Bovenstroomprogramma, een te sterk beroep op onze goedgelovigheid?

A. Roodhardt

Ik ben van mening dat medische specialisten meer moeten verdienen!
Er is een parallel tussen deze uitspraak en hetgeen ik hier ga zeggen. In sommige gezelschappen wordt het je niet in dank afgenomen wanneer je medische specialisten nog meer wilt toestaan. Iets dergelijks ervaar ik wanneer ik opkom voor de belangen van de betere leerling. Dit schijnt een gevoelig punt te zijn. Ik doe het toch en om bij voorbaat elk misverstand te vermijden, ik ben daarvoor niet bevreesd!

Het raamplan

Wat is de bedoeling van mijn verhaal?
Er is mij gevraagd om als leraar te reageren op het voorlopige raamplan van de COW, de Commissie Onderbouw Wiskunde, en om u te vertellen wat er door mij heen gaat als ik dit plan lees. Misschien zal ik veel dwaze dingen zeggen, wellicht ook een aantal verstandige, maar een echt goede reactie geven op zo'n uitgebreid plan is op dit moment natuurlijk nog niet mogelijk. Vorige week werd ik bovendien in de problemen gebracht toen ik de nieuwste versie van dit raamplan ontving waarin een aantal zaken, waarop ik wilde reageren, waren afgezwakt.
Als ik deze laatste versie lees dan doet me dat denken aan de werkwijze van de wiskundige die, net zoals die indiaan uit het raamplan, alle sporen van zijn activiteiten achteraf uitwist. Dat zelfde gevoel krijg ik ook een beetje als ik het werk van de COW-groep bekijk. Dit betreft dan vooral het moeilijke punt van het werken met homogene of heterogene groepen leerlingen, het wel of niet differentiëren en de wijze waarop dit het best zou kunnen gebeuren. Daarover staat aan het eind van het raamplan een verhaal waarin geen duidelijke uitspraken worden gedaan.

Al lezend vroeg ik me af wat daarachter zat. Bij mij rees het vermoeden dat de leden van de COW-groep het hierover misschien niet met elkaar eens zijn geweest. Daarover lees ik in de laatste versie niets. Conclusie: er wordt een minderheid onderdrukt!
Zo is het natuurlijk niet. Er moet een discussie aan voorafgegaan zijn die ik echter in het raamplan niet terugvind. Dat is jammer, want er zijn hierover belangrijke dingen te zeggen. Zo wordt in het raamplan gesproken over leerboeken die nog geschreven moeten worden zowel voor scholen die werken met homogene groepen, als voor scholen die werken met heterogene groepen. Ik denk dat dit een verkeerde aanpak is, omdat al bij het ontwerpen van een programma rekening gehouden moet worden met een bepaalde werkwijze. Wanneer je dat niet doet, creëer je een grote mate van onduidelijkheid voor het onderwijs.
Een andere mogelijkheid is dat men dit punt bewust onduidelijk heeft gelaten om geen weerstand op te roepen bij de leraren en dat zou voor een VALO-conferentie als deze geen goede zaak zijn.

Wat de reden voor deze onduidelijkheid ook is, er wordt de lezer informatie onthouden. Ik zou liever gezien hebben dat in het raamplan de verschillende standpunten hierover met bijbehorende argumenten waren beschreven. Door deze onduidelijkheid kan het nu ook gebeuren dat ik tegen bepaalde zaken ga aanschoppen waarover, binnen het COW-team, allang duidelijke standpunten zijn ontwikkeld en die dus in feite achterhaald zijn. Om u enig houvast te bieden heb ik de onderwerpen waarover ik iets wilde zeggen, op een rijtje gezet:

- De invloed op de leraar van:
  - de politiek;
  - het onderwijsklimaat;
  - de werksituatie in de klas.
- De positie van de begaafde leerling.
- Mechanistisch en formalistisch onderwijs.
- De nieuwe eenzijdigheid.
- Het redeneren.
- De meetkunde (misschien).

Invloeden op de leraar

In de eerste plaats iets over de werkomstandigheden van de leraar. Een bepaalde werkwijze in de klas staat of valt niet alleen met het programma, maar ook met de werkomstandigheden van de leraar. We hebben in Nederland de slechte gewoonte om daarbij te spreken van randvoorwaarden. Ik vind dat een verkeerd taalgebruik, omdat daarmee de suggestie wordt gewekt dat het gaat om zaken die niet zo belangrijk zijn. Ik vind die zaken wel van belang en ik wil daarom ingaan op een aantal aspecten die het werk van de leraar beïnvloeden.

Zo is daar de politiek. Ik weet daar eigenlijk niet zoveel van, maar daar stoor ik mij niet aan, want politici weten op hun beurt weer weinig van onderwijs. Wat doet de politiek? Die maakt allerlei plannen. Eerst moet er een middenschool komen, dan VBaO en tenslotte voortgezet basisonderwijs aangevuld met varianten voor bepaalde schooltypen. Kortom, de ene verandering rolt over de andere.
Het beeld dat dit gedoe bij mij oproept is dat van een voetganger die een drukke weg wil oversteken. Dat lukt maar niet omdat het verkeer geen ruimte biedt. Wat doet een rechtgeaard politicus in zo'n situatie? Die past een bekende strategie toe, hij knijpt zijn ogen stijf dicht en rent naar de overkant. Want hoe lost de politiek het onderwijsprobleem op? Via het bekende doorschuifsysteem! De grote lijnen worden uitgezet, want daar valt eer aan te behalen, en het gewone volk moet dan vervolgens de werkelijke problemen oplossen.
Een dergelijke werkwijze zien we ook bij de automatisering van de ministeries.
Uit de krant:

> "Automatisering wordt daarbij gezien als een zuiver technisch probleem. Ten onrechte gaat men daarbij uit van de gedachte dat de leiding van de ministeries zich daarbij afzijdig moet houden. De verantwoordelijkheid bij dit automatiseringproces wordt ten onrechte gelegd bij de lagere regionen.
> Maar daarvoor zijn deze uitvoerende ambtenaren niet opgeleid."

Volgens de berichtgeving is door deze aanpak van de automatisering al een kleine twee miljard gulden verspild!
Bij het aanpakken van onderwijsveranderingen wordt een zelfde fout gemaakt. Er wordt van uitgegaan dat de oplossing simpelweg gevonden kan worden door de uitvoerenden daarvoor even op te leiden. Stop de moeilijkheden in een grote map en zet daar het stempel 'nascholing' op en de zaak is geregeld, zo lijken de politici te denken!

Een ander punt waarover ik het wil hebben is de eenheidsgedachte: alle leerlingen zoveel mogelijk bijeen houden. Dit spreekt sommige mensen geweldig aan en het schijnt zelfs zo te zijn dat ze er de bekende vlindertjes van in hun buik krijgen! Aan deze gedachte moet alles opgeofferd worden zonder daarbij te kijken naar de gevolgen die dat kan hebben voor het onderwijs en de leraren. Over de faciliteiten die daarvoor nodig zijn, wordt al helemaal niet gesproken. Het ministerie zegt simpel dat voor dat alles geen geld is. Vroeger zei men, het moet uit de lengte of uit de breedte komen. Bij het ministerie redeneert men tegenwoordig driedimensionaal: het moet uit de lengte, of uit de breedte of uit ... de leraar!

Dan is er de selectieproblematiek. We moeten straks selecteren, maar we weten nog niet hoe dat moet en of het ook wel mag. Als leraar beslis je daar niet meer over. Er is een schoolbeleid waarbij gelet wordt op het aantal leerlingen en ook de ouders hebben een vinger in de pap.

Kan de leraar dat allemaal overleven. Een vraagteken zet ik er maar niet bij, want ik weet het antwoord al.

Als ik, gewoon wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs, het voorgestelde programma in het raamplan lees, dan vermoed ik dat er een geweldige druk op de leraar zal worden gelegd. In het wiskundeonderwijs, zoals in het raamplan wordt voorgesteld, leren de leerlingen een heleboel dingen niet meer uit een boek. De leerling leert meer zelfstandig en daarbij zal veel meer tijd nodig zijn voor individuele begeleiding van de eigen leerweg van elke leerling.
Kan een leraar dat alles uitvoeren?
Volgens mij in de meeste gevallen niet, een beperkte groep ideale leraren uitgezonderd. Noodgedwongen zal een gewone leraar een overlevingsstrategie gaan toepassen. Hij zal bepaalde groepen leerlingen die veel hulp nodig hebben gaan helpen en de betere leerling zal onvoldoende aan zijn trekken komen. Of andersom.

Ik denk hierbij terug aan mijn begintijd als onderwijzer. Ik gaf mijn leerlingen daarbij ook rekenen en ik ontdekte dat bepaalde leerlingen in de helft van de tijd al klaar waren. Wat moest ik doen? Ik gaf die leerlingen extra opgaven, wat moeilijker dan de vorige. Dat werd mij door hen niet altijd in dank afgenomen. 'Nu krijgen we als beloning voor ons harde werken nog een stel sommen. Dat zal ons geen tweede keer overkomen'! Iets dergelijks dreigt nu te gebeuren als de uitgangspunten van het raamplan werkelijkheid worden.
Ik vind het daarom een tekort in het voorgestelde raamplanprogramma dat er geen aandacht is besteed aan een afstemming tussen wat gewenst en wat haalbaar is.

De ontwerpers van het COW-project zijn in de bouwwereld te rade gegaan en vonden daar de term 'raamplan'. Ik vind dat je voor de realisering van een dergelijk experiment ook in dezelfde bouwwereld moet kijken en tevoren een aantal 'bezwijkproeven' op leraren moet nemen. Ikzelf ben bereid daaraan deel te nemen.
Het lijkt me toe dat onder de bovengeschetste omstandigheden niet alleen de bovenstroomleerlingen tekort zullen komen.

Nog enkele losse opmerkingen over de inhoud van het raamplan.
Ik proef daarin een afzetten tegen dat wat er vroeger was. Wat vroeger gebeurde was kennelijk niet in de haak. Tè mechanistisch en tè truukmatig en dat zal allemaal beter worden. Wat ik echter mis is een nadere onderbouwing van de haalbaarheid van de nieuwe voorstellen. Ik geef toe dat het oude programma eenzijdig is, maar dit komt volgens mij niet zozeer door de leerstof als wel door wat met die leerstof gebeurt. Ik zal straks enige voorbeelden geven van wat ook nu nog uit die traditionele leerstof gehaald kan worden. Ook ben ik bang dat het raamplanprogramma leidt tot een nieuwe eenzijdigheid.

Context

'Context' lijkt een nieuw toverwoord. Sommige leerlingen worden daardoor aangesproken en gestimu-

leerd, maar er zijn ook leerlingen die er niet mee uit de voeten kunnen en er niets uit weten te halen. Ze ontdekken niets in een context. Dat geldt niet alleen voor leerlingen uit het lbo, maar ook voor sommige leerlingen uit havo of vwo.
Contexten worden gebruikt om leerlingen ergens meer bij te betrekken, want het is immers leuker dan die formele wiskunde. Daarbij wordt jammer genoeg vergeten dat er ook leerlingen zijn die juist geïnspireerd worden door meer formele wiskunde. Een aantal van hen is zelfs wiskundeleraar geworden en dat betekent dat er toch ook goede kanten aan die meer formele wiskunde zitten.

Natuurlijk zitten er ook veel goede aspecten aan meer contextrijk wiskundeonderwijs en veel leerlingen zullen het waarderen. Maar we dienen ons daarbij wel af te vragen of dit effect niet wordt veroorzaakt doordat de leerling van nu hierin een afwisseling ziet met de hem of haar bekende, meer traditionele werkwijze. Voor latere leerlingen kan dit effect weleens niet meer zo werken. Ik vind dat dit nader onderzoek verdient.
Ook proef ik een te groot optimisme in de gedachte dat leerlingen in staat zullen zijn om een geleerde aanpak van een probleem ook zomaar toe te passen op een probleemsituatie in een ander gebied.
Mijn ervaring is dat dit beslist niet voor alle leerlingen geldt.

Projecten

Een ander algemeen punt betreft 'projecten', iets extra's dus. Ik ben bang dat door de druk van de omstandigheden daar weinig van terecht zal komen. Tenzij men het examen zo inricht dat geen voldoende te behalen is als leerlingen geen ervaring in het werken met projecten hebben kunnen opdoen.

De positie van de begaafde leerling

De wiskundig begaafde leerling – niet te verwarren met de havo- of vwo-leerling, want niet alle havo- of vwo-leerlingen zijn wiskundig begaafd en wiskundig begaafde leerlingen komen ook in andere schoolsoorten voor – ach die redt het wel. Die heeft al zoveel, moet je daar nu nog iets extra's aan doen?
Buiten het onderwijs is het een normaal verschijnsel dat iemand die begaafd is, bijvoorbeeld in voetballen of pianospelen, extra gestimuleerd en getraind wordt om daarin nog beter te worden. Ook in het wiskundeonderwijs hebben we te maken met begaafde, ja zelfs hoog begaafde leerlingen, die echter onvoldoende aan hun trekken komen omdat de leerstof voor hen te weinig uitdagend is. Voor veel begaafde leerlingen leidt ons wiskundeonderwijs vaak tot verveling en draagt weinig bij aan een verdere ontplooiing van hun mogelijkheden.
U merkt dat ik me enigszins afzet tegen het werken met al te heterogene groepen. Zelfs als je kijkt naar zogenaamde homogene groepen dan is daarin nog sprake van een grote mate van heterogeniteit en het werken daarmee vereist al genoeg van het vakmanschap van de leraar.

Het bij elkaar houden van alle leerlingen is ook om een andere reden af te raden. Psychologisch onderzoek heeft aangetoond dat het beginnersgedrag van begaafde leerlingen al anders is. Deze leerlingen pakken problemen meteen al meer systematisch aan, ze maken betere aantekeningen en ze hebben een veel duidelijker leerintentie. Hiermee heb je in het onderwijs rekening te houden.
Wat kun je begaafde leerlingen dan wel laten doen?
Ik zou ze meer laten werken in andere, voor hen nieuwe, meer formele systemen. Het raamplan geeft daarvoor wel enkele aanzetten, maar ik vind dat dit aspect onderbelicht is.
Ik zal u straks enkele voorbeelden geven van mogelijke problemen die wiskundig begaafde leerlingen de gelegenheid bieden om met meer formele wiskunde te leren werken.

Formaliseren

Wat bedoelen we eigenlijk met formaliseren? Ik citeer Erasmus uit de 'Lof der zotheid', als hij het heeft over de wiskundigen:

> 'Maar vooral dan zien ze laag neer op het oningewijde publiek, als ze driehoeken, vierhoeken, cirkels en andere dergelijke meetkundige figuren de een over de ander tekenen en als in een doolhof dooreen laten lopen, vervolgens letters als in slagorde scharen die ze telkens en telkens weer nu eens op deze dan weer op gene wijze rangschikken, om zo onervarenen zand in de ogen te strooien.'

Zo lijkt de wiskunde van buitenaf door een leek bekeken.

Laat ik u echter enkele voorbeelden geven van het meer halen uit traditionele leerstof en het werken met formele wiskunde op het niveau van onze leerlingen.
Om te beginnen een bekend, kaal probleem. Neem de formule:

$y = ax^2$

Parabolen dus. Nu geef je de coördinaten van een punt dat op die parabool ligt, het punt (4,5) bijvoorbeeld, en dan laat je a berekenen.

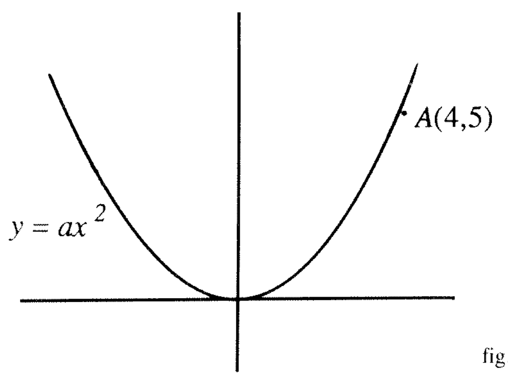

fig. 1

Zo'n berekening is door veel leerlingen te leren en daarna kun je ze laten oefenen met andere getallen. Zelfs met negatieve coördinaten. En wil je de leerlingen laten stranden, dan moet je lettercoördinaten geven. Dit is een standaardvoorbeeld van die ouderwetse, traditionele wiskunde. Kan dat worden uitgebreid?

Je kan er een context bij bedenken die wellicht nog niet erg realistisch oogt. Je geeft een vakje en je vraagt naar alle parabolen die door dat vakje gaan:

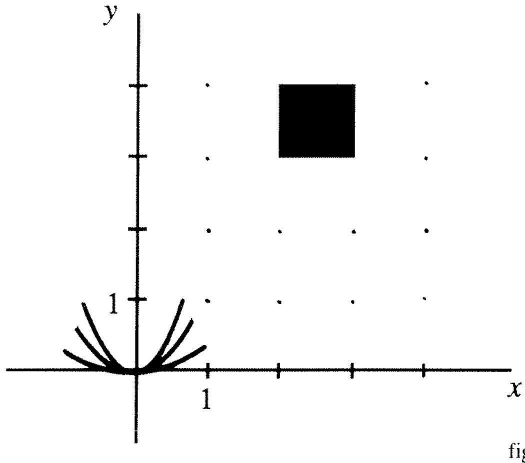

fig. 2

Het aardige is dat zo'n vraagstukje door leerlingen op heel verschillend niveau wordt aangepakt. Sommigen menen dat het niet kan, want dat punt is veel te dik! Anderen, scherpslijpers, vragen of de punten bij de hoeken er nu wel of niet bij horen! Deze lieden zijn hard toe aan toegepaste wiskunde. Op een gegeven moment zijn er leerlingen die doorkrijgen dat je met die parameter a het een ander ander kunt doen.
Een voorbeeld van iets fundamenteler met de leerstof omgaan. Die a is niet zomaar een letter die je moet berekenen, maar je kunt ermee sturen. Dat brengt mij op een ander voorbeeld uit de havo-3 leerstof:

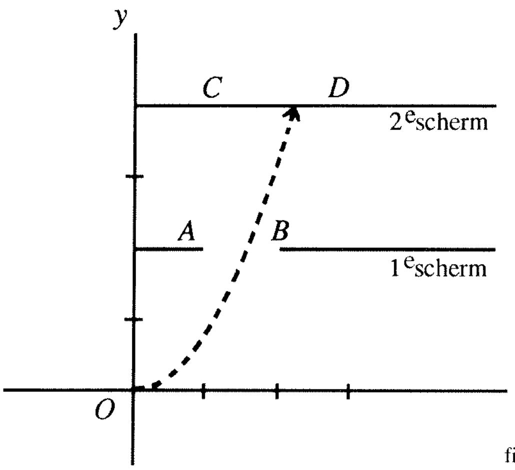

fig. 3

Weer de paraboolformule $y = ax^2$.
Nu heb ik twee schermen opgesteld. Bij AB is een gat. Vanuit 0 sproeien vonken volgens parabolische banen $y = ax^2$. Een deel treft het tweede scherm in het gebied CD.
Bepaal dat gebied.

Een niet zo realistische context, maar dat zal veel leerlingen een zorg zijn!

Al werkend met mijn 'bovenstroom'-leerlingen ga ik dit probleem variëren:
Hoe gaat het als voorwerpen zich in rechte lijn voortbewegen?

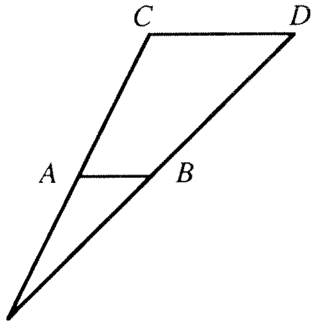

fig. 4

In de meetkunde hebben we geleerd dat de lengte van die stukken door verhoudingen bepaald worden. Als ik dus met AB ga schuiven, dan heeft dat geen invloed op de lengte van het bovenstuk. Zou dat ook voor die vonkenregen gelden?

Heel verrassend is nu voor leerlingen dat dan ook blijkt te gelden, dat verschuiving van AB geen invloed heeft op de lengte van het getroffen gebied op CD bij parabolische banen.
Het is een voorbeeld van een opgave waarmee je bepaalde leerlingen de gelegenheid biedt om verder te gaan.

Nu maak ik het nog iets fantastischer, zoals bij een computerspelletje.
Je introduceert een ruimteschip R dat vliegt volgens de getekende baan van een parabool:

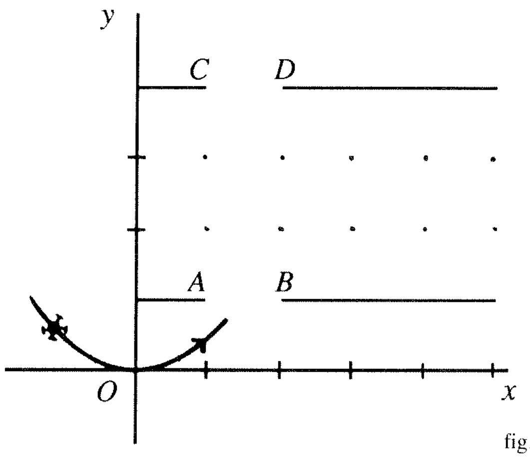

fig. 5

De vraag is nu of dat ruimteschip door de opening AB vliegt. Niet zo onrealistisch als het lijkt, want in de ruimtevaart heeft men ook met dergelijke doorvliegvensters te maken.

Je kunt dit nog wat moeilijker maken. In de oorsprong mag de bemanning van het ruimteschip nog een parameter a kiezen. Hoe moeten ze a kiezen zodat het ruimteschip zowel door het venster AB als door CD zal vliegen? Ik meen dat je door dergelijke uitbreidingen de betere leerlingen kunt motiveren en ze de gelegenheid biedt om op hun eigen niveau wiskundig zinvol bezig te zijn.

Formaliseren nu

Dit is een huisje:

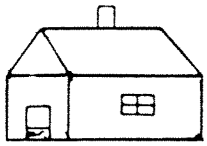

fig. 6

We gaan huisjes beschrijven. Dan moet je dat object ontleden en daarbij gebruik je een woordenschat:

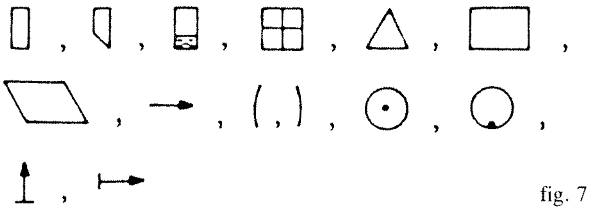

fig. 7

U ziet ramen, deuren, muren, stukken dak, schoorstenen, e.d. Als je bij die symbolen beschrijft wat ze betekenen, dan krijg je een woordenboek.
Nu hebben we nog een beetje grammatica nodig en die ziet u hier:

→ (*Y*, *Y*) means that *X* is to the right of *Y*,

⊙ (*X*, *Y*) means that *X* is inside of *Y*,

◯ (*X*, *Y*) means that *X* is inside on the bottom of *Y*,

↑ (*X*, *Y*) means that*X* rests on top of *Y*,

→ (*X*, *Y*) means that *X* rests to the right of *Y*.

fig. 8

Zo betekent de eerste regel dat X rechts van Y ligt en zo verder. Wat kun je daarmee doen? Je kunt een huisje geven en vragen daarvan een goede beschrijving te geven. Je kunt een beschrijving geven en vragen naar het huisje. Een paar voorbeelden:

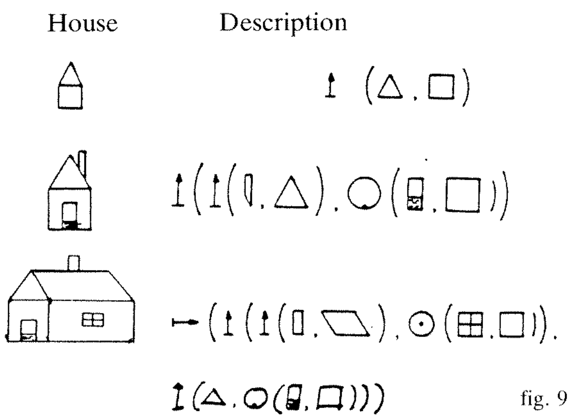

fig. 9

Hierbij zijn ook vragen te stellen over substituties, verwisselingen en beperkingen van deze taal. Het lijkt wel algebra. Het is een formele taal die ook nog nut heeft, want zij komt uit een leerboek over kunstmatige intelligentie.

En gezien de ontwikkelingen in onze maatschappij kunnen we in de toekomst die kunstmatige intelligentie nog weleens hard nodig hebben!

Een ander aspect betreft het loskomen van de concrete objecten en het concrete handelen.
Een voorbeeld. Hieronder zijn een aantal botjes getekend:

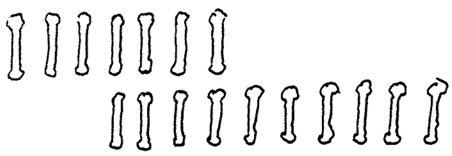

fig. 10

Het zijn door een archeoloog gevonden dierenbotjes. In de archeologie kan men nu nagaan wat een linker- en een rechterbotje is en welke bij elkaar horen. Men is daarbij geïnteresseerd in het aantal dieren dat er oorspronkelijk geweest is.
Men groepeert dan de botjes zoals in de tekening is aangegeven. Hoeveel van die beesten zijn er geweest?
Men kan daarbij deze formule hanteren:

$$N = L + R - P$$

Het aantal linker- plus rechterbotjes bij elkaar opgeteld en het aantal dubbeltellingen er vanaf getrokken.
Dit is echter niet erg reëel. Als bij de paren al botjes missen, dan zal er verder nog wel het een en ander ontbreken.
Daarom hebben archeologen de volgende formule bedacht:

$$N = \frac{L^2 + R^2}{2P}$$

Als je gaat rekenen, dan blijk je met deze formule een grotere waarde van N te kunnen leveren. Je kunt ook speciale gevallen bekijken, zoals: $R = 0$, of $L = R = P$.

Om een indruk te krijgen van de betrouwbaarheid van de formule stel je de leerling voor de wetenschap een loer te draaien door een paar botjes weg te nemen. Welke botjes richten de meeste schade aan?
Misschien is wegpikken pedagogisch niet zo verantwoord, maar het leert de leerling wel om kritisch naar een formule te kijken.
Unaniem stelden mijn leerlingen voor om een botje van een paar weg te nemen.
Ik heb mijn havo-3 leerlingen vervolgens verteld dat er ook archeologen zijn die deze formule aanhangen:

$$N = \frac{LR}{P}$$

We hebben N berekend met beide formules voor verschillende waarden van L, R en P, waarbij we erachter kwamen dat de eerste formule meestal een groter aantal opleverde. Is dat toevallig?
'Dat kun je niet weten, want je kunt nooit alle gevallen uitrekenen!', was de reactie.
'Maar dan wordt het juist interessant, want de wiskunde stelt ons in staat om dingen te bewijzen die niet zo maar lijken te kunnen', was mijn reactie als wiskundeleraar en we zijn aan het rekenen gegaan:

$$\frac{L^2 + R^2}{2P} \geqslant \frac{LR}{P}$$

$$L^2 + R^2 \geqslant 2LR$$

$$(L - R)^2 \geqslant 0$$

Daarbij konden we mooi de pas geleerde techniek van het kwadraat afsplitsen gebruiken om aan te tonen of de eerste formule een groter of gelijk aantal oplevert. U ziet dat we, uitgaande van concrete botjes, terecht zijn gekomen bij het analyseren van formules. Ik heb mijn leerlingen bijvoorbeeld ook nog geconfronteerd met andere formules zoals:

$$N = \frac{L^2 + 2R}{2P}$$

Tot verbazing van de klas was er direct een leerling die opmerkte dat deze formule niet kan, omdat er geen 'evenwicht' is tussen links en rechts. Voor mij was dat het bewijs dat het mogelijk is om ook op dit niveau formele wiskunde te bedrijven.

Redeneren

Dan nog iets over redeneren. Iedereen vindt dat daaraan in het wiskundeonderwijs aandacht geschonken moet worden zonder dat duidelijk wordt aangegeven wat men ermee bedoelt. In de praktijk blijkt het leren redeneren meestal een toevallig bijprodukt van de wiskundelessen te zijn. Men neemt bij voorbaat aan dat redeneren voor de leerling te moeilijk is. Daar zijn ze nog te jong voor!

Om het tegendeel te bewijzen, geef ik u een voorbeeld uit een verhaal van Annie M.G. Schmidt, getiteld Pam, Pom en het heertje.
Pam en Pom zijn tweelingen. Ze staan voor het heertje en er ontstaat het volgende gesprek. Ik citeer uit het hoofd:

'Zo, jullie zijn dus Pam en Pom!'
'Ja, meneer'
'Wie van jullie is nu Pam?'
'Dat ben ik', zegt Pam
'En wie is dan Pom?'
'Dat zal ik dan wel zijn', zegt Pom.

Dit is redeneren op het niveau van kleine kinderen en die begrijpen dat best.
Een van de moeilijkste dingen bij het redeneren is de implicatie. Meestal beschouwen we implicaties als 'als-dan' verhalen waarbij geverifieerd moet worden. Dat blijkt voor leerlingen vaak moeilijk te zijn. Maar probeer de zaak ook eens van de andere kant te beschouwen. Een implicatie die in een bepaald geval geldt, legt beperkingen op aan datgene wat mogelijk en niet mogelijk is.
Hier als voorbeeld een plattegrond van een dierentuin met apen en olifanten: (zie figuur 11.)
Een bezoeker is de dierentuin doorgelopen en dan geldt de uitspraak:

'Als hij langs het verblijf van de apen is gekomen, dan is hij ook langs het verblijf van de olifanten gekomen.'

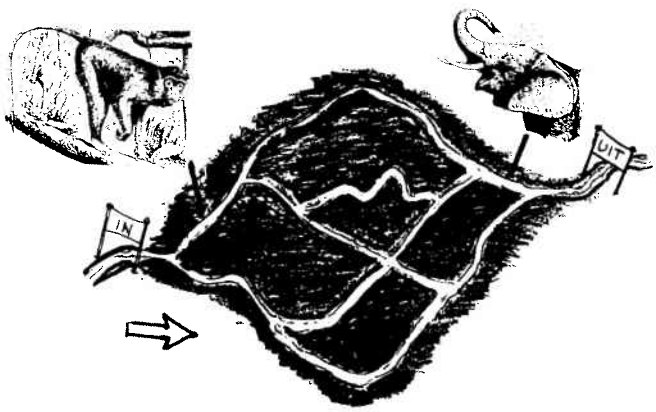

fig. 11

Dat kun je verifiëren en in een later stadium ook schematiseren en dan krijg je:

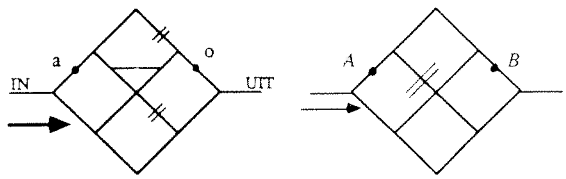

fig. 12

Je bouwt een wereldje waarin je barricades kunt opwerpen zodanig dat die implicatie waar is. Elke barricade kost wat, dus het gaat erom een minimaal aantal barricaden aan te brengen. Dit leidt vervolgens tot omkeringen: als uit A volgt B, volgt dan uit B ook A?
Hier kun je weer allerlei redeneringen op los laten.

Een voorbeeld afkomstig uit een deurenfabriek. Het is wenselijk dat alle geproduceerde deuren rechthoekig zijn en dat valt moeilijk te controleren met een winkelhaak. In de fabriek beweert iemand dat je diagonalen moet meten en als die even lang zijn dan is de deur rechthoekig:

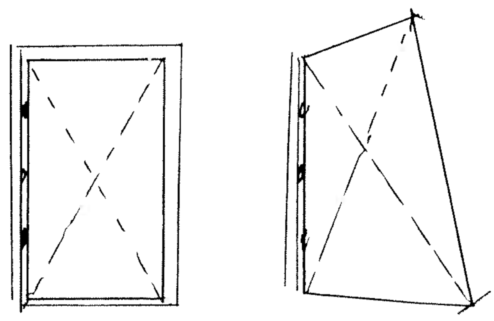

fig. 13

Een waar verhaal want mijn buurman, die werkzaam was in zo'n deurenfabriek, heeft zich erg veel moeite moeten getroosten om een medewerker te overtuigen dat je de regel 'als een deur rechthoekig is dan zijn de diagonalen gelijk' niet zonder meer mag omkeren.

Kun je nog wat meer doen met plattegronden?
Dit is een plattegrond van een stroomgebied van een rivier met aan de oevers een aantal fabrieken die het water kunnen vervuilen:

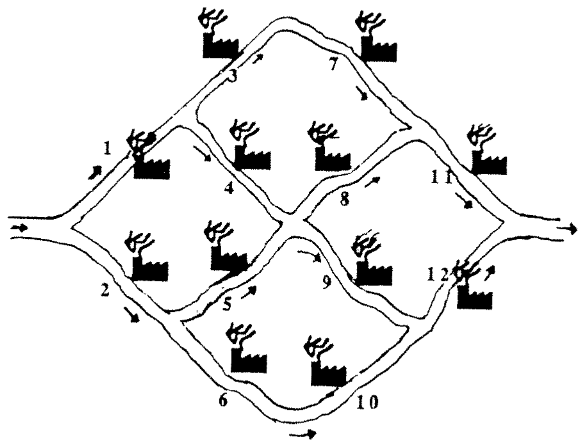

fig. 14

Je kunt hier weer aardige redeneerproblemen bij bedenken door te vragen welke fabriek vervuilt als bij bepaalde meetpunten vuil of schoon water wordt aangetroffen en ook door te vragen waar het verstandig is om meetapparatuur aan te brengen.
Mijn ervaring is dat je zelfs over belangrijke redeneervormen kunt spreken, als dat maar hand in hand gaat met voorbeelden in de gewone taal. Naar aanleiding van de implicatie kunnen de vier bekende gevallen behandeld worden.
In een schema ziet het er zo uit:

$A \to B$	$A \to B$	$A \to B$	$A \to B$
A	*niet* A	B	*niet* B
B	??	??	*niet* A

Er zijn twee geldige redeneervormen en twee ondeugdelijke. Controleer: in $A \to B$ stroomt de waarheid met de pijl mee, de leugen er tegenin.

Een ezelsbruggetje om dit te onthouden: Er staan treintjes A en B, naar rechts ga je naar de waarheid, naar links naar de onwaarheid. Kijk maar wat er gebeurt als je iets met A en B doet.

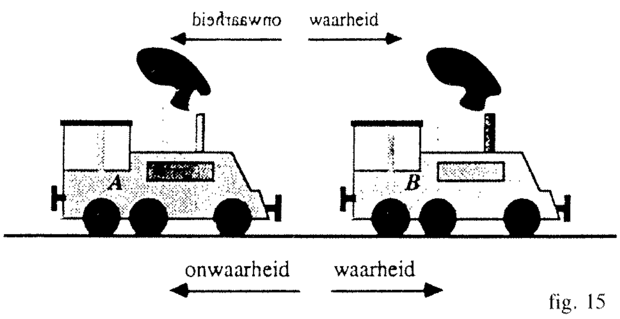

fig. 15

Een kleine technische ingreep om er een gelijkwaardigheid van te maken, wordt door de leerling snel bedacht.
Gebruik je dit in de wiskunde nu ook?
Om dit te illustreren het volgende voorbeeld uit de biologie: 'Als de temperatuur hoog is, groeit de plant langzaam. De plant blijkt langzaam te groeien, dus de temperatuur is hoog.' Een redenering die niet klopt, zoals deze grafiek toont:

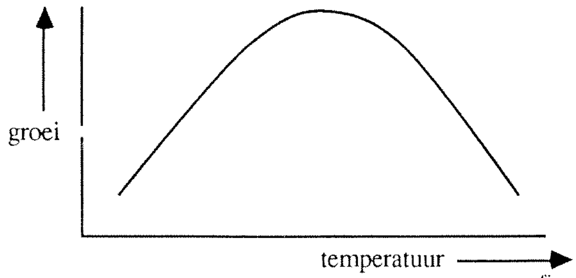

fig. 16

Een moeilijk punt voor de leerlingen toont de volgende grafiek: D

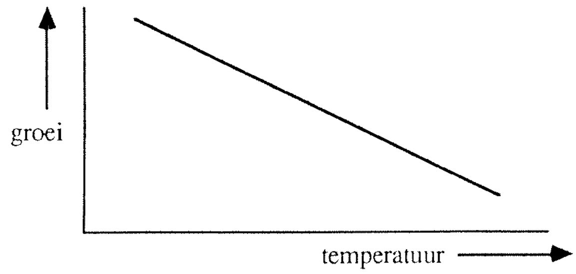

fig. 17

De conclusie is wel waar, maar de redenering deugt niet.

Daarmee zit je op de grens van wat mogelijk is met deze leerlingen. Wat ik met dit alles wil zeggen is dat aan het leren redeneren in het wiskundeonderwijs het een en ander moet gebeuren.
Voor de liefhebbers nog een puzzeltje om te laten zien hoe (on-)nuttig redeneren kan zijn.

Op de grond liggen vier zeer zware stenen. Er is bekend dat op de ene kant altijd een dier getekend is en op de andere steeds een hemellichaam.

Nu beweert iemand: 'Als aan de ene kant een maan staat, dan staat aan de andere kant een vis'.
Welke stenen moet men optillen om de waarheid van de bewering te onderzoeken?

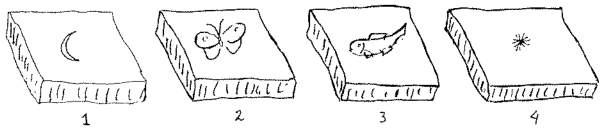

fig. 18

Mijn algemene conclusie:
In het raamplan worden zaken voorgesteld waar ik niet zo voor ben. Maar zelfs bij gewenste zaken moet ik erop vertrouwen dat ze haalbaar zijn en niet door de omstandigheden geblokkeerd worden. Zover reikt mijn goedgelovigheid niet!
In het raamplan van de COW komt veel idealisme naar voren en een streven naar realisme. Maar ik vind ook dat men de praktijk van de klas wat uit het oog heeft verloren. Het raamplan lijkt ontworpen door idealistische realisten. En daardoor is het niet altijd realistisch, zoals een afgeknotte piramide eigenlijk geen piramide meer is.
Ik waardeer het idealisme en het realisme.
Ik hoop te blijven: een realistische idealist!