Over het nieuwe programma voor rekenen-wiskunde op de basisschool

A. Treffers
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool bevindt zich in een stroomversnelling van veranderingen. De eindtermen van de basisschool spreken wat dat betreft duidelijke taal: de meetkunde is na 100 jaar weer terug, zij het op geheel andere wijze. Het rekenen en meten hebben een gewijzigde inhoud gekregen. De invloed van Wiskobas is duidelijk merkbaar.

Inleiding

In het begin van deze eeuw schreef Jan Ligthart in zijn boek: 'In de lente des levens' het volgende over het rekenonderwijs:

> 'In de leerkamer waren drie personen aanwezig: Aernoud, zijn meester, en een boer. Die trad uit een rekenboekje tevoorschijn, en was dus maar een denkbeeldige boer, en toch had hij het meeste in te brengen. Hij kwam met twee manden eieren aanzetten, plaatste die op de markt en verkocht ze, de ene mand à 4 cent per stuk en de andere à 5 cent per stuk. Zoo ontving hij voor alle 300 eieren met elkaar *f* 14,–. Dat was nu voor dien boer heel mooi, maar nou wou de man van het rekenboek weten, hoeveel eieren de boer voor 4 cent verkocht en hoeveel voor 5 cent.' (pag. 73)

Aernoud kon de som niet oplossen en begreep de uitleg van de meester eigenlijk ook niet.

> ' 'Nu de volgende', zei de meester en hij deed weer zijn best het nieuwe vraagstuk te doen begrijpen, om te eindigen met Aernoud het maniertje te leren, hoe hij aan het antwoord kon komen. Maniertjes leren, daarin ontaardde, ondanks den meester, tenslotte het 'ontwikkelend rekenonderwijs'.' (pag. 75)

Dergelijke denksommen bepaalden het gezicht van het rekenonderwijs: eieren, lopende kranen, samenwerkende arbeiders en elkaar tegemoet rijdende fietsers waren wat van die bekende inkledingen. En dan kenmerkte zich het onderwijs in de eerste helft van deze eeuw ook nog door de zogenoemde vormsommen.

Hoeveel cL. is:

$$\frac{\dfrac{5{,}06}{20\frac{6}{25}}\text{ HL.} + \dfrac{37\frac{3}{5}}{9\frac{2}{5}}\text{ dL.} - \dfrac{486}{20\frac{1}{4}}\text{ L.}}{\dfrac{4\frac{2}{3}}{\frac{1}{30}}}\ ?$$

Vanaf de jaren dertig was het met name Kohnstamm die zich tegen deze kolossale denk- en cijfervraagstukken verzette. En met succes, want in de jaren vijftig waren ze goeddeels verdwenen. Maar met de lees-rekenopgaven die Kohnstamm ervoor in de plaats wilde stellen, zoals de volgende, had hij minder succes:

'Willem gaat om half 9 per fiets van A naar B met een snelheid van 12 km per uur. B is 18 km van A verwijderd. Halfweg woont een vriend van Willem.
Nadat hij een uur gefietst heeft, springt zijn band. Hij kan nu naar zijn vriend gaan en daar een fiets lenen, of direct doorlopen naar B. Lopende legt hij 5 km per uur af.

a. Teken de weg, zet een streepje waar de vriend woont en een kruisje op de plaats, waar de band springt.
b. Wanneer zal hij in B aankomen, als hij doorloopt?
c. Wanneer zal hij in B aankomen, als hij bij zijn vriend een fiets gaat lenen en daar 5 minuten oponthoud heeft?'

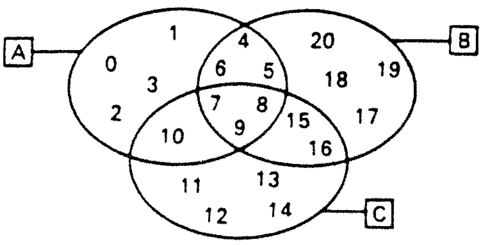
Slechts enkele weinig courante methoden namen deze lange tekst-opgaven in hun onderwijs op. Ook het door Kohnstamm gepropageerde gebruik van ordeningsmiddelen in de vorm van materialen, modellen en schema's ter ondersteuning van het leren van algemene oplossingsmethoden vond weinig ingang, net zo min als elementaire toepassingsproblemen. Sterker: de gangbare leerboeken keerden zich in de jaren vijftig en zestig juist steeds meer van het toepassingsgerichte, inzichtelijke rekenen af. Dat bleek bijvoorbeeld bij verhoudingen. In de 'Cijfferinghe' van Willem Bartjens (begin zeventiende eeuw) stonden opgaven als 'vier ellen linnen kosten negen gulden, hoeveel kosten zestien ellen?' Maar in de jaren vijftig van deze eeuw verschraalde de leerstof (ook van verhoudingen) zozeer dat daarvan zelfs het dunne linnen werd afgehaald, getuige de volgende introductie:

'Wim heeft 10 cent en Joop heeft 5 cent. We kunnen ook zeggen: Wim heeft twee stuivers en Joop heeft één stuiver. Wim heeft tweemaal zoveel als Joop.
We zeggen nu dat hun bezittingen zich verhouden als 2 staat tot 1. Dat schrijven we zo: 2:1. Deze getallen noemen we verhoudingsgetallen. Lees nu eerst deze regel. 10 cent en 5 cent verhouden zich als 2:1.'

Vervolgens worden dergelijke opgaven geoefend. En later volgde evenredigheidsopgaven van het type:
- Twee getallen verhouden zich als 3:4, het kleinste getal is 30, wat is het andere getal?
- Twee getallen verhouden zich als 3:4, hun som is 70, bereken deze getallen.

De zin van dit alles ...?
Rekenen werd vooral zelfstandig rekenen. De didactische discussie ging niet zozeer over denkvormen als wel over werkvormen. Niet de inhoud maar de vorm van het onderwijs stond voorop.

Omstreeks 1970 deden zich twee nieuwe ontwikkelingen voor.
Ten eerste manifesteerde zich de New-Math, de nieuwe wiskunde met verzamelingen en relaties als glanzend alternatief voor het oude rekenen. Een nieuw soort sommen verscheen.



Vul in:
A = {...}.
B = {...}.
C = {...}.
A ∩ B = {...}.
A ∩ C = {...}.
B ∩ C = {...}.

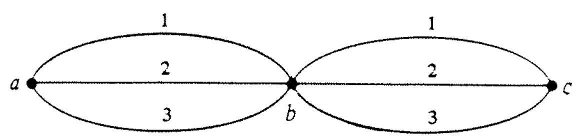
2. Kijk goed naar de verzamelingen van opgave 1 en schrijf dan op of de volgende uitspraken *waar* of *niet waar* zijn:
{0, 1, 2, 3} ⊂ A
{4, 5, 6, 7} ⊂ B
{17, 18, 19, 20} ⊂ C
{5, 6, 7, 8, 9} ⊂ C
{5, 6, 8} ⊂ (A ∩ B)
{5, 8, 17, 18, 19, 20} ⊂ B

Maar deze formele wiskunde redde het hier niet.
Ten tweede diende Wiskobas zich aan. Deze beweging was de didactische tegenhanger van zowel de New-Math als van het verschraalde rekenonderwijs. Ze legde nadruk op contextrijk toepassingsgericht rekenen. Een voorbeeld daarvan vinden we in de volgende anecdote van de schrijver Graham Greene, die in 1987 op bezoek was bij Fidel Castro.

'Het is werkelijk waar, hoor,' houdt hij vol. 'Vorig jaar was ik in Havanna, waar ik Fidel Castro en García Márquez sprak. Márquez was ervan overtuigd dat ik in Vietnam Russisch roulette gespeeld heb, in de jaren vijftig, maar het was in het internaat, ik was negentien. Fidel werd meteen nieuwsgierig en vroeg: 'Hoe vaak hebt u dat gedaan?' Waarop ik zei: 'Vijf keer, telkens met een maand tussenruimte. Uiteindelijk verveelde me dat ook en wilde ik een allerlaatste keer proberen – om de zes vol te maken. Toen heb ik het maar opgegeven.' En terwijl ik uitlegde dat de kans op overleven iedere keer vijf op zes was, begon Fidel brommend voor zich uit te rekenen. Hij was het er niet mee eens. Na uitvoerige berekeningen kwam hij tot de slotsom. 'U moet dood zijn!' '

Uit: de Haagse Post (22.10.1988)

Zou zo iets toen in de krant hebben gestaan dan had Wiskobas dat zeker opgepikt voor het programma 'Kijk op Kans' (NOT) – het eerste grote project waarmee Wiskobas naar buiten trad.
Fidel Castro redeneerde wellicht dat de stervenskans $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$ moest zijn, terwijl Graham Greene vond dat het iedere keer $\frac{1}{6}$ was. Wie heeft gelijk? Of geen van beiden? Wat is de werkelijke stervenskans bij zes keer 'spelen'?
Laten we eerst eens naar een eenvoudiger probleem uit de Wiskobas-collectie kijken.



Hoeveel verschillende routes abc?

Voor de duidelijkheid: de route (1,1) is verschillend van de route (1,2), ook al bevatten ze een gelijk weggedeelte. Dat betekent dat er negen verschillende routes zijn. Blokkeer je weg 3 van a naar b, dan zijn er zes routes. Zijn beide wegen 3 versperd dan blijven nog vier routes van de negen over.
Welnu, met behulp van zo'n wegenmodel kan het roulette-probleem worden opgelost. In plaats van drie wegen van a naar b, moeten er zes worden getekend, waarvan één geblokkeerd is, enzovoort van b naar c en verder.

Het aantal overlevingsroutes is in zo'n schema van a naar c $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 15625$. Het totale aantal routes is $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 46656$. De kans om te overleven is dus ongeveer $\frac{1}{3}$. In ieder geval is duidelijk dat via de kansrekening ook de basisoperatie van vermenigvuldigen in een ander licht komt te staan. En langs deze weg kwam Wiskobas dan toch ook weer bij het aloude rekenonderwijs terecht. Vele nieuwe accenten die in de eindtermen van de basisschool te bespeuren zijn, zijn op het werk van Wiskobas terug te voeren.

1. Nadruk op het ontwikkelen en beheersen van basisvaardigheden, dus tellen, tafels, hoofdrekenen en schattend rekenen, plus de toepassingen ervan via het zogenoemde rekenen in contexten.
2. Cijferen wordt vooral opgevat als een vorm van handig kolomsgewijs rekenen.
3. Verhoudingen worden vanwege het belang voor toepassingen veel breder uitgewerkt dan de formele evenredigheden van het vroegere rekenen.
4. Breuken en kommagetallen komen meer vanuit toepassingssituaties voort, hetgeen betekent dat niet rechtstreeks wordt aangestuurd op het beheersen van rekenregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van (moeilijke) breuken.
5. Aan meten, rekenen met maten en het verwerken van meetgegevens in grafieken en schema's wordt meer aandacht geschonken en minder aan het exerceren in het metrieke stelsel.
6. Zowel de verkenning van de ruimte waarin we leven als de meetkundige kant van rekenen en meten vormen nieuwe onderdelen van de programma's voor rekenen-wiskunde.

Overigens valt bij deze opsomming op dat het onderwerp kansrekening (of waarschijnlijkheidsrekening en statistiek) geen prominente plaats in het programma krijgt toegewezen – dit op grond van ervaringen in de jaren zeventig die niet onverdeeld gunstig waren: een moeilijk terrein voor de onderwijsgevenden en de leerlingen.
In het volgende zal ieder van de genoemde zes terreinen van het basisschoolprogramma voor rekenen kort worden toegelicht.

Basisvaardigheden

Basisvaardigheden omvat tellen, tafels, hoofdrekenen, schattend rekenen en het maken van elementaire toepassingen. De laatste drie onderdelen lichten we in het volgende kort toe omdat die wat nieuwe accenten krijgen in de eindtermen.

Hoofdrekenen staat niet zozeer voor 'rekenen-uit-het-hoofd' als tegenhanger van rekenen op schrift, maar geldt van oudsher als tegenvoeter van het cijferen. Het gaat daarbij om opgaven als die uit figuur 5, waarin tevens de resultaten van de prestaties van negen-, dertien- en zeventienjarigen uit de V.S. staan vermeld. Daarbij moet direct aangetekend worden dat aldaar weinig nadruk op hoofdrekenen wordt gelegd. Er zijn in ieder geval aanwijzingen dat de resultaten in Nederland een stuk beter zijn. En dat is ook echt wel nodig: opgaven als 60:15 en 3500:35 worden door omstreeks $\frac{1}{3}$ deel van de leerlingen correct opgelost, dat is werkelijk veel te laag.

table 1

Type of problem	Time allowed (seconds)	Percentage correct by age: Nine	Thirteen	Seventeen
$64 + 20$	13	52		
$40 + 50$	11		81	96
$6 + 47$	12	47		
$73 - 23$	12	29		
$700 - 600$	11		92	97
$49 - 16$	11		77	86
$1250 - 400$	12		39	57
$36 - 9$	12	20		
2×34	12	25		
4×30	9		73	88
90×3	12	23		
60×70	9		46	55
$20 \div 5$	9		88	94
$60 \div 15$	12		32	58
$3500 \div 35$	14		39	63

table 2

Problem	Do in my head	Use paper and pencil	Use a calculator	No response
4×99	44	39	16	1
945×1000	38	31	31	
$40\overline{)2800}$	31	45	23	1

Hoofdrekenen in de Verenigde Staten

Hoofdrekenen vereist (korte) dagelijkse oefening, inzichtelijke onderbouwing van de rekenoperaties, gevarieerde inkleding van opgaven en spelvormen. Individuele verschillen dienen geaccepteerd en benut te worden, dus indien het precieze berekenen niet lukt zouden (aanvankelijk) ook schattingen geaccepteerd moeten worden in bepaalde gevallen. Zie voor een voorbeeld van een opgavenserie de volgende wedstrijdvorm.

Twee leerlingen kunnen kiezen tussen rekenen uit het hoofd of gebruik maken van de zakrekenmachine. Wie het eerst het goede antwoord heeft, krijgt een punt.

$4 \times 9 \times 25 =$
$40 \times 50 =$
$48 + 52 =$
$1001 - 2 =$
$10 \times f\ 7{,}20 =$
$8 \times 7 \times 5 \times 0 \times 6 =$
$10.000 \times 10.000 =$

Maar hoofdrekenen kan natuurlijk ook in toepassingsopgaven worden ingekleed. Een voorbeeld.

Vandaag (11-7-1987) wordt de elfde etappe van de Tour de France gereden van Poitiers naar Chaumeil over een afstand van 250 km. Het parkoers schijnt nogal slingerend te zijn. Onze tv-commentatoren zeggen dat er ongeveer 10.000 bochten zijn. Kan dat?

We beperken ons tot twee problemen die zich lenen voor nadenken en nabespreken, dus voor interactief onderwijs in hoofdrekenen.
Schattend rekenen staat tussen blind gissen en exact berekenen, tussen de getalsmatige gok en de numerieke precisie. Vanwege dit manco aan nauwkeurigheid werd het vroeger in het rekenonderwijs inferieur geacht aan het precieze rekenwerk. Ten onrechte, want zowel in het leven van alledag als binnen het vakgebied bekleedt schattend rekenen een belangrijke positie:

- schatten moet nogal eens omdat nu eenmaal geen exacte berekening te maken is;
- schatten volstaat soms omdat een benaderde uitkomst goed aan het gestelde doel voldoet;
- schatten valt vaak zoveel makkelijker uit te voeren en is daarbij goed te doorzien en te overzien;
- schatten is niet zelden zinvoller dan exact berekenen.

Schatten is met name zinvol als het gaat om het ruwweg bepalen van de uitkomst, het globaal controleren van de uitkomst qua juiste orde van grootte en indien met niet exact bepaalde gegevens of exact te bepalen gegevens gewerkt moet worden dan wel met ervaringsfeiten die men zelf moet opdiepen. Al deze aspecten zitten in het volgende probleem opgeslagen (knipsel).

De aldus verkregen klassering heeft wel enige tijd als schaduwklassement gefunctioneerd, maar is nooit in de officiële tabellen opgenomen. Toch is het wel eens aardig naar de gelijkschakelingsformule te kijken. Het kost nogal wat rekenwerk, laten we ons dus beperken tot Nederland. Dat heeft zo'n 14 miljoen inwoners, tegen de V.S. ruim drie miljard, twee honderd keer zoveel. De oppervlakte van Nederland is pakweg 40.000 vierkante meter, tegen de VS 33.000 vierkante *kilometer*, bijna duizend keer zoveel. Dit tegen elkaar afgewogen is de bevolkingscoëfficiënt van Nederland een vijfde van die der V.S.

Een kranteknipsel met 1, 2, 3, ... foutjes

Wat hier niet allemaal bij naar voren kan komen: Nederland is groter dan een paar voetbalvelden; wat bij de V.S. staat past beter bij Nederland; de relatie km^2–m^2 is verkeerd aangegeven. De wereldbevolking is vijf miljard, dus kan die drie miljard voor de V.S. niet kloppen...
De nadruk op deze twee aspecten van de basisvaardigheden – juist mede met het oog op het passende gebruik van de zakrekenmachine – valt het meeste op bij de eindtermen voor dit gebied.

Cijferen

Cijferen is rekenen-op-schrift dat op één bepaalde wijze gebeurt volgens de standaardmethode van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen 'onder elkaar'. De eindtermen betreffen deze rekenprocedures en de toepassingen ervan – niets nieuws dus. Maar wel is nieuw dat niet in alle gevallen iedere leerling de eindvorm van het algoritme zou hoeven te beheersen. Neem bijvoorbeeld het vermenigvuldigen van 62 × 45 via de opgave: 'Op iedere pagina van een album staan 45 zegels. Er staan 62 pagina's in het album. Hoeveel zegels bevat het?

62 × 45 =

(60×)		
10 × 45 = 450	45	45
10 × 45 = 450	60 ×	62 ×
10 × 45 = 450	2700	2700
10 × 45 = 450		90 +
10 × 45 = 450	45	2790
10 × 45 = 450	2 ×	
2700	90	
(2×)		
1 × 45 = 45	2700	
1 × 45 = 45	90 +	
90	2790	
2700		
90		
2790		
(a)	*(b)*	*(c)*

De berekening kan op grofweg drie manieren worden uitgevoerd: (a) via een 'lange' herhaalde optelling met happen van tien, (b) via het samennemen van tientallen apart en eenheden apart en (c) via het algoritme. Langs deze weg tekent zich ook een mogelijke leergang af van een geleidelijk toenemende verkorting van het rekenen. Het eindniveau zal bij (c) of in uitzonderingsgevallen bij (b) liggen, die laatste opening laat de eindterm-formulering betreffende vermenigvuldigen wel degelijk. Ook bij het delen kan men gefaseerd naar een eindalgoritme toewerken. Neem het volgende probleem:

'Er worden 1128 supporters vervoerd in bussen met 36 plaatsen. Hoeveel bussen zijn nodig?'

Dit vervoersprobleem zal in groep zes of zeven aanvankelijk globaal op de volgende drie manieren worden opgelost.

36/1128\		36/1128\		36/1128\	
360	10 bussen	720	20	1080	30
768		408		48	
360	10 bussen	360	10	36	1
408		48		12	
360	10 bussen	36	1		
48		12			
36	1 bus				
12					
(a)		(b)		(c)	

In deze drie oplossingen tekent zich tevens het abc van de leergang af. Het is de bedoeling dat alle leerlingen niveau (c) bereiken. Alleen komt de ene leerling sneller tot de gevraagde verkorting dan de andere. Maar ook als een kind (b) blijft steken kan niet beweerd worden dat deze geen staartdeling kan maken.

Overigens is het gestelde vervoersprobleem kenmerkend voor de aanpak van het cijferen die een geleidelijk voortschrijdende verkorting van het rekenen (cijferen) toelaat of beter stimuleert. Dit in tegenstelling

tot een opzet waarin van meet af aan – met betrekkelijk kleine getallen – op het eindalgoritme wordt aangestuurd; een werkwijze waarvoor de eindtermen uiteraard ook ruimte laten.
Met de vervoersaanpak wordt een concrete ondergrond voor het rekenen gelegd, waardoor de leerlingen aan de getallen en hun bewerkingen een reële betekenis kunnen geven. En ten tweede verbindt zo'n probleem vervolgens weer de uitkomst met de realiteit: men dient zich te realiseren dat het antwoord niet 31 maar 32 is, want de 'rest' moet tenslotte ook mee (in bus 32 of je kiest een andere goed gemotiveerde oplossing). Het gebruik van de zakrekenmachine verandert de noodzaak tot dit herinterpreteren van de uitkomst niet. En wellicht verrassend: de kinderen kiezen dan veel vaker een verkeerde oplossing (minder dan tien procent van de leerlingen maakt de opgave mèt de zakrekenmachine goed en de goedscore zònder de zakrekenmachine is dertig à veertig procent, zo blijkt uit het periodieke peilingsonderzoek van het Cito). Dit is overigens alleen maar een reden temeer om het gebruik van de zakrekenmachine ook in het cijferen te betrekken, zoals in de eindtermen nadrukkelijk geformuleerd wordt.

Verhoudingen en procenten

Verhoudingen dienen er allereerst toe om situaties visueel te vergelijken, bij bijvoorbeeld vergroten, verkleinen, modellen, afbeeldingen op schaal. Daar hoeft in principe geen getal aan te pas te komen.

Dit is een plaatje uit 'Alice in Wonderland'. Alice wisselt in dit boek steeds van grootte.
a. Schat de lengte van Alice in dit plaatje met de hond.
'Alice was zo klein in verhouding tot het hondje dat het er veel op leek of ze een spelletje deed met een karrepaard en ze was ieder ogenblik bang onder zijn poten vertrapt te worden.'
b. Klopt die vergelijking met mens en karrepaard?

Verhoudingen visueel

Verhoudingen dienen ook om situaties numeriek te vergelijken. Bijvoorbeeld waar sprake is van eerlijk verdelen, mengen, inwisselen en omzetten (munteenheden). Hierbij gaat het vooral om activiteiten waarin series gelijkwaardige verdelingen worden voortgebracht. Een voorbeeldopgave:

'Geef eens een serie tafelschikkingen met twee pizza's voor drie personen.'

Deze situatie kan als volgt genoteerd worden: $\frac{\boxed{2}}{3}$ twee pizza's op tafel en drie personen eromheen. Gelijkwaardige verdelingen ontstaan nu als het ware door tafeltjes tegen elkaar te schuiven.

$$\frac{\boxed{2}}{3}\ \frac{\boxed{2}}{3} \rightarrow \frac{4}{6}$$

$$\frac{\boxed{2}}{3}\ \frac{\boxed{2}}{3}\ \frac{\boxed{2}}{3} \rightarrow \frac{6}{9}$$

Een schematische weergave van dit proces levert een zogenoemde verhoudingstabel op:

2	4	6	8	10	12	14
3	6	9	12	15	18	21

Of een tweezijdige getallenlijn:

2	4	6	14
3	6	9	21

Met behulp van dergelijke schema's kan bijvoorbeeld het volgende vraagstuk opgelost worden. 'Waar krijgt men meer per persoon, aan het tafeltje waar twee pizza's worden verdeeld over drie personen, of waar vijf pizza's voor zeven personen zijn?'

2	......	14		5	10	15
5	......	21	<	7	14	21

Ook andere contextopgaven kunnen op deze wijzen opgelost worden.

In de Volkskrant van 1 juni 1987 stond:
'Met twee doelpunten bracht Willaarts zijn totaal op 24 in 26 wedstrijden, hetgeen gemiddeld beter is dan Ajacied Van Basten.
Van Basten scoorde 31 doelpunten in 33 wedstrijden.'
Heeft Willaarts inderdaad het beste gemiddelde, zoals de Volkskrant beweert?

Als derde bron voor verhoudingen fungeren met elkaar verbonden grootheden als prijs-gewicht, aantal-prijs, weg-tijd en afstand-bezinegebruik. Uiteraard kan de verhoudingstabel ook hier doelmatig worden ingezet. Een voorbeeld.

Karel rijdt van Amsterdam naar Parijs.
De afstand is 506 kilometer. Hij wil op z'n hoogst 6 uur over de rit doen.
Na 4 uur heeft hij 325 km gereden.
Moet hij de rest van de rit sneller gaan rijden of kan hij het rustiger aan gaan doen?

Procenten zijn bijzondere verhoudingen. Ook hier kan de verhoudingstabel een belangrijke rol vervullen bij het 'op honderd stellen'. Een voorbeeld:

'In een advertentie staat dat de prijs van een fiets nu 60 procent is van de oorspronkelijke prijs. Je kunt hem nu voor *f* 136,– kopen. Hoeveel kostte de fiets oorspronkelijk?'

Uit onderzoek blijkt dat vrijwel geen enkele leerling zo'n opgave goed maakt. Indien men hem echter met de verhoudingstabel maakt, moet toch een hogere score dan twee à vijf procent (!) haalbaar zijn.

60	100
136	?

Men kan terugrekenen naar tien of twintig procent en dan overspringen naar honderd...
Om echter misverstanden te vermijden: in de eindtermen wordt in dit verband slechts over elementaire praktische procentberekeningen gesproken aan de hand van alledaagse situaties, dus is het zojuist gestelde probleem eigenlijk buiten de orde van het basisschoolprogramma. Veel van de oude procentsommen vallen derhalve af en worden vraagstukken over numeriek en visueel vergelijken. Het berekenen van de vierde evenredige (het vraagteken in het zojuist gegeven verhoudingsschema) komt daarbij wel degelijk aan de orde, maar dan wel in natuurlijke probleemstellingen. Oude typen vraagstukken van 'a:b=2:5; a+b=35; a=?' en allerlei varianten daarvan, waarbij a−b of 2a+b zijn gegeven, staan niet meer op het programma. Verhoudingen en procenten worden kortom veel sterker verbonden met de realiteit. Bij de berekeningen worden schema's en modellen gebruikt als die van de tafelschikkingen, verhoudingstabellen, tweezijdige getallenlijnen en verhoudingsblokken van vier (met één open plaats). Ook op dit terrein kan de zakrekenmachine desgewenst weer worden ingezet – dit om een verstandig gebruik ervan te bevorderen. De relatie tussen procenten en kommagetallen komt daarbij nadrukkelijk naar voren, en trouwens met breuken in het algemeen.

Breuken en kommagetallen

Historisch bezien zijn breuken verbonden met eerlijk verdelen en meten. In de bijna 4000 jaar oude Egyptische papyrus Rhind staat de volgende opgave: 'Acht broden verdelen onder tien mannen. Hoeveel krijgt ieder?' Het antwoord op deze vraag werd via herhaald halveren gevonden. De tiendelige breuken werden geconstrueerd om eenheid in het rekenen met maten, gewichten en prijzen te scheppen.

In het breukenonderwijs kon men tot voor kort deze concrete herkomst van de breuken, via eerlijk verdelen en meten dus, nauwelijks terugvinden. Eerst een enkele opmerking over eerlijk verdelen. Neem bijvoorbeeld het eerder genoemde probleem van twee pizza's voor drie personen $\frac{\boxed{2}}{3}$. Indien men naar de uitkomst per persoon vraagt verschijnen de breuken. Eerst één pizza verdelen, dan krijgt ieder $\frac{1}{3}$ en bij de tweede ook ieder weer $\frac{1}{3}$, dus totaal $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ dus $\frac{2}{3}$ (alleen ontwikkelt deze taal zich geleidelijker dan dit 'dus' suggereert). Door eerlijk verdelen ontstaan breuken, leren de kinderen de breukentaal, verwerven ze inzicht in de relatie $\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ en dergelijke, en krijgen zicht op de gelijkwaardigheid van breuken, bijvoorbeeld $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ via de verhoudingstabel. Voor het leren opereren is de verbinding met meten van essentieel belang. Neem bijvoorbeeld $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ als resultaat van de verdeling van een reep chocola. Door nu een prijs aan die reep toe te kennen – zeg zes gulden – kan als volgt geredeneerd worden om $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ uit te rekenen. Een halve reep kost drie gulden, een derde reep twee gulden. Samen is dit vijf gulden, dus $\frac{5}{6}$ van de oorspronkelijke prijs.
Conclusie: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.
Een vergelijkbare redenering kan worden toegepast bij het aftrekken, vermenigvuldigen en delen van breuken:

* $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ voert via $3-2=1$ (gulden) naar $\frac{1}{6}$
* $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ voert via $\frac{1}{2}\times 2=1$ (de helft van $\frac{1}{3}$ reep) naar $\frac{1}{6}$
* en $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ via $3:2$ naar $1\frac{1}{2}$ ('hoeveel stukken van $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$, hoeveel porties van 2 in 3?')

Kort aangeduid zien we hier breukrekenen via een omweg van prijzen (of stukjes of andere passende grootheden).
Voorbeelden van opgaven die breuken in een reële context plaatsen zijn de volgende.

In een wijnglas gaat $\frac{1}{8}$ liter wijn.
a. Hoeveel glazen gaan er uit een fles van $\frac{3}{4}$ liter?
b. Kunnen zoveel glazen ook uit een fles van $\frac{7}{10}$ liter?

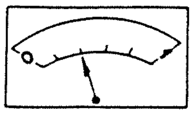
President Reagan van de Verenigde Staten van Noord-Amerika vond dat alleen met steun van een grote meerderheid van het Congres (de Tweede Kamer) de belastingen verhoogd zouden mogen worden.
Bij een 'grote meerderheid' dacht hij aan twee derde deel van de leden of aan drie vijfde deel.
Welke meerderheid van die twee is het grootst?

$\frac{1}{3}$ deel van de klas bestaat uit jongens en $\frac{3}{4}$ deel uit meisjes.
Kan dat?

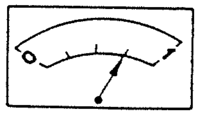
$\frac{3}{5}$ deel van de kinderen in de klas draagt een bril en $\frac{3}{4}$ van de kinderen in de klas loopt op sandalen. Kan dat?

Hoeveel liter zit er nog in elke benzinetank?

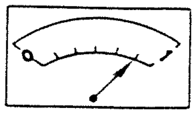
tankinhoud
40 liter



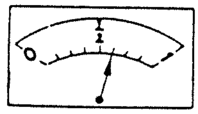
tankinhoud
60 liter



tankinhoud
30 liter



tankinhoud
40 liter



In een kookboek staat een recept voor uiensoep voor acht personen:

Recept (voor acht personen)
8 uien
1 liter water
4 aromablokjes
2 lepels boter
$\frac{1}{2}$ liter room

a. Wat heb je nodig om zulke uiensoep voor vier personen te maken?
b. Iemand maakt uiensoep volgens dit recept voor zes personen. Hoeveel room is ervoor nodig?

Iemand vertrekt met volle tank voor een lange autorit. Wanneer hij ongeveer twee derde van de afstand heeft gedaan, is de tank nog voor een kwart gevuld.
Redt hij het nog met de benzine die hij heeft of zal hij onderweg moeten bijtanken? Waarom?

Via deze vraagstukken krijgt men een indruk van wat bedoeld wordt met de volgende kernzin uit de eindtermennota: 'Het formele rekenen met breuken behoort slechts in afgeleide zin op de basisschool – afgeleid namelijk voorzover het voortspruit uit het reële breukrekenen dat wel uitdrukkelijk tot het basisgebied gerekend wordt.' Kommagetallen worden geïntroduceerd vanuit toepassingsproblemen over geld, gewicht en dergelijke, dus via meetgetallen. De regels voor het plaatsen van de komma bij het optellen en aftrekken is eenvoudig in te zien voor de leerlingen; impliciet gebruiken ze die vaak al bij het geldrekenen.
Voor vermenigvuldigen is dat anders. Via schatten kunnen ze deze regel leren hanteren.

Kies het goede antwoord.
Probeer het zo snel mogelijk te doen.

5 × 4,21 =	*1,01 × 5,80 =*	*35 × 0,41 =*
a. 2,105	a. 58,58	a. 0,1435
b. 21,05	b. 0,5858	b. 14,350
c. 210,5	c. 5,858	c. 143,5

Voor delen geldt iets dergelijks met het 'opblazen' van de getallen (verhoudingen) en staartdelen. Voorbeelden van enkele toepassingsproblemen.

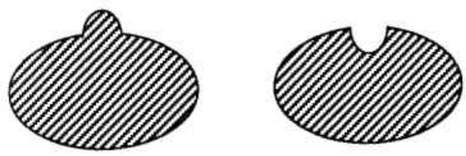
Gerrit meet de lengte van zijn kamer. Hij gebruikt daarbij een afgebroken meetlat die niet verder gaat dan 47 cm. Hij meet die lengte 12 keer af. De rest is nog 28 cm.
Hoe lang is die kamer ongeveer?

1 Franse franc = *f* 0,33.
a. De tol voor de autoroute kost 63 Franse francs. Hoeveel gulden is dat ongeveer?
b. Hoeveel francs krijg je ongeveer voor 250 gulden?

Een belangrijk algemeen einddoel in het gebied van de breuken en kommagetallen is het volgende: de leerling verwerft het inzicht dat het gelijknamig maken van breuken en het omzetten van breuken in kommagetallen of percentages in feite vormen zijn van een en dezelfde wiskundige methode.
Welnu, op de basisschool kan dit inzicht in behoorlijke mate worden aangezet, maar nog niet volledig worden afgerond. Hetzelfde geldt voor het formeel opereren met breuken en kommagetallen, los van een reële context.
Ziehier de algemene termen van de eindtermen 'breuken en kommagetallen' op de basisschool, met als consequentie dat het rekenen in dit gebied voortgezet wordt in het vervolgonderwijs.

Meten

Bij meten denken we aan grootheden als lengte, tijd en gewicht die met behulp van maateenheden getalsmatig zijn uit te drukken. Meten heeft tal van kanten. In het volgende zullen we die opnoemen – vrijwel de letterlijke tekst van de eindtermennota volgend – en ieder aspect met een voorbeeld illustreren.
Ten eerste moet voor iedere grootheid het maatbegrip worden ontwikkeld. Dit gebeurt meestal geleidelijk. Bij oppervlakte-meting bijvoorbeeld worden eerst oppervlakten vergeleken op het oog of via vergelijken door bedekken. Daar komt nog geen getal aan te pas. Vervolgens kunnen oppervlakten vergeleken worden door meten (wegen van uitgezaagde vormen, bijvoorbeeld) of tellen. Dat tellen hoeft nog niet via vierkantjes te gebeuren maar kan bijvoorbeeld ook door middel van een gelijkmatig stippenpatroon ('hoeveel bomen zijn er op dat eiland geplant?'). Pas op den duur verschijnen de vierkantjes. En veel verder liggen formules, metriek, maatverfijning. Dichtbij het begin daarentegen bevindt zich de relatie tussen oppervlakte en omtrek. Kinderen onderzoeken waarom het omvaren van een eiland (omtrek) geen goede maat is voor de grootte ervan. Je kunt namelijk twee eilanden tekenen die een even grote omtrek hebben maar duidelijk qua oppervlakte verschillen. Bijvoorbeeld de volgende.



Wij moeten hierbij bedenken dat de instrumentele meting op zich niet voldoende is of hoeft te zijn om de begripsontwikkeling te ondersteunen: aflezen van een wijzer is geen aanwijzing zonder meer naar wat eigenlijk gemeten wordt. Wat betekent het precies als de snelheidsmeter van de auto op honderd staat? We rijden dan weliswaar honderd kilometer per uur, maar dat is op dat moment zo en hoeft geen uur te duren ...

Ten tweede worden 'alledaagse' meetgetallen die betrekking hebben op leeftijd, snelheid, kosten, tijd, gewicht, temperatuur en dergelijke, als referentiemeter bij de leerlingen verankerd: hoe oud ben ik, hoe snel fiets ik, hoever woon ik van ..., hoe zwaar weeg ik, enzovoort. Zie de volgende opgave.

Sjoerd blijkt bij de sportkeuring 184,3 cm te zijn.
Drie jaar geleden was Sjoerd bij de keuring 168,7 cm.
a. Hoeveel is Sjoerd in de laatste drie jaar gegroeid?
b. Hoe oud zou Sjoerd ongeveer zijn?

Ten derde is de ontwikkeling van meetstrategieën inherent aan het meten. Met name ook het schatten is daarbij van cruciale betekenis. Enkele voorbeelden:

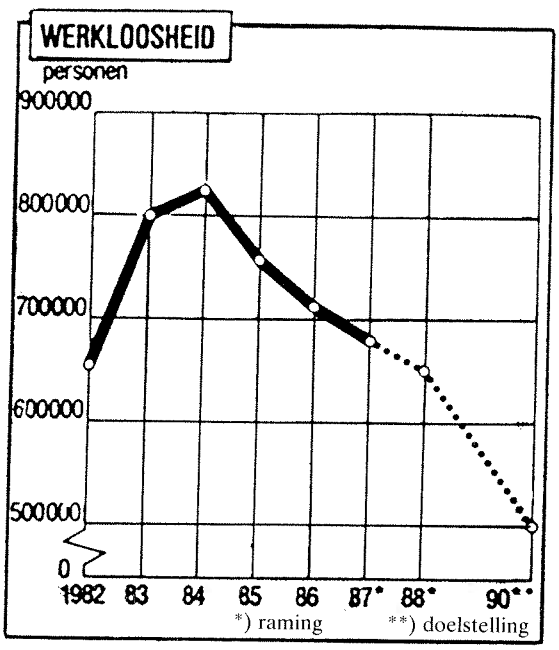
Op een autoweg (2 rijstroken) staat een file van 14 km.
Schat het aantal auto's in deze file. Laat je berekening zien.

Ten vierde dienen bij het meten de relaties tussen maten onderzocht te worden, zoals bijvoorbeeld de betrekkingen tussen afstand-tijd, aantal-gewicht, omtrek-oppervlakte. Van die laatste gaven we reeds een voorbeeld in het voorgaande.
Ten vijfde stelt het rekenen met meetgetallen bijzondere eisen aan de nauwkeurigheid van metingen en de manier waarop getallen worden afgerond. Een voorbeeld.

Jan heeft een kilometerteller op zijn fiets.
Hij stelt hem in op nul en rijdt langs het kanaal naar zijn vriend.
Daar staat 7,2 km op de teller.

Hij rijdt precies dezelfde weg langs het kanaal terug.
Dan staat er 14,5 km op de teller.
Hoe kan dit?

En tenslotte, ten zesde, hoort bij meten de verwerking van numerieke gegevens in tabellen en grafieken (staaf-, lijn- en cirkeldiagram) plus omgekeerd het interpreteren ervan. Een voorbeeld.



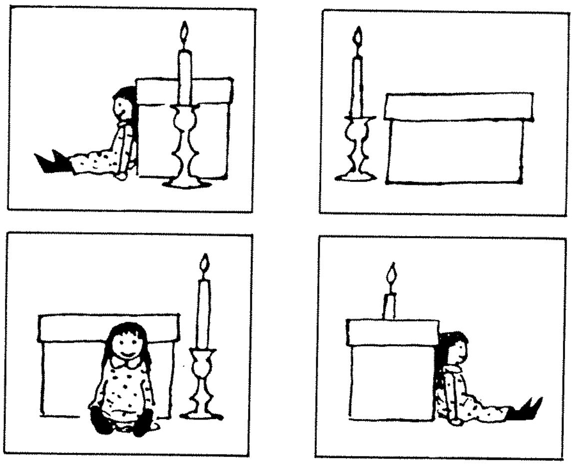
a. Hoeveel mensen zijn er in 1987 ongeveer zonder werk?
b. Hoeveel verwacht men dat er in 1990 nog werkloos zullen zijn?
c. In Nederland wonen 15 miljoen mensen. Hoeveel daarvan denk je dat er betaald werk hebben? Hoe heb je geredeneerd?

Algemeen geldt dat meten een natuurlijke toegang tot rekenen biedt, dat het allerlei modellen voor rekenen verschaft en contextproblemen oplevert die een breed terrein van toepassingen bestrijken. Meten maakt rekenen reëel.

Meetkunde

Meetkunde op de basisschool is vooral meetkundige wereldoriëntatie. In dit soort onderwijs worden vragen gesteld naar aanleiding van ruimtelijke ervaringen:
- Waarom worden schaduwen langer als je van de lantaarnpaal wegloopt en niet als je van de zon wegloopt?
- Hoe komt het dat de kerktoren achter de huizen wegzakt als je de stad nadert?
- Waarom verspringt je duim die je vlak bij de ogen houdt, als je afwisselend het ene en het andere oog dichtknijpt?

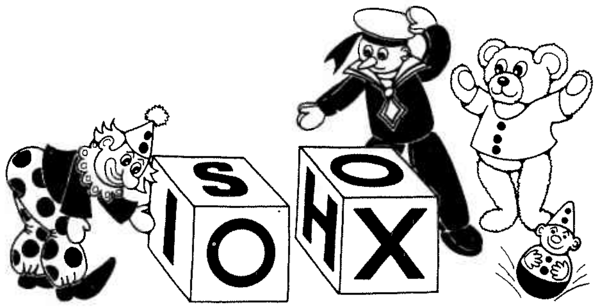
Deze vragen hebben betrekking op het aspect van het projecteren. Maar er zitten aan meetkunde nog tal van andere kanten. Bijvoorbeeld die van het oriënteren.



Kunnen dit foto's zijn van dezelfde situatie?

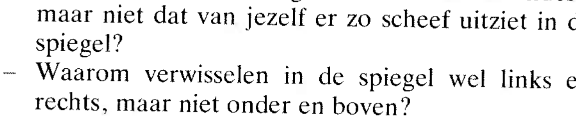
Vervolgens kan ook het ruimtelijke redeneren expliciet aan de orde worden gesteld. Bijvoorbeeld als volgt.

De beide kubussen die je hier ziet, zijn volkomen aan elkaar gelijk. Op de zijden staan de letters S, H, I, X, V en O.
Kun je nu uit de tekeningen opmaken welke letters tegenover elkaar staan?



Dan zijn er activiteiten die met transformeren te maken hebben (spiegelen, draaien onder andere). Alleen de spiegel al geeft aanleiding tot intrigerende probleemstellingen als:
- Hoe komt het dat het gezicht van iemand anders, maar niet dat van jezelf er zo scheef uitziet in de spiegel?
- Waarom verwisselen in de spiegel wel links en rechts, maar niet onder en boven?
- Waarom blijf ik precies in de (rechtstaande of hangende) passpiegel passen of ik nu voor- of achteruit loop?

Dan is er een groep van activiteiten die onder de term construeren te vatten zijn. Het gaat daarbij om het omvouwen van figuren, het maken van bouwplaten, tangramfiguren, het construeren van vlakke en ruimtelijke figuren. Een voorbeeld.



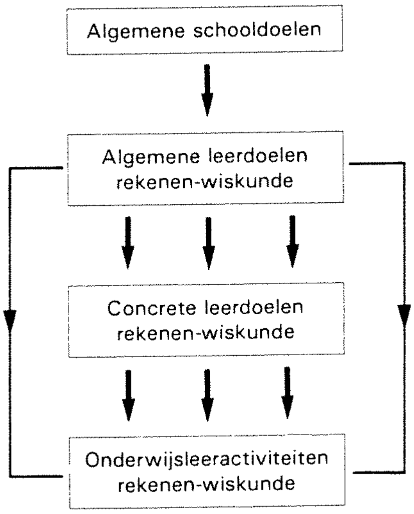
Maak zoveel mogelijk vierkuberhuisjes.

Bij deze vierkubers komen huisjes voor die sterk op elkaar lijken en toch niet hetzelfde zijn. Meetkundige activiteiten staan vaak niet op zichzelf maar integreren meetkunde met meten en rekenen, in het bijzonder verhoudingen.
Eerst worden bij dergelijk meetkundeonderwijs intuïtieve noties ontwikkeld. Later wordt hierop voortgebouwd en worden expliciete begrippen als punt, lijn, hoek, richting, symmetrie, spiegeling, driehoek, gelijkvormigheid ontwikkeld die een zekere samenhang bezitten waarop in het voortgezet onderwijs kan worden voortgebouwd.

Algemene doelstellingen

De concrete leerdoelen in de genoemde zes leerstofgebieden, met de accenten die in de inleiding samenvattend werden genoemd, dienen te worden bezien in het licht van de algemene doelen die permanent in het reken-wiskundeonderwijs worden nagestreefd.
De algemene doelen hebben betrekking op:
- de persoonlijke waarde;
- de voorbereidende waarde;
- de maatschappelijke waarde;
- de vakspecifieke waarde.

Deze vier waarden weerspiegelen zich in de algemene leerdoelen, welke de volgende aspecten betreffen: attitude, vaardigheid, praktisch nut, toepasbaarheid, taalaspect, structuuraspect, methodische kant en het ontwikkelingsaspect – acht algemene leerdoelen die we hier niet in detail formuleren.
De concrete doelen uit de zes leerstofdomeinen dienen in het kader van deze algemene leerdoelen te worden geplaatst. Worden de concrete leerdoelen te geïsoleerd beschouwd, dan loopt het onderwijs het risico te sterk leerdoel- of toetsgericht te worden, los van de algemene doelen.



Doelenschema

Dat betekent dat het te zeer gericht wordt op geïsoleerde trucs en oplossingsmethoden, iets waar Jan Ligthart zich ook al tegen verweerde. Maar dat er voor het overige heel wat sinds het begin van deze eeuw en ook sinds 1970 veranderd is of aan het veranderen is, hoeft na het voorgaande geen nadere toelichting. Het meest opvallende wellicht: de meetkunde die in 1889 werd afgeschaft, is weer terug! En wel in een totaal andere gedaante dan de vroegere vormleer. Net zoals trouwens rekenen en meten een andere inhoud krijgen.

Literatuur

Uitgebreide informatie treft men aan:
1. SLO-eindtermen special in 'Willem Bartjens', jrg 8 nr 1 (1988).
2. Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs: *Proeve van een nationaal programma*, (deel I), Zwijsen, Tilburg 1989 (in druk).