Hans Freudenthal; een interview

H.M.M. Jansen/S.L. Kemme

Op de eerste dag van de VALO-conferentie 'Wiskunde 12-16' werden de deelnemers in groepjes van drie à vier met een opdracht het bos ingestuurd.
Eén van die groepjes heeft zich in alle opzichten aan dit belangrijke onderdeel onttrokken. Dat groepje bestond uit de heren Freudenthal, Jansen en Kemme. Ze zijn niet het bos ingegaan en ze hebben zich niets van de opdracht aangetrokken. Maar ze zijn in een rustige ruimte gaan zitten alwaar Huub Jansen en Sieb Kemme Hans Freudenthal hebben ondervraagd over zijn ideeën over Wiskunde 12-16.

In hoeverre voelt u zich nog betrokken bij de ontwikkelingen van wiskunde 12-16?
Nog helemaal op het ogenblik. Zeker door de COW, maar ik heb er ook mijn eigen ideeën over.

Daar komen we misschien straks nog wel even over te praten, over die ideeën.

Wij hebben de indruk dat u twintig jaar geleden een soort gedrevenheid had in het wiskundeonderwijs die boven alle niveaus van onderwijs uitging. Dat strekte zich echt uit van kleuterschool tot universitair wiskundeonderwijs.
Ja, dat kan ik nu ook nog zeggen, maar een hele tijd heb ik me overwegend met het basisonderwijs beziggehouden. Zeker in de tijd van de Dr. W. Dreesschool in Arnhem waar we samen naar toe gingen, en in de tijd van de P.A. in Gorcum. Wat me niet zo bepaald interesseert is de bovenbouw van het voortgezet onderwijs, maar gezien de COW ben ik wel met de onderbouw bezig.

Dat brengt meteen een aardige vraag naar voren die voortkomt uit uw eigen uitspraak in het verleden: 'Ik ben niet de advocaat van de duivel, maar ik ben de duivel zelf'.
Ha, ha!

Maar de achtergrond van die uitspraak was, dat u als het ware een opmerking maakte – niet zo letterlijk bedoeld, maar we willen er toch wel even op doorgaan – dat in het jaar 2000, en toen was 2000 veel verder weg als nu, het zo wel eens zou kunnen en moeten zijn dat het wiskundeonderwijs helemaal verdwenen zou kunnen zijn. Nou zitten we een stuk dichter bij het jaar 2000; hoe denkt u daar nu over?
Ja, kijk eens, wiskundeonderwijs terwille van de wiskunde moet verder opschuiven, naar de bovenbouw of liefst naar het hoger onderwijs. Ik prefereer geïntegreerde wiskunde. Ik heb net voor de Nieuwe Wiskrant een stuk geschreven, 'Sinusfuncties' (dat in een van de volgende nummers geplaatst zal worden, red.), in de context geplaatst van de natuurkunde. Daar moet je veel eerder mee komen, vóór de kwadratische, misschien zelfs voor de lineaire functies. Ze zijn veel hechter aan de werkelijkheid gerelateerd. Een 75-jarige alfa, die haar schoolwiskunde nog kende, vroeg me eens: 'Waar is de sinus nou eigenlijk goed voor?' Haast was ik erin getrapt en had een geodetisch verhaal gehouden. Toen merkte ik in de kamer de piano en het radiotoestel op. Het werd een verhaal over sinusfuncties, meetkundig voortgebracht, over trillende snaren en ethergolven, en het heeft haar geboeid. Kijk eens naar de geschiedenis van de wiskunde om wiskunde in een grotere samenhang te plaatsen!

Maar dan komt toch het probleem een beetje boven tafel, wat ook hier speelt in deze groep mensen en wat ook vorig jaar op bepaalde momenten nadrukkelijk naar voren is gekomen, dat is: het formaliseren van de wiskunde voor deze groep leerlingen, waar moet je beginnen, hoever moet je komen?
Formaliseren is een heel betrekkelijk iets. Er zijn zoveel niveaus. Er zijn mensen die heel handig met formules kunnen goochelen zonder er iets bij te denken. Dat ligt mij persoonlijk niet. Neem wiskundigen als Cauchy! Dat doe ik niet na. In Wiskivon was er altijd sprake van 'de bocht nemen'. Een typische term voor een verkeerde benadering. Geen bocht nemen, maar recht door zee! Of: opklimmend! Er zijn niveaus.
De wiskunde begint eigenlijk heel formeel. Een kind dat de getallenrij opzegt '*een*entwintig, *twee*entwintig, *drie*entwintig, ...', gaat puur formeel te werk. Pas later worden er inhouden aan gehecht. Typisch voor het rekenen! In de meetkunde is het juist andersom: formaliseren ver achteraf. Je hebt elementen van formaliseren die iedereen beheerst, want iedereen kan tellen. Er zijn niveaus van formaliseren waar je iedereen naar toe kunt laten klimmen. Neem eens negatieve getallen! Als je het met vectoren en lineaire grafieken doet, komen ze vanzelf. Ik heb het zelf geprobeerd, met een meisje. Of neem eens machten! Je legt uit wat a^3 is, a^4, a^5. En dan vraag je 'wat is $a^3 \cdot a^2$?' Eerst is het $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Na een aantal keren heeft ze de exponentenregel door zonder dat je haar iets hebt hoeven uit te leggen.

Je kunt het probleem ook vanuit een andere invalshoek bekijken. Nederland levert behoorlijk goede uitvoerende musici op. Daar zijn we tamelijk knap in. We zijn in een aantal dingen meer knap. Dat komt omdat er ergens in het muziekonderwijs, op nationaal niveau, de mogelijkheden bestaan om de toppers eruit te halen.
Ja.

Een soortgelijke redenering kun je voor het wiskundeonderwijs ophangen. Je kunt zeggen: 'Ja, we willen de toppers eruit halen, niet alleen de toppers, we willen de lagen eruit halen van mensen die technisch zijn. Want een land heeft technici nodig, heeft ingenieurs nodig, heeft rekenaars nodig'. Dat kun je alleen maar aan de weet komen door ze vroegtijdig ook met formules te confronteren. Laat je die formules weg, loop je dan niet het risico dat op nationaal niveau het wiskundeonderwijs gigantisch onderuit gaat?
Neen, dat geloof ik niet. Ik geloof er niets van. Dat probleem van die hoogbegaafden interesseert me hoegenaamd niet, want die vinden hun weg in elk geval. Die toppers – ik zeg niet dat je die net zo moet behandelen als de anderen – komen vanzelf naar voren. Ik heb in een klas gezeten waarvan niemand wiskunde is gaan studeren. Een deed economie – de enige die iets aan zijn schoolwiskunde gehad zou kunnen hebben. We waren op onze school zowat de enige klas waarvan een groot aantal – ik denk, haast allen – zijn gaan studeren. In die tijd was het heel ongebruikelijk dat je na het eindexamen nog verder ging studeren.
Ik heb mijn eigen peil, zij hebben het hunne bereikt. Ik vind dat met geweld naar hoogbegaafden speuren onjuist. Ik weet niet of ik er een was, maar in elk geval ben ik blij dat me dat niet is overkomen.

Het voorbeeld is misschien misleidend. Je hebt hoogbegaafden, maar daaronder zit een laag middelbegaafden, die wel een hele belangrijke rol vervullen binnen de samenleving. Kijk de ingenieurs die in bedrijven werken, maar die toch op één of andere manier heel handig ook formeel kunnen werken en moeten kunnen werken.
Ja, ik vind dat je die op een bepaald ogenblik uit moet laten lopen. Maar je moet ze niet meteen de formele kant opduwen. Dan krijg je mensen die er geen kijk op hebben waar de wiskunde voor deugt. Ze moeten een stuk mee met de anderen op weg gaan. De meeste van mijn medestudenten op de universiteit hadden er geen notie van waar de wiskunde goed voor was. Ikzelf trouwens ook niet. Ik heb heel gemakkelijk al die algoritmen geleerd. Ik kende met 12-13 jaar differentiaal- en integraalrekening, dat wil zeggen de algoritmen. Wat er het nut van was, wist ik nauwelijks.

Wat heb je aan formeel rekenen als je er niets mee kunt doen? Die 75-jarige waar ik het over had, die trouwens soms zelfs privélessen wiskunde gaf, vroeg me omtrent het algoritme van de ggd. Ze kende het op haar duimpje, maar wilde weten waarom het werkte. En meer van die dingen! Dat zijn mensen die met gemak een algoritmische bekwaamheid verwerven maar geen idee hebben van de achtergronden. Ze kunnen het precies nadoen, maar waarvoor? Ze doen wat ze hebben geleerd.

Maar nu komen we bij uw China-reis terecht. In het Chinese onderwijs geldt: leer kinderen wiskunde, formaliseren, rekenregels gebruiken, toepassen, het euclides algoritme hanteren. Het inzicht van hoe dat werkt, dat doen we later.
Ja, dat is een oude regel: eerst leren dan begrijpen. Bij een aantal kinderen functioneert dat heel goed, maar dat is juist het misleidende, want bij de meesten functioneert het niet. Een grote meerderheid kan alleen leren door te begrijpen. Een kleindochter van me zat in de onderbouw te modderen met de stijging van lineaire grafieken. Eén voorbeeld. Nog een voorbeeld. Neen, ik laat ze er tien tekenen. En dan vragen: wat valt je op? En voor het eerst komt ze erachter hoe dat zit met de stijging en die m, de richtingscoëfficiënt. Dat was ongeveer het enige wat ze van de wiskunde echt heeft begrepen, van dat soort wiskunde dat ze haar hebben aangeboden. Het is niet veel, en ze heeft er ook niet veel aan, want ze heeft geen wiskunde in het pakket. Eerst leren dan begrijpen. Mijn oudste zoon kreeg geschiedenis op de lagere school: vandaag de jaartallen leren en morgen vertelt de meester wat erbij hoort.

Een mooi voorbeeld.
Hij heeft zijn geschiedenis geleerd. Maar er zijn er die er niet veel aan hebben, aan die methode. Toch kunnen ze best algoritmen leren begrijpen als ze er naar toe mogen groeien. Een algoritme is iets verschrikkelijk abstracts, onwezenlijks. Haakje open, haakje dicht! Maar het meisje van daarstraks heeft het in perfectie geleerd. Ze is er naar toe gegroeid en heeft het begrepen. Ik heb het gedurig gecontroleerd. Je vraagt telkens terug om te zien of ze het nog begrijpen. Kijk eens, mij interesseert vooral deze groep leerlingen. De anderen vinden hun weg wel.

Nou is het misschien toch nog de vraag als je het leren van algoritmen (het rekenen is daar een voorbeeld van) op een inzichtelijke geleidelijke progressief schematiserende manier aanleert – in hoeverre je daarmee niet een onevenredige hoeveelheid onderwijstijd in beslag neemt.
Dat weet ik niet. In het onderzoek van Rengerink zie je ze in een derde van die tijd resultaten bereiken, vergelijkbaar met die bij de traditionele methoden. Ze komen niet allemaal aan het standaard-algoritme van de staartdeling toe, ze blijven ergens steken. Maar dat hindert niet, want als het echt menens is doe je het met een computertje. Ik heb algoritmen geleerd en later pas goed begrepen – een soort bekwaamheid als van een computer. Maar ware het niet ook voor mezelf beter geweest als ik het toen al had begrepen? Van heel wat dingen leer je veel te laat dat je ze ook kunt begrijpen. Ineens zeg je: nu begrijp ik het.

Er zijn heel veel dingen waarvan je dat niet ontdekt.
Ja natuurlijk.

Die volstrekt verdwenen zijn.
Ja natuurlijk. In de wiskunde, als je je met wiskunde bezig houdt, ontdek je dat wel. Maar een niet-wiskundige ... Laten we het volgende nemen: Je had vroeger die boekhouders die perfect moesten kunnen rekenen. Dat was vóór de rekenmachines. Menselijke automaten die het perfect deden. Die had je nodig in de maatschappij. Hebben die mensen begrepen wat ze aan het doen waren? Sommigen misschien wel, maar

dan werden ze meer dan alleen boekhouder. Maar het waren er zeker niet velen. Ze waren gewoon geprogrammeerd. Ze konden maar doen. Als er een fout binnenslipt, moet je even uitkijken; als er ergens onzin uitkomt, blijkt of je het begrepen hebt.

In aansluiting daarop. Heb je iets begrepen? Dat is een vraag die je op duizend en één manieren kunt interpreteren. Als een boekhouder een dubbele telling maakt, dan weet hij: 'o.k., er is iets mis' en als hij teruglezend ziet: 'daar heb ik me verschreven', dan is dat ook een vorm van begrijpen.

Dat is ook een vorm van begrijpen. Als het alleen maar om het cijferen gaat is het onverschillig of je de methode begrijpt of niet. Je mag best kunnen zeggen: ik heb het vroeger niet begrepen, maar nu begrijp ik het. Mij gaat het om die kinderen bij wie het in eerste instantie op het begrijpen aankomt. Neem decimale breuken. Vermenigvuldigen – hoe was het ook weer met de komma? Bij het optellen komma's onder elkaar – dat onthoud je. Bij het vermenigvuldigen is het anders. Hoe? Het is een criterium van het begrepen hebben dat je het kunt beredeneren. Voor gewone breuken geldt dit nog meer. Daarom willen ze die graag afschaffen.

Zijn er ook niet dingen in het leven, met name de wiskunde, die je eerst gedaan moet hebben, om achteraf te kunnen begrijpen wàt je gedaan hebt? Autorijden moet je eerst gedaan hebben.

Dat geef ik direct toe, maar de leerlingen die het zó kunnen leren zijn een minderheid.

Om te kunnen begrijpen dat, als je twee getallen met twee cijfers achter de komma vermenigvuldigt dat het dan vier cijfers achter de komma worden, moet je dat eerst een aantal keren gedaan hebben. En zeggen: 'Verrek, het zijn er vier' en dan pas vragen: 'Waarom zijn het er vier?'

Ja, dit is op zichzelf juist. Wie erover nadenkt zal wel, als hij enigszins handig is, tot die conclusie komen. De kwestie is of je het de gemiddelde leerling op die manier kunt leren. Er zijn zoveel regels. Kijk eens naar de breuken! Bij het vermenigvuldigen teller maal teller, noemer maal noemer; bij het optellen heel anders. Onthou dat allemaal! Er zijn er die dat kunnen en er zijn er die het niet kunnen, die de breuken niets zeggen. Die interesseren me. Ik probeer het voor allen bereikbare peil zo hoog mogelijk op te voeren.

Wat zou je vanuit dát perspectief leerlingen van 12-16 moeten aanreiken? Want je krijgt de indruk, als het gaat om inzichtelijk te begrijpen, dat dan de leerstof er niet meer toe doet. Alles is mogelijk. Heeft u ook bepaalde opvattingen over welke leerstof dan toch aan de orde zou moeten komen?

Welke leerstof – dat is moeilijk te zeggen. Het komt minder op de leerstof aan dan op het onderling verband tussen wat je leert. Dus niet maar losse brokken. Dat was bijvoorbeeld ook mijn kritiek op SLO-produkten. Een groot aantal grafieken over hetzelfde onderwerp zonder dat dit feit de leerlingen duidelijk werd, zonder integrerend moment. Om zo te zeggen lineair gestroomlijnd – zelfs geen lineaire ongelijkheden. In de lessen die ik dat meisje gaf, speelden ze een grote rol. $2x + 3 \leq 7$ heeft echt body. Voor formaliseren is een zekere rijkdom vereist – niet alleen gelijkheden maar ook ongelijkheden. Merkwaardig dit ontbreken in een land als Nederland, het enige dat zo'n schooltraditie in ongelijkheden heeft. Waarom moet dat verdwijnen?

Kunt u zich een wiskundeonderwijs voorstellen, 12-16, waarin verbanden, grafieken zouden ontbreken?

Neen, natuurlijk niet. Die horen erin.

Zijn er nog meer van die grote gebieden?

Negatieve getallen bijvoorbeeld, waar een koudwatervrees voor bestaat. Wat ik dienomtrent in de 'Fenomenologie' voorstel gaat in laatste instantie op Van Hiele terug. Maar het is blijkbaar als te exotisch over het hoofd gezien. Twee recensenten hebben me zelfs vriendelijk berispt omdat ik geen negatieve getallen zou hebben behandeld. Ze staan daar in verband met vectoren en lineaire grafieken. Ik heb die methode met succes beproefd met het meisje waar vroeger sprake van was.

Maar bij het uitdiepen van het getalbegrip kom je bij negatieve getallen terecht, noem dat een leerstofgebied.

Dan is het leerstof met een puur formeel karakter: behoud van algebraïsche wetmatigheden. Met vectoren is het meetkunde. Ook met grafieken. Neem bijvoorbeeld die van $y = 7 - x$, een lijnstuk, dat je naar beide kanten wilt verlengen. Dat gaat gewoon vanzelf. Ik heb er niets voor hoeven uit te leggen.

Een ander leerstofgebied: kansrekening?

Kansrekening is een probleem waar ik nog lang niet uit ben. Kansrekening functioneert het slechtste in het programma. Van begin af aan was ik er sceptisch over. Aan de vraagstukken zie je de verlegenheid om er iets bij te bedenken. We hebben nog geen methode om kinderen kansrekening te leren – zelfs op hoger niveau.

Zit hem dat in de moeilijkheidsgraad van dat gebied?

Je kunt dit begrip alleen met echte problemen toetsen. Die kunstmatige problemen zeggen niets over het functioneren in de echte praktijk. Als je ziet hoe kansrekening wordt toegepast – vooral in de statistiek en door psychologen en onderwijskundigen – schud je je hoofd. Ze hebben het in de methodologiecolleges tegen wil en dank moeten leren. Een heel typisch voorbeeld voor kansrekening. Vraag naar de kans dat iemand op 1 januari is geboren vergeleken met die dat twee mensen op dezelfde dag jarig zijn! Je herkent er mensen die iets van kansrekening hebben begrepen aan dat ze er niet over hoeven na te denken. Toen de kansrekening aan de beurt moest komen ben ik met de Didactische Fenomenologie gestopt.

Een fundamenteel probleem bij kansrekening is dat je het gevoel hebt, dat je bij elk probleem opnieuw moet beginnen. Dat is ook juist de rijkdom van het gebied.

Natuurlijk is dat de rijkdom. Maar het probleem is dat de leerlingen al te zeer aan formeel denken zijn gewend en dit – averechts – te pas brengen. Kansrekening is moeilijk. Neem het volgende probleem: Laat het bij een mondeling examen gebruikelijk zijn dat op een vraag alleen ja of neen hoeft te worden geantwoord. Bij een fout antwoord wordt de vraag herhaald zodat de kandidaat nu het goede antwoord kan geven. Voor de rest gist hij maar. Hoe groot is zijn gemiddel-

de score? Ik heb het – lang geleden, maar ik was al een gesettled wiskundige – verkeerd beantwoord. Zo iets gebeurt telkens weer. De vermaarde statisticus R.A. Fisher heeft Mendel van knoeierij beschuldigd omdat zijn verhaal over die steekproef erwten uiterst onwaarschijnlijk zou zijn. Het is telkens weer nagepraat. Toen heeft Van der Waerden die waarschijnlijk eens uitgerekend: 97,5%. Dat is heel typisch. Met al je routine sta je voor een nieuwe situatie. Je moet elk probleem opnieuw bezien. Echte problemen zijn geen routinezaak.
Je kunt die dingen niet, zoals veel andere, schematisch behandelen.

Dat is toch geen reden om het te laten liggen, juist een reden om het op te pakken.
Inderdaad. Maar dan is het de vraag hoe het aan te pakken, en mijn antwoord is: ik weet het niet. Ik moet ook zeggen dat ik het nog nooit met iemand heb geprobeerd – gebrekkige ervaring.

Een ander onderwerp is de meetkunde. In de eindtermen basisonderwijs is meetkunde nog een nieuw, open, ongewis gebied.
Ik heb er al in de COW kritiek op uitgeoefend. Er zit geen lijn in. Alle rare botjes bij elkaar. Verschrikkelijk aardig, maar als je het allemaal uit zou willen voeren, ben je er alle wiskunde-tijd aan kwijt. Er zit geen lijn en geen verband in met de rest van de wiskunde die je moet leren. Bijzonder aardig maar te veel spielerei.

Maar is er dan een lijn in aan te brengen? Bestaat er een 'meetkundelijn'?
Zo'n lijn bestaat maar is wat moeilijk te schetsen. Bijvoorbeeld wat vectormeetkunde. Vectoren optellen, mooie figuren met vectoren laten tekenen, enzovoort. Dan is er meteen een verband, ook met de bijbehorende algebra. De andere dingen zijn ook heel mooi om er soms tussen in te passen, maar dan niet zo uitputtend als ze daar voorstellen.

Wat denkt u van de lijn analytische meetkunde? Ook een oude lijn die wat verloren gegaan is.
Kijk eens, wat noemde je vroeger analytische meetkunde? Het was betrekkelijk weinig meetkunde. Eigenlijk aanleiding voor wat algebra en dan op niet zo'n triviale manier. Snijpunten van krommen bepalen, met parameters enzovoort. Neen, daar denk ik nauwelijks aan. Ik vraag me zelfs af: wat moeten al die ellipsen en hyperbolen? Zeker niets voor de onderbouw.

Het aantrekkelijke van analytische meetkunde is de dynamica die erin zit. Je laat een punt op een parabool wandelen en tegelijkertijd gaan allerlei dingen mee wandelen. Het sprak altijd bijzonder aan.
Zo iets zou ik meteen in het verband met de analyse willen plaatsen. Tenminste als je het analyse wilt noemen. Laten we gerust van differentiaalrekening spreken! Want naar zo iets moet het tenslotte toe.

Meetkundige wereldoriëntatie, meetkundige oriëntatie in de ruimte?
Ja natuurlijk. Als je het niet overdrijft, vind ik het mooi. Je moet wel weten dat twee rechten elkaar snijden, maar ook dat ze langs elkaar kunnen lopen: kruisende rechten. Zo zijn er heel wat eenvoudige dingen. Als je er maar niet te ver mee gaat. Het pakket 'Verpakkingen' bevat veel aardigs. Liever verdiepen dan een overvloed zonder samenhang.

Een ander punt heeft u destijds, met name voor WISKOBAS (basisonderwijs) en ook later met de middenschool, altijd gepropageerd: het werken in heterogene groepen. Handhaaft u dat?
Kijk, ik heb er geen actieve ervaring mee. Ik heb het gepropageerd omdat het voor mij een belofte inhield. Er zijn nog te weinig ervaringen om het te rechtvaardigen. Wat ik van kleine groepen heb gezien – bijvoorbeeld bij Nanda Querelle – was soms heel verhelderend. Vrij positief – maar waren die groepen echt zo heterogeen? De kwestie is natuurlijk: hoe realiseer je het dat kinderen zo samenwerken dat ze elkaar echt steunen? Het materiaal dat Rijkje Dekker en Paul Herfs verzameld hebben is heel instructief. Daarvoor heeft het de moeite geloond. Als je ziet hoe ze, in plaats van samen te werken, van elkaar overschrijven, begrijp je dat er een ommekeer nodig is in de werkwijze van de kinderen. Zo iets heb ik bijvoorbeeld in Parijs gezien, bij Régine Douady. Dat was geweldig positief. Die kinderen waren daar gewend aan het samenwerken in heterogene groepen.

Ook bij andere vakken?
Neen, dat deden ze alleen in de wiskunde. In Frankrijk heb je een situatie die dat gemakkelijker maakt. Een les duurt daar anderhalf uur. Dat is heel belangrijk. Zo'n groep krijgt heel wat af in die tijd. Ik ben er eens een keer geweest. Wat ik gezien heb was indrukwekkend.

Waren dat ook echt gemengde heterogene groepen?
Ja, het waren echt heterogene groepen – sommige leerlingen op een heel laag intellectueel peil. Trouwens, het proefschrift van Régine Douady is inmiddels verschenen. Moet u zich eens voorstellen: een groep van twintig leerlingen, basisonderwijs, die vijf jaar lang bijeen zijn gebleven. Eén is weggegaan, verhuisd. Het is indrukwekkend wat daar gebeurt.

Maar in andere vakgebieden op dezelfde school werd niet op een soortgelijke wijze gewerkt?
De ervaring is wel geweest dat het ook in andere vakken positief uitwerkte. Ik kan natuurlijk niet over dàt onderwijs praten. Maar ik heb de schriften gezien. Ik stond er verbaasd over hoe goed de spelling was. De Franse spelling is heus niet gemakkelijk. In hun wiskundewerk kwamen geen spelfouten voor.

Nog een vraag ten aanzien van de lerarenopleiding. Iets wat ons beiden intrigeert. Er is een heel oude uitspraak van u: 'Leraren hoeven zelf niet meer te leren dan ze zelf onderwijzen.' Zo is het niet bedoeld, maar zo werd het begrepen. Nu kijken we even naar wiskunde 12-16 en de opleidingen. Hebt u enig zicht op hoe dat zou moeten in vergelijking met hoe het nu gaat?
Ik heb met de SOL te maken gehad, de hele geschiedenis tot enkele jaren geleden mee beleefd. Je zag ze geleidelijk hun eisen steeds maar omlaag schroeven, rekening houdende met de studenten. Aanvankelijk begonnen ze direct met analyse, met epsilon en delta. Ik was nogal sceptisch. Uiteindelijk was analyse tot het laatste jaar opgeschoven, en dan alleen voor het hoofdvak wiskunde. Zo is dat in de loop van de tijd

veranderd: je aanpassen aan de studenten die je krijgt. Dat wordt in de toekomst nog nijpender. Laten we eerlijk zijn: als je met informatica je geld kunt verdienen word je niet leraar. Dat betekent wat voor de eisen die je mag stellen.

Maar wat heeft dat voor consequenties voor het wiskundeonderwijs in het algemeen, in het bijzonder dat van 12-16?
Dat hangt van de hele studie-opzet af. Op zeker ogenblik hebben ze voor het eerste studiejaar een pakket ingevoerd 'Wat kan ik met mijn HAVO-wiskunde doen?' Ik weet niet of het er nog is. Gewoon problemen oplossen. Aardige probleempjes. Een goede instap. Een zekere attitude ten aanzien van de wiskunde scheppen. Dit is veel belangrijker dan dat ze zo ontzaglijk veel geleerd hebben. Een bepaalde attitude ontwikkelen om kritisch te staan tegenover de wiskunde. Maar het wordt een probleem: hoe kom je aan leraren? Ook op de PABO's krijgen ze haast geen studenten meer. Ik weet niet wat er de consequenties van zullen zijn.
Het afbrokkelen van de opleidingen heeft natuurlijk te maken met de eisen die je stelt, en die worden mede bepaald door de longitudinale integratie in de opleiding. Bij ons is het kleuter- en basisonderwijs. In de Bondsrepubliek is het de opleiding voor 6-16. Een hopeloos geval. Maar inofficieel wordt het toch 6-10 (basisonderwijs) plus 'Hauptschule' en 11-16 (diverse soorten middelbaar onderwijs). Breuken horen in Duitsland in het middelbaar onderwijs of op de 'Hauptschule'. Moet je daarvoor lineaire algebra doen? Drie jaar universitaire wiskunde om op de vierjarige basisschool te onderwijzen? Wat leren ze echt in die tijd?

De splitsing, die hier in Nederland nu is tussen eerste- en tweedegraads, juicht u nu in feite toe.
Ja, in principe ja. Het is in elk geval een beter systeem dan ze meestal in de BRD hebben. Ze hebben daar natuurlijk veel water bij de wijn gedaan. Bijvoorbeeld, Wittmann heeft dat gescheiden. Dezelfde bevoegdheid bij verscheidene opleidingen. Je moet je trouwens niet laten misleiden door de eisen die worden gesteld. Met welke prestaties wordt uiteindelijk genoegen genomen? Aan Nederlandse universiteiten deed je vroeger over elk college tentamen; daar kon je echt over doorgezaagd worden. In Duitsland deed je één keer examen, op het eind. Een scriptie en één uur mondeling over al wat je geacht werd te hebben geleerd. Waar je in Duitsland genoegen mee nam, dat was veel minder dan in Nederland. Met zulke verschillen moet je rekening houden.

Wiskunde 12-16, de examinering, de diplomering, de toetsing. Hoe ziet u een ideale toetsing van datgene wat je in wiskundeonderwijs doet?
In Nederland heb je traditioneel landelijk uniforme toetsing. In Frankrijk is dat ook zo. In sommige delen van Duitsland was dat ook het geval. Maar voor het grootste deel had je alleen schoolexamens. In mijn tijd was het zo dat de leraar vraagstukken ter keuze naar de Inspectie stuurde en daar werd het nodige aangestreept. Verrassingen waren er niet bij. Het mondeling stelde niet veel voor. Ik heb nooit een mondeling examen gedaan. Naar gelang van het schriftelijk werd je vrijgesteld. Een tussenweg zou ideaal zijn. De school meer vertrouwen en verantwoordelijkheid schenken.
Ik weet niet veel van de tegenwoordige praktijk. Wel vind ik dat je aan de school veel moet overlaten.

Het feit doet zich voor dat op het centraal schriftelijk slecht gescoord wordt, maar dat leerlingen via het schoolonderzoek door het examen gesleurd worden. Dat ze daar een 7 voor halen en een 5 voor het centraal schriftelijk en dan komen ze uiteindelijk op een 6 uit. Dat het verschil te groot is. De inspectie heeft een strak beleid ingevoerd en nu blijken die cijfers heel netjes met elkaar in het verlengde te liggen.
Ik vind de hele kwestie van het examen niet zo belangrijk – ik bedoel het aandringen op uniformiteit. Dat bereik je toch niet. De grotere uniformiteit en nauwkeurigheid bestaat alleen in de verbeelding. Dat is iets waar je niet zoveel nadruk op moet leggen.