COW en didactiek op de opleiding: De inverse functie

T. Konings
NLO Interstudie, Nijmegen (*)

Samenvatting

De nascholers anticiperen al op de komende veranderingen voor leerlingen van 12-16 jaar. Wat voor gevolgen zal het advies van de COW hebben voor nascholers en opleiders? Een verslag van een eerste terreinverkenning.

Het team W12-16 heeft van de COW de opdracht gekregen een nieuw leerplan en een examenprogramma te ontwikkelen en ook ideeën aan te dragen voor nascholing en opleiding van leerkrachten.
Een centrale vraag bij deze derde opdracht is:

> 'Wat moeten (aanstaande) leerkrachten kunnen en kennen om met het leerplan, dat via de COW ontwikkeld wordt, te kunnen werken?'

Twee docenten van de lerarenopleiding van Hogeschool Interstudie te Nijmegen zijn voor een gedeelte van hun taak verbonden aan het team W12-16 om antwoord te geven op die vraag.

Op de lerarenopleiding Interstudie is een cursus 'schoolwiskunde' rond het onderwerp 'functies' ontwikkeld. Deze cursus probeert aan te sluiten bij te verwachten ontwikkelingen. [1]
Dit artikel gaat over een werkcollege van die cursus. Tijdens dat werkcollege staat de volgende opgave centraal:

> Bepaal de inverse functie van $f(x) = \frac{4}{10}x + 10$. Op welke manieren kun je dat? Waarom mag dat zo?

Het artikel laat zien hoe studenten hiermee worstelen en hoe deze opgave een rol speelt binnen de didactieklessen over de voorstellingsvormen van een functie (situatie, tabel, grafiek, formule), waarin met name het 'waarom' van contexten/situatiebeschrijvingen behandeld wordt.

Een werkcollege

Het achtste werkcollege in de cursus 'schoolwiskunde' rond 'functies' heeft een belangrijke functie: al het voorgaande wordt op een rijtje gezet: methoden worden vergeleken en nog eens wordt de tegenstelling tussen de 'oudere' (vaak verzamelingstheoretisch-georiënteerde), meer formele methoden en de meer recente methoden, waarin werken vanuit voorstelbare situaties en grafieken voorop staat, behandeld. Dit wordt geïllustreerd aan het onderwerp 'Inverse Functies' zonder dat we daarmee een pleidooi willen houden voor invoering in de dagelijkse klassepraktijk. Het onderwerp staat dichterbij het eigen niveau van de studenten dan het voorgaande in de cursus die vooral over invoering van het begrip 'functie' gaat. De huiswerkopdracht vooraf staat hieronder in het kader.

Schoolwiskunde achtste werkcollege

Huiswerk vooraf:

1. EEN OVERZICHT VAN FUNCTIES EN VERGELIJKINGEN IN SCHOOLBOEKEN

   We hebben nu een aantal bijeenkomsten gewijd aan het onderwerp 'Functies en vergelijkingen'. We gaan nu eens op een rijtje zetten welke benaderingen, voorstellingsvormen, oplossingsmethoden, ... met betrekking tot functies en vergelijkingen we gezien hebben. Maak hierbij gebruik van je

aantekeningen en van het dictaat met leerlingenmateriaal.
Geef een volledig beeld door twee schema's te maken (één voor *functies* en één voor *vergelijkingen met één onbekende*) in matrixvorm, met in de rijen de onderstaande vragen en in de kolommen de antwoorden per schoolmethode (Moderne Wiskunde oud, van A tot Z, D.D.B., Sigma, Passen en Meten, Moderne Wiskunde nieuw, Grafiekentaal).

a) Geef een typisch voorbeeld van een opgave.
b) Welke definities kun je geven?
c) Welke notaties (voor functies), welke oplossingsmethoden (voor vergelijkingen)?
d) Wat voor plaatjes?
e) Een verhaaltje?

Opmerking: Deze schema's mag je te zijner tijd bij de toets gebruiken.

2. VERWERKINGSOPDRACHT: INVERSE FUNCTIES

a) Geef een uitwerking van de opgave (hoe doe jij dat gewoonlijk):
   Bepaal de inverse functie van $f(x) = \frac{4}{10}x + 10$
b) Probeer ook een aantal andere uitwerkingen te maken met behulp van andere voorstellingsvormen van functie.
c) Kun je bij bovenstaande opgave een situatie bedenken? Of een situatie waarbij een andere functie en zijn inverse een rol speelt?

Voor een uitwerking van opdracht 1 zie bijlage.

Voorstellingsvormen van functies

Op het bord verschijnen de voorstellingsvormen van functies, die in de brochures 'In verband met...' en 'Verbanden, grafieken en functies' [2] onderscheiden worden, met van elk een paar voorbeelden:

VOORSTELLINGSVORMEN VAN FUNCTIE

situatie

bijv. klosje garen: 

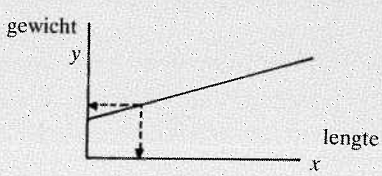
Er bestaat een verband tussen de lengte van de draad op het klosje en het gewicht van het klosje met draad.
Als ik de lengte weet en het verband, dan weet ik ook het gewicht.

tabel

bijv.:

lengte	gewicht

grafiek



formule

$\{(x, y) \mid y = ax + b\}$ of
$f: x \to ax + b$ of
$f(x) = ax + b$

De studenten worden in groepjes van drie verdeeld met de opdracht (aansluitend aan de huiswerkopdracht):

Leg elkaar uit hoe je de inverse functie van $f(x) = \frac{4}{10}x + 10$ bepaalt en waarom dat zo moet/mag.

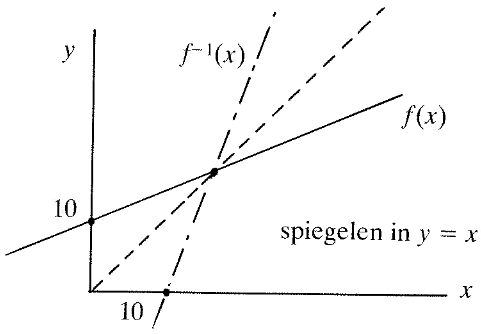
Uitwerking van de meeste studenten

Meestal zie je de volgende uitwerking van opgave 2 van het huiswerk:

a) Bepaal de inverse van:
$y = \frac{4}{10}x + 10$

verwissel x en y:
$x = \frac{4}{10}y + 10 \longleftrightarrow y = \frac{10}{4}x - 25$
dus
$f^{-1}(x) = \frac{10}{4}x - 25$

b) Andere voorstellingsvorm:



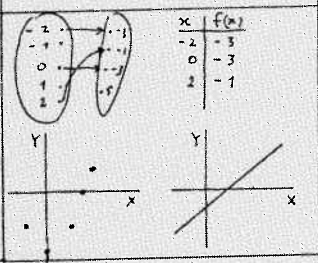
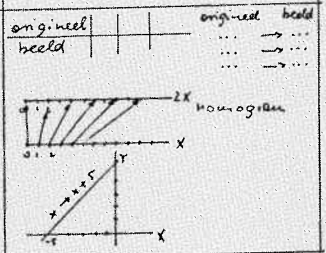
spiegelen in $y = x$
als (a, b) op de grafiek van f ligt en je spiegelt dan ligt (b, a) op de grafiek van f^{-1}. Je kunt dus x en y verwisselen.

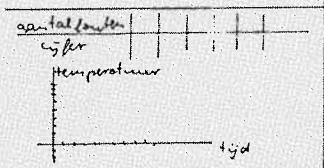
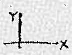
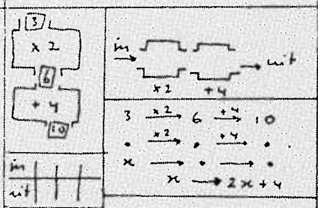
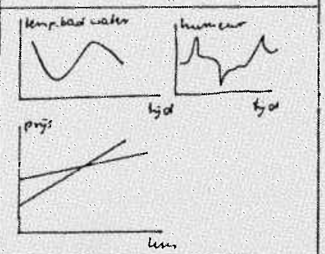
c) Situatie:
Hier blijven de meeste studenten het antwoord schuldig.

Ervaringen bij het groepswerk

De studenten vinden het onderwerp 'inverse functie nemen' meestal moeilijk en zijn dan ook enorm ingespannen bezig om elkaar duidelijk te maken hoe je dat moet doen. De taak van de docent tijdens het groepswerk is om 'de waarom vraag' te stellen en te vragen naar concrete situaties.

Tijdens de cursus 1987/1988 leverde dat bij enkele studenten zeer geprikkelde reacties op: 'Jij ook altijd met je gezeur; ik weet toch hoe het moet en dat weet iedereen; wiskunde is toch wiskunde en al dat geleuter eromheen maakt het alleen maar onduidelijk' kun je beluisteren bij studenten die het voldoende vinden dat ze het kunstje kunnen (en dat kan hij ook nog wel voordoen aan leerlingen) en ook bij een enkele student die bang is dat de wiskunde minder formeel wordt ('gaat het niveau van het wiskundeonderwijs met al die moderne methoden niet omlaag?'). Ik bleef toch aandringen om dan in ieder geval netjes te laten

INVOEREN VAN FUNKTIES IN DIV. SCHOOLMETHODEN	materiaal klas 1 en 2 MODERNE WISKUNDE 3e herz. dr. ± 1975	materiaal klas 1 VAN A TOT Z 5e herz. dr. 1976
TYPEREND VOORBEELD VAN EEN OPGAVE	Gegeven: $f: x \to x^2 - 8x$ $g: x \to x^2 + 8$ Bereken $f(2), f(3), \ldots, g(2), g(3), \ldots$ Bepaal x waarvoor $f(x) = g(x)$	a Schrijf in woorden de funktie $x \to 4.(x-2)$ b wat is het beeld van 5 voor de funktie $x \to 4.(x-2)$
DEFINITIE(S)	Een relatie van A naar B wordt funktie genoemd, als aan elk element van A geen of één element van B is gekoppeld. (Ook wel: verz. geordende paren $(x,y) \in A \times B$, waarbij ......) (Ookwel: als in pijlenfiguur van deze relatie uit elk element van A ten hoogste één pijl vertrekt)	Een voorschrift van een origineel naar zijn beeld noemt men een funktie
NOTATIES	$f: x \to 2x+1$ pijlnotatie beeld, origineel $f(x) = 2x+1$ f - beeld funktiewaarde $y = 2x+1$ relatie geordende paren grafiek en verder verzamelingennotatie $\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y = \frac{1}{2}x^2 - 3 \wedge x \in [-2,4]\}$	"tel er 5 bij" $x \to x+5$ (neem voor origineel x) $y = x+5$
PLAATJES		
KONTEKSTEN/ SITUATIES	x heeft y als moeder	
GLOBALE OPBOUW	"Verzamelingstheoretisch funktiebegrip": verzamelingen ↓ beweringen met open plaatsen ↓ relaties, variabelen ↓ funkties ↓ grafieken	oriëntatie in vlak en ruimte (o.a. coördinaten) ↓ origineel, beeld (ook meetkundig) ↓ funktie als rekenvoorschrift ↓ nomogram en grafiek ↓ inverse en samengestelde funktie ↓ vergelijkingen oplossen m.b.v. inverse funktie.
ALGEMENE OPMERKINGEN	Veel aandacht voor formele taal van verzamelingenleer	Funktie als voorschrift centraal didaktisch idee voor vele onderwerpen.

materiaal klas 1 en 2 PASSEN EN METEN 2e druk 1979	materiaal klas 1 en 2 MODERNE WISKUNDE 4e herz. editie ± 1982	materiaal klas 1 en 2 FUNKTIELYN SLO ± 1985
vul de tabel in: tijd in seconden | aantal polsslagen 10 20 30 ⋮ teken de getallenparen in het rooster aantal tijd	Mia gebruikt in haar fototoestel altijd filmpjes met 12 opnamen Het ontwikkelen kost f 2,50 Elke gelukte foto kost f 1,25 b. noem aantal gelukte foto's: x en te betalen bedrag y Schrijf het voorschrift op dat bij de ze funktie hoort c. Schrijf de mogelijke waarden van y op.	(sterk ingekort:) WELKE AUTO HUREN? Els en Willeke willen op vakantie en gaan bij meneer Zwier een auto huren. Toyota kost f 150,- en Renault kost f 200,- aan huur. kmprijs voor Toyota is 15 cent en voor Renault 12 cent. Welke auto huren ze?
In eerste instantie wel funktie-achtige bezigheden geen defin. in deel 5: een relatie heet een funktie als uit elk element van de eerste verzameling één of geen pijl vertrekt.	Een funktie is een machine die bij elk getal dat je erin stopt niet meer dan één uitkomst geeft. Vaak wordt een funktie door een voorschrift gegeven. (het bijzondere van een funktie is: bij elk origineel één beeld)	
in eerste instantie alleen getallenparen pas in deel 5: $x \to x+2$ $y = x+2$ en ook: $\{(x, y) \in Q \times Q \mid 2x+2y=20 \text{ en } x>0\}$	$x \to 3x-4$ pijlnotatie $y = 3x-4$ vergelijking	totale kosten auto = huur auto + aantal gereden km × kmprijs
 teken ook $\frac{x}{x^2-2}$ en 		
• Boris wil een Bromfiets huren Bij ... km kost 't ... gulden grafiek tekenen en aflezen • computer fiets rekent • lengte = helft (omtrek − 2 breedte) • liftspook: druk je op knop X dan gaat lift naar y (= X − 2)	leeftijd - lengte tijd - temperatuur snelheid - remweg tijd - waterhoogte aantal - prijs hoogte - temperatuur tijd - kosten telefoongesprek aantal foto's - kosten etc. etc.	tijd - temperatuur tijd - humeur tijd - hoogte water tijd - waterverbruik tijd - hoogte gras aantal km - prijs aantal tegels - prijs aantal foto's - prijs etc etc.
regelmaat in getallen en patronen ↓ blokschema's, voorschriften ↓ ware beweringen, veranderlijken, waarmakers, vergelijkingen ↓ paren, tabellen, roosters grafieken ↓ relaties funkties Uiteindelijk zelfde funktiebegrip als Mod. wisk. Maar langere, meer konkrete leerweg.	veel werken met situaties tabellen, grafieken ↓ machines, tabellen, paren ↓ funkties ↓ Lineaire funkties ↓ verzamelingen ↓ relaties Meersporig, van konkreet naar abstract Werkelijkheid als konkretiseringsmiddel.	globale grafieken (niet getalsmatig) bij situaties met tijdafhank. grootheden ↓ "hoe langer hoe meer" situaties met grafieken ↓ regelrecht situaties met snijpunten Uitgangspunt is de werkelijkheid.

zien wat een inverse functie is en waarom je x en y gaat verwisselen. Daarop bleven die studenten het antwoord schuldig.
Anderen zijn wel naarstig op zoek naar situaties, maar vooral vanuit het idee dat je hiermee de leerlingen kunt motiveren.

Voorstellingsvormen en de inverse

Bij de presentatie voor het bord zijn er echter ook altijd wel een paar studenten die begonnen zijn vanuit een situatie of een tabel te kijken naar wat een inverse functie is, en daar ligt het heel wat eenvoudiger dan bij een grafiek die je trucmatig spiegelt en de formule waarin meteen x en y verwisseld worden.
Op het bord verschijnen dan vanuit de voorstellingsvormen van functie ook de voorstellingsvormen van de inverse functie.

De INVERSE FUNCTIE (voorstellingsvormen)

1. *situatie:* klosje garen:
er bestaat een verband tussen lengte draad en gewicht klosje.
Als ik lengte draad weet dan kan ik gewicht bepalen (*ene verband*).
Als ik gewicht weet dan kan ik lengte draad bepalen (*inverse verband*).

2. *tabel:*

$f \rightarrow$

lengte	*gewicht*
0	10
10	14
20	18
30	22
40	26
50	30
100	50
x	$y = \frac{4}{10}x + 10$

$g = f^{inv} \rightarrow$

gewicht	*lengte*
10	0
14	10
18	20
22	30
26	40
30	50
50	100
y	$x = \frac{10}{4}y - 25$

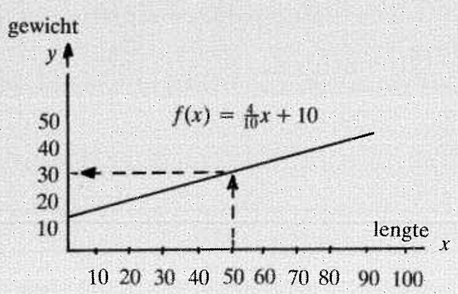
uit tabel
door optellen
functievoorschrift

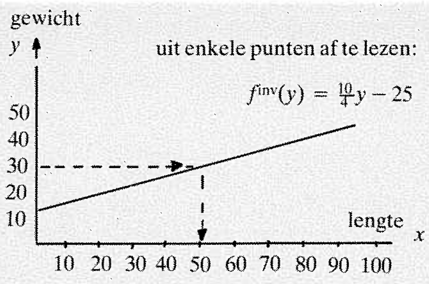
$f(x) = \frac{4}{10}x + 10$ $\qquad f^{inv}(y) = \frac{10}{4}y - 25$

$x \qquad y = \frac{10}{4}x - 25$

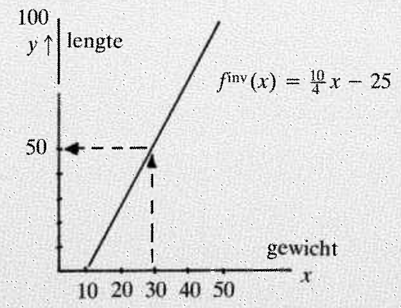
als je toch per se met x wilt beginnen $\longrightarrow f^{inv}(x) = \frac{10}{4}x - 25$

3. *grafiek:*





of als je toch per se met een getal op de x-as wilt beginnen:



4a. *formule van functie (als relatie)*

geordende paren:
$\{(x,y) \mid y = \frac{4}{10}x + 10\}$
origineel beeld

inverse geordende paren:
$\{(y,x) \mid y = \frac{4}{10}x + 10\} =$
origineel beeld
$\{(y,x) \mid x = \frac{10}{4}y - 25\} =$

we noemen nu eenmaal graag het eerste getal: x

$\{(x,y) \mid y = \frac{10}{4}x - 25\} =$

b. *formule van functie (als machine)*

$f: x \rightarrow \boxed{\times 4} \xrightarrow{4x} \boxed{\div 10} \xrightarrow{\frac{4}{10}x} \boxed{+10} \rightarrow \frac{4}{10}x + 10 = y$

$\frac{10}{4}y - 25 \leftarrow \boxed{\div 4} \xleftarrow{10y - 100} \boxed{\times 10} \xleftarrow{y - 10} \boxed{-10} \leftarrow y : f^{inv}$

het getal waarmee we beginnen noemen we nu eenmaal graag x:

$\frac{10}{4}x - 100 \leftarrow \boxed{\div 4} \xleftarrow{10x - 100} \boxed{\times 10} \xleftarrow{x - 10} \boxed{-10} \leftarrow x : f^{inv}$

Bij de bespreking ligt sterk de nadruk op de zinsnede: 'als je toch per se met x wilt beginnen', 'als je toch per se met een getal op de horizontale x-as wilt beginnen', 'we noemen nu eenmaal graag het eerste getal x.' Deze formele notatiekwestie heeft het onderwerp inverse functies in het verleden zo ingewikkeld gemaakt.

Conclusies van de les

- Wat is de oorzaak van veel ellende rond inverses;
  - men is de essentie van inverse nemen vergeten;
  - de spiegeleigenschap wordt in plaats daarvan tot definitie verheven;
  - de truc verwissel x en y is blijkbaar goed te onthouden.
- De uitwerking van huiswerkopgave 2a, zou moeten worden:

$y = \frac{4}{10}x + 10 \qquad f(x)$
$\Updownarrow$
$x = \frac{10}{4}y - 25 \qquad f^{inv}(y)$

en als je dat nodig vindt verwissel je x en y:
$y = \frac{10}{4}x - 25$

- Vanuit een situatie houd je veel meer contact met de essentie van een begrip.
- Ook voor ingewikkelder begrippen zijn situaties, tabellen en grafieken veel inzichtelijker dan formules. Het formele kan veel verhullen en leidt gemakkelijker tot trucs.
- Het begrip inverse functie is eigenlijk heel eenvoudig en natuurlijk. In een reële situatie zul je geen enkel probleem hebben met de vragen:
  - als je een grafiek hebt van gereden kilometers (k) en prijs (p), hoe bepaal je dan het aantal kilometers als je de prijs weet?
  - als je de functie $f: k \rightarrow p$ weet, kun je dan ook de functie $g: p \rightarrow k$ bepalen?

  En dan komt het niet bij je op de p en k te gaan verwisselen.
- De situatie zou de ingang moeten zijn naar de begripsvorming en niet de leuke toepassing ter motivering achteraf.

Wat moeten aanstaande leerkrachten kunnen en kennen?

Bij het opzetten van de schoolwiskundecursus 'Functies' hebben een aantal uitgangspunten een centrale rol gespeeld. Dit artikel gaf een voorbeeld van hoe deze gestalte kunnen krijgen.
De uitgangspunten:
- Aanstaande leerkrachten kunnen vastzitten aan een 'Dat mag zo/dat moet zo'-houding in plaats van 'Het kan op vele manieren'. Andere oplossingen worden vaak met moeite geaccepteerd. De opleiding dient te werken aan repertoire-vergroting. Daarbij kunnen opgaven op het niveau van de leerling doordacht worden, maar ook zijn activiteiten op het niveau van de aanstaande leerkracht van belang.
- Het is van belang wiskunde te ontwikkelen vanuit concrete, natuurlijke situaties en deze situaties dienen niet als sausje ter motivering.
- Wiskunde leren op een formele manier leidt gemakkelijk tot trucmatige routine en het werken vanuit situaties doet eerder een beroep op gezond verstand.
- Theoretische kennis hebben van bijvoorbeeld de diverse voorstellingsvormen van functie (situatie, tabel, grafiek, formule) betekent nog niet dat je ze didactisch kunt hanteren.
- De schoolwiskunde is geen star gegeven: er zijn vele verschillende methoden en de schoolwiskunde heeft de laatste twintig jaar een enorme ontwikkeling doorgemaakt.
  Hiervan dienen aanstaande leerkrachten op de hoogte te zijn ...

Noten

1. *Opzet van de schoolwiskundecursus 'Functies'*
   De cursus bestaat uit tien bijeenkomsten van 1½ uur met per bijeenkomst 2½ uur huiswerk, dat vooral besteed wordt aan het bestuderen van hoofdstukken uit diverse schoolboeken; daarbij worden flink wat opgaven voor leerlingen gemaakt.
   In *de eerste helft* van de cursus komt de 'geschiedenis' van het functiebegrip in de diverse schoolmethoden van 1968 tot ongeveer 1985 aan de orde. De onderwerpen zijn: getallen en variabelen, verzamelingen in de brugklas, notatie en definitie van functie, kritiek op het verzamelingstheoretische functiebegrip, het oplossen van vergelijkingen en soorten lettergetallen. De daarbij bestudeerde schoolmethoden zijn: de 'oude' versie van Moderne Wiskunde, Van A tot Z, Sigma, Passen en Meten, de 'nieuwe' versie van 'Moderne Wiskunde'.
   In *de tweede helft* van de cursus worden de meest recente ontwikkelingen behandeld:
   De onderwerpen zijn: vertaalvaardigheden, voorstellingsvormen van functie en de inverse functie, vast recht logica, mate van gestructureerdheid. De daarbij bestudeerde schoolmethoden: SLO pakketten Grafiekentaal en Regelrecht, Wiskundelijn en Exact.

2. *Literatuur*
   'In verband met ...', SLO, Enschede, 1983.
   'Verbanden, grafieken en functies', SLO, Enschede, 1987.

Met dank aan Hans Krabbendam voor commentaar op een eerdere versie van dit artikel.