan men dit materiaal ook gebruiken, om het rekenen met breuken te oefenen in de zinvolle context van het begrip oppervlakte.

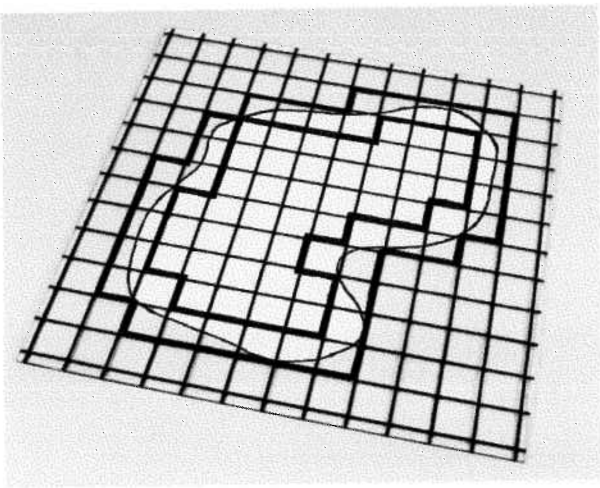

Foto 4: Willekeurig oppervlak onder een doorzichtig roosterbord van plexiglas. De curve van de onder- en bovengrens zijn met afwasbare viltstift aangebracht.

In het *vijfde deel* tenslotte kan de overgang gemaakt worden naar de gangbare oppervlakte-eenheden, zoals de vierkante centimeter, millimeter, decimeter en meter. De introductie daarvan kan gedaan worden aan de hand van reeds bestaande kennis over deze oppervlakte-eenheden. Men kan de hierboven gebruikte eenheden in de nieuwe uitdrukken en omgekeerd. Een zeer geschikt hulpmiddel in deze fase van onderwijs is weer het oppervlaktebord van doorschijnend plexiglas, mits de roostervierkantjes een geheel aantal centimeter lang en breed zijn. Dit bord kan over allerlei uit gekleurd papier uitgeknipte of uitgescheurde figuren heengelegd worden. Met viltstiften met afwasbare inkt kunnen nu onder- en bovengrens op het bord worden aangegeven (zie foto 4) en vervolgens door de leerling bepaald.

Nauwkeuriger schattingen kunnen op verschillende manieren worden verricht. In plaats van uitwasbare viltstift te gebruiken, kan men ook het oppervlaktebord voor een gewenst deel bedekken met fiches of voorwerpen, waarvan men de oppervlakte reeds heeft leren uitdrukken in vierkante centimeters (zie foto 5 en 6).

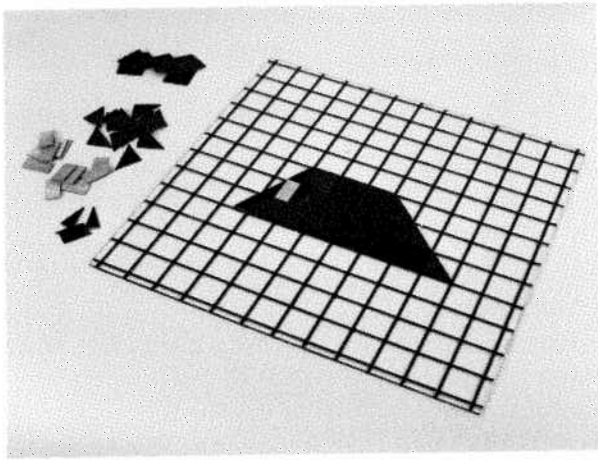

Foto 5: Trapezium en parallellogram bedekt met fiches waarvan de oppervlakte in vierkante centimeter bekend is.

Het verdient aanbeveling het gebruik van lineaire dimensies en oppervlakteformules voorlopig te vermijden, daar deze gepaard gaan met specifieke leerproblemen. Daaraan is de volgende paragraaf gewijd.

Tot zover de invoering van het oppervlaktebegrip als maatbegrip op een door Galperins theorie geïnspireerde wijze. Aansluitend willen we nog de volgende opmerkingen maken. Veel docenten zullen bij het lezen van het bovenstaande wellicht de neiging hebben te denken: 'O, dat kan ik mijn leerlingen net zo goed even vertellen, dan weten ze het ook.' Het is dan echter de vraag, *wat* zij weten. Kennis opgedaan door middel van materiële handelingen is van een geheel andere aard, dan kennis die verkregen wordt door middel van verbale mededelingen, of eventueel verbale interactie. Door de handelingen van het oppervlaktemeten te verrichten, stuiten de leerlingen zelf op de problemen van nauwkeurigheid, onder- en bovengrenzen, of schattingen in plaats van exacte metingen. Ook zijn zij actiever betrokken bij het vinden van oplossingen voor de problemen die zich voordoen. Daarbij zijn de materiële handelingen gemakkelijk herhaalbaar en kunnen de materialen, als zij goed gekozen zijn, denkfouten van de leerlingen corrigeren.

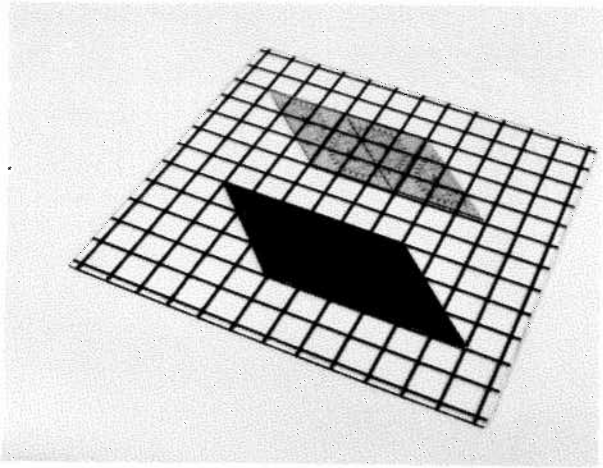

Foto 6:

Ook kunnen leerlingen gemakkelijker verbanden leggen met eerdere ervaringen en bestaande kennis, waardoor het kennisnetwerk dat de leerling opbouwt rijker, steviger en zinvoller wordt. Wellicht is dat er mede een oorzaak van dat kennis, die verworven is op basis van materiële handelingen, meestal beter beklijft en vaak meer transfer vertoont. Wil dit echter het geval zijn, dan zal het leerproces zich niet tot de materiële handelingen moeten beperken. Er zal aandacht aan besteed moeten worden, dat tijdens het leerproces ook het verbale en het concreet-mentale kennisniveau [9] worden ingeschakeld met betrekking tot de te leren begrippen en handelingen. De materiële handelingen zullen moeten worden omgezet in mentale handelingen. Dan pas ontstaat er een netwerk van kennis, op basis waarvan de leerling vooruitgang in zijn denken kan boeken. Dit kan bereikt worden door regelmatig met de leerlingen onder woorden te brengen wat zij doen en in de loop van het leerproces steeds meer vragen te stellen die op mentaal niveau zijn op te lossen, hetgeen echter nimmer ten koste mag gaan van de kwaliteit van het materiële handelen van de leerlingen. Een leerproces aldus opgezet, kan wellicht heel wat slecht begrepen en moeilijk onthouden boekenwiskunde voorkomen.

De overgang op oppervlakteberekening met behulp van lineaire dimensies

Oppervlakteformules voor vlakke figuren zoals de rechthoek en de driehoek, berusten op een functioneel verband tussen de oppervlakte van dergelijke figuren en hun lineaire dimensies. De formule voor de oppervlakte van een driehoek

$$O = \tfrac{1}{2}h \cdot b$$

is in feite een functie van twee variabelen. Voor leerlingen is de overgang van oppervlakte, ook als het als maatbegrip slechts rudimentair ontwikkeld is, naar het gebruik van lineaire dimensies ten einde de oppervlakte te berekenen, vaak een duistere zaak. De overgang van het bedekken van oppervlakken met maten naar het vermenigvuldigen van lineaire afmetingen, is een kritisch punt in het onderwijsleerproces [10]. 'Hoe kunnen lengten nu opeens een oppervlakte worden als je ze vermenigvuldigt?', vragen veel leerlingen zich af. Van groot belang is daarbij het begrip dat leerlingen hebben van de oppervlakteformule van de rechthoek: $O = h \cdot b$. De rechthoek wordt tenslotte meestal gebruikt om andere figuren naar te herleiden. Het aanleren van de eenvoudige formule is daarbij niet zo moeilijk, maar het ontwikkelen van een werkelijk begrip van de formule vereist de nodige materiële handelingen van leerlingen. Met name het inzicht dat de formule gebaseerd is op een vierkante oppervlaktemaat (alhoewel zij bij een rechthoekige onder bepaalde condities ook nog geldt), zal door de meeste leerlingen alleen verkregen kunnen worden in een materiële confrontatie met een oppervlaktemaat van een andere vorm. Ook de overgang van gehele naar gebroken lineaire afmetingen (om van irrationale maar te zwijgen), wordt bij de invoering van de formule $O = h \cdot b$ maar al te vaak verwaarloosd.

De overgang van oppervlaktemaat naar het gebruik van lineaire dimensies, kan naar onze mening alleen goed gemaakt worden als deze materieel wordt voorbereid en ondersteund. Men zou dit kunnen doen door weer gebruik te maken van het roosterbord van doorschijnend plexiglas met toebehoren, dat we in de vorige paragraaf bespraken. Men hoeft nu echter niet met vierkante centimeters te werken. Men zou bijvoorbeeld kunnen kiezen voor de volgende fiches:
- vierkante fiches ter grootte van een (willekeurige) eenheid (bijvoorbeeld 4 cm bij 4 cm);
- vierkante fiches ter grootte van een kwart van de eenheid;
- vierkante fiches ter grootte van een zestiende van de eenheid.

Op deze wijze is de uitvoering simpel te houden.

Men kan de leerlingen nu rechthoeken van allerlei afmetingen laten leggen, aanvankelijk alleen met zijden die een geheel aantal malen de bijbehorende lengte-eenheid lang zijn, later ook met zijden die dit een gebroken aantal malen zijn. Zij kunnen hun oppervlakteberekening controleren aan de hand van het aantal eenheden dat op het bord ligt. Een simpele vergelijking van lengte en breedte met oppervlakte zal al snel de formule kunnen opleveren, gesteld dat de leerlingen reeds vertrouwd zijn met variabelen. Speciale aandacht moet besteed worden aan het feit dat de oppervlakte-eenheid zich kwadratisch verhoudt tot de lengte-eenheid, of anders gezegd, dat de lengte van de zijde van de oppervlaktemaat de eenheid van de bijbehorende lengtemaat is. Ook zal men de procedure moeten herhalen met verschillende maateenheden, waardoor het inzicht kan ontstaan dat de formule niet afhankelijk is van de keuze van de eenheid.

Na de materiële onderbouwing van de formule $O = h \cdot b$ is het een goede zaak deze formule in allerlei verschillende opgaven terug te laten komen, opgaven die zowel praktisch als theoretisch kunnen zijn. Er zijn vele contexten te bedenken waarin de formule $O =$

h · b een rol kan spelen. Na afloop van het onderwijs zal de leerling inzicht moeten hebben in de materiële aspecten van de oppervlakteformule van de rechthoek. Dat inzicht zal onder andere de relatie tussen oppervlaktebepaling met behulp van een maat en oppervlakteberekening met behulp van lineaire dimensies moeten omvatten. De toetsing van het onderwijs zal gedeeltelijk op materieel niveau kunnen geschieden. De verworven kennis zal echter ook van:

- verbale (kunnen verwoorden);
- concreet-mentale (een concrete voorstelling in het hoofd hebben);
- concreet-symbolische (kunnen werken met getallen) en
- abstract-symbolische (de formule!)

aard moeten zijn [11] en als zodanig getoetst moeten worden. Functioneert de oppervlakteformule van de rechthoek, dan kan de overgang gemaakt worden naar de oppervlakteformules van andere figuren. Een bijkomend oordeel van het gebruik van het oppervlaktebord op bovenstaande wijze is, dat deze werkwijze uitstekend geschikt is om meer inzicht te krijgen in het vermenigvuldigen van gebroken getallen en het oefenen daarvan goed kan ondersteunen.

Besluit

In dit artikel hebben we een uiteenzetting gegeven over een stukje wiskunde-onderwijs, op basis van materiële handelingen. We hebben geprobeerd onze uiteenzetting zo praktisch mogelijk te maken. We realiseren ons echter dat er tussen bovenstaande ideeën en de uitvoering ervan in de klas nog een flinke weg zal moeten worden afgelegd. Die weg zullen leraren, die met deze ideeën en de getoonde materialen aan de slag willen, zelf moeten gaan. Al was het alleen maar omdat een oppervlaktebord zoals we dat lieten zien, voor zo ver we weten, nergens kant en klaar te krijgen is. Ook wij hebben het zelf moeten maken. Daarnaast zal de in 'Een materiële introductie van het oppervlaktebegrip' geschetste leergang vertaald moeten worden in lesmateriaal. Maar elke leraar zal dat beter kunnen dan wij, omdat hij zijn eigen situatie en zijn eigen leerlingen het beste kent.

We menen dat het goed is dit artikel te besluiten met een waarschuwing tegen een al te groot optimisme ten aanzien van materialengebruik. Het gebruik van materialen in het wiskunde-onderwijs wordt door ons bepaald niet gezien als een geneesmiddel tegen alle kwalen. Wel hebben we er bepaalde verwachtingen van, maar wat betreft het hoe-wel-en-hoe-niet, wanneer-wel-en-wanneer-niet, daarover kan alleen in alle voorlopigheid worden gesproken, al was het alleen maar omdat er tussen het leerpsychologisch onderzoek en het grootste deel van de huidige onderwijspraktijk een enorme kloof gaapt. Leerpsychologen zullen deze kloof niet voor ons kunnen overbruggen. Alleen als wiskundeleraren zelf de uitdaging van het gebruik van materialen in het onderwijs gaan oppakken, zal die kloof gedicht kunnen worden. Eerst dan zal blijken wat de leerpsychologische inzichten met betrekking tot materialengebruik, in de praktijk waard zijn. We beschouwen de inhoud van dit artikel daarom in de eerste plaats als een poging te stimuleren, meer dan als een uiteenzetting over hoe het nu precies zou moeten.

Noten

[1] Van 't Riet, Kroon en Van der Wal, 1987.

[2] Veel van de inhoud van deze paragraaf is ontleend aan: Dickson, Brown en Gibson, 1984, p. 79 e.v.

[3] We wijzen erop dat in dit artikel het woord 'maat' overeenkomstig het Nederlandse spraakgebruik in verschillende betekenissen wordt gebruikt. Afgezien van de sfeer van de muziek kunnen er tenminste vijf betekenissen worden onderscheiden.

- Maat als aanduiding voor voorwerpen waarmee gemeten wordt, dat wil zeggen voorwerpen die men gebruikt om grootheden zoals lengte en dergelijke te meten. Voorbeelden van dit soort maten zijn lengtemaat, maatstok, schuifmaat, maatbeker, maatglas. Deze betekenis komt men tegen in uitdrukkingen als 'de maat is vol'.
- In het verlengde daarvan wordt het woord 'maat' gebruikt als aanduiding voor met name ruimtelijke eenheden waarmee gemeten wordt, bijvoorbeeld in de uitdrukking 'maten en gewichten'.
- Maat komt ook voor als resultaat van een meting, het getal dat ontstaat uit de vergelijking van een grootheid met een eenheid. Men spreekt hier ook van 'afmeting'. Maat is dan niet een voorwerp of een eenheid, maar een meetresultaat. Op deze wijze wordt het woord ook overdrachtelijk gebruikt in uitdrukkingen als 'de maat van de schoen', 'de maat nemen', 'maat houden', 'maatkleding', 'op maat snijden'.
- Het woord 'maat' heeft in sommige gevallen ook de betekenis van een soort fysische grootheid, dat wil zeggen een door middel van meting kwantificeerbaar kenmerk en is dan vergelijkbaar met fysische grootheden als lengte, oppervlakte, gewicht. Dit is bijvoorbeeld het geval bij kleding en schoenen. Voor het meten van de grootheid 'hoedenmaat' bestaan zelfs maten in de eerste betekenis van het woord.
- Maat kan ook een verzamelnaam zijn voor alles wat met meten te maken heeft. In die zin komt het voor in de uitdrukking 'maattheorie'. Wellicht hebben we nog een aantal betekenissen over het hoofd gezien. Voorts merken we hier nog op dat, omdat het begrip 'eenheid' in de wiskunde vaak erg 'maatloos' wordt gehanteerd, we het in de psychologische literatuur ingeburgerde woord 'maateenheid' hier en daar gebruiken om duidelijk aan te geven dat een eenheid altijd verbonden is met een maat (in de eerste betekenis van het woord).

[4] Vademecum voor de wiskundeleraar, 1986, p. 7 e.v.

[5] Opgemerkt moet worden dat ook in het Wiskobas-programma uitgebreid aandacht besteed is aan het oppervlaktebegrip en hierbij belangrijke vernieuwingen zijn aangebracht (Wiskobas-bulletin 7, 1/2, 1977; 7, 5/6, 1978). In het daarbij ontwikkelde lesmateriaal speelt materialisering een belangrijke rol. Er bestaan tussen dat materiaal en de in de volgende paragraaf beschreven 'galperiniaanse' aanpak een aantal niet onbelangrijke verschillen. Het zou hier echter te ver voeren daarop uitgebreid in te gaan. Een artikel waarin beide methoden vergeleken worden, is in voorbereiding.

[6] Van Parreren en Carpay, 1972, p. 68 e.v.

[7] Bijvoorbeeld: Van Parreren en Carpay, 1972, p. 29-86.

[8] We gaan uit van de beschrijving die Van Parreren en Carpay, 1972, p. 72 e.v., ervan geven.

[9] Zie voor een uiteenzetting over de andere dan het materiële kennisniveau: Van 't Riet, 1983 en 1985.

[10] Dickson, Brown en Gibson, 1984, p. 86.

[11] Zie noot 9.

Literatuur

Dickson, L., M. Brown, O. Gibson: *Children learning mathematics, A teacher's guide to recent research*, Holt, Rinehart and Winston Ltd, Eastbourne, 1984.

Parreren, C.F. van, J.A.M. Carpay: *Sovjetpsychologen aan het woord*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.

Riet, S.P. van 't, J. Kroon, A. van der Wal: *Wiskunde op materiaal niveau. Een voorbeeld.* Euclides 62, 9, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1987, p. 257-268.

Riet, S.P. van 't, *Zes kennisnivo's in het wiskunde-onderwijs*, Euclides 58, 7, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1983, p. 241-247.

Riet, S.P. van 't, *Zes kennisnivo's. Een nadere uitwerking*, Euclides 60, 5, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1985, p. 181-188.

Vademecum voor de wiskundeleraar. Samengesteld door het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1986.