Andere didactiek, andere courseware

K.P.E. Gravemeijer
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Aan de hand van een voorbeeld op het gebied van het breukrekenen wordt aangetoond dat de realistische didactiek courseware vraagt, die wezenlijk verschilt van de 'drill-and-practice'-programma's die voor het traditionele rekenonderwijs ontwikkeld worden.

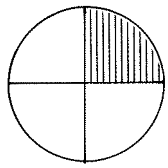
De traditionele didactiek waar de meeste courseware op gebaseerd is, kenmerkt zich door de didactische drieslag instructie, verwerking, evaluatie. De instructie kan al dan niet inzichtelijk zijn en het verwerken blijft vaak beperkt tot oefenen. Soms omvat het verwerken ook toepassingssituaties, vaak ook komen die veel later aan bod. De informatiestroom in dit onderwijsleerproces heeft sterk het karakter van éénrichtingverkeer. De leerkracht weet precies hoe het zit, de leerkracht bepaalt ook hoe de leerling de voorkomende problemen moet aanpakken en de leerkracht beoordeelt wanneer de prestaties van de leerlingen voldoen aan de eisen. Wanneer het rekenen in zo'n starre didactiek wordt ingepast, kan de rol van de leerkracht goed door een computer overgenomen worden.

Voor het rekengebied kan de computer gemakkelijk opgaven genereren. Ook het controleren van ingetypte antwoorden en het geven van voorgeprogrammeerde feedback, geeft weinig problemen. In de concrete onderwijssituatie heeft de computer volgens velen zelfs een voorsprong op de leerkracht. De computer reageert direct op de gemaakte fouten, de computer is geduldig, enzovoort. De meeste 'drill-and-practice'-programma's sluiten perfect aan bij deze rekendidactiek. We moeten er echter wel voor gaan waken dat we onze didactiek aan gaan passen aan deze 'drill-and-practice'-voorbeelden. Een andere didactiek vraagt toch ook een ander soort programma's.

Als voorbeeld van een andersoortig programma bespreken we een computerprogramma dat gebaseerd is op de realistische breukendidactiek zoals die door Streefland ontwikkeld is. Eerst bespreken we daartoe de nieuwe breukendidactiek. De breuken dienen daarmee tevens als voorbeeld voor de specifieke kenmerken van de realistische benadering. Vervolgens beschrijven we het computerprogramma en aan de hand daarvan gaan we in op de wijze waarop de realistische didactiek in dit programma doorklinkt.

Breuken als voorbeeld

Traditioneel worden breuken ingeleid met het verdelen van taarten. De stambreuk wordt gedefiniëerd als het éénzoveelste deel van het geheel:



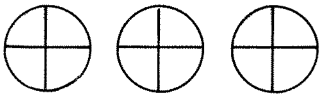
elk part is éénvierde deel.
Dan volgen de tellers ongelijk aan één: drie stukjes van éénvierde noemen we drievierde. De begrippen teller en noemer worden ook expliciet aangeleerd, om de boel uit elkaar te houden en om de regels te kunnen formuleren. De rekenregels en de verschillende breukenweetjes worden als geïsoleerde feitjes geleerd. Dit kan ertoe leiden dat de leerlingen niet weten wat $\frac{3}{4} \times 20$ te maken heeft met $\frac{3}{4}$ van 20. Dat $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ gezien kan worden als de helft van een half, ligt dan buiten hun bereik. Vaak weten ze ook niet dat $3:4 = \frac{3}{4}$. In de realistische breukendidactiek die Streefland ontwikkelde vormt dat juist de instap.

De breuken komen niet uit de lucht vallen, maar ontstaan in 'breuken voortbrengende situaties' als:

► '3 pizza's verdelen onder 4 kinderen'.

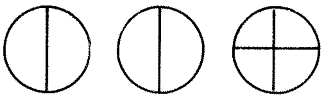
Oplossingen:

a. Eén voor één:



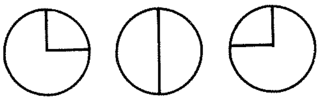
Ieder krijgt een kwart ($\frac{1}{4}$) (pizza) + (..) ($\frac{1}{4}$) (pizza) + (..) ($\frac{1}{4}$) (pizza) of $3 \times \frac{1}{4}$ (pizza) of $\frac{3}{4}$ (pizza).

b. Eerst twee daarna één:



Ieder krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

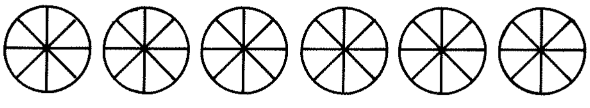
c. Alle drie tegelijk:



Twee kinderen krijgen $1 - \frac{1}{4}$, eentje krijgt $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ en eentje krijgt $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ etc.

► '6 pizza's verdelen onder 8 kinderen'.

Oplossingen:



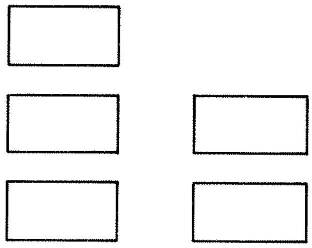
etc.

Breuken worden direct gekoppeld aan verhoudingen en verankerd in de ervaringswereld van kinderen. Zo wordt $\frac{3}{4}$ geassocieerd met drie-met-zijn-vieren. De gelijkwaardigheid tussen $\frac{3}{4}$ en $\frac{6}{8}$ steunt op:

– Inzicht in de vergelijkbaarheid van drie-met-zijn-vieren en zes-met-zijn-achten:
  Als er eerlijk verdeeld wordt krijg je in beide situaties evenveel, want acht kun je zien als twee groepjes van vier en dan kan elke groep drie pizza's verdelen;
– En op de kennis van het verdeelresultaat:
  In beide gevallen kun je ieder bijvoorbeeld eerst $\frac{1}{2}$ en dan nog $\frac{1}{4}$ geven; of, als je ieder $\frac{6}{8}$ gegeven hebt kun je de stukjes bij elkaar leggen en opvatten als drie keer $\frac{1}{4}$.

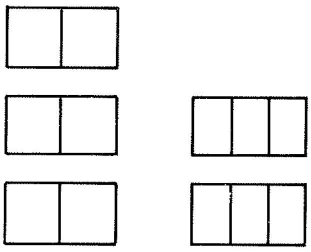
In de verdeelmethoden die hierbij aan de orde komen kunnen we onderscheid maken tussen 'handig verdelen' en 'uitgebreid verdelen'. Bij drie-met-zijn-vieren eerst ieder $\frac{1}{2}$ en dan nog $\frac{1}{4}$ noemen we handig. Gewoon alle pizza's in vieren delen noemen we uitgebreid verdelen.
Neem bijvoorbeeld de volgende situatie.

Marco vraagt of zijn vriendje Pim mag blijven eten.
Moeder vindt het goed, maar dan is er wel één kaassoufflé te weinig.
Hoe verdeel je vijf kaassoufflés over zes personen.



In de realiteit zal vrijwel niemand elke kaassoufflé in zessen delen om vervolgens ieder vijf stukjes te geven. Er zijn twee veel voor de hand liggende manieren:

– vijf personen krijgen een hele soufflé, maar ieder moet een stukje aan de zesde persoon geven;
– eerst geef je ieder een zo groot mogelijk stuk, daarna verdeel je de rest: eerst worden er drie soufflés gehalveerd, daarna worden de overblijvende twee elk in drieën gedeeld.



Als je je bij de laatste aanpak realiseert dat ieder $\frac{5}{6}$ zou moeten krijgen, kun je aflezen dat $\frac{5}{6}$ gelijk is aan $\frac{1}{2}$ plus $\frac{1}{3}$. Binnen de gegeven context is dat echter niet zo waarschijnlijk en in het begin van de leergang krijgen de oplossingen van het type $a:b \rightarrow \frac{a}{b}$ geen speciale nadruk – het is gewoon één van de oplossingen. Wanneer we het uitgebreide verdelen nu een speciale status geven kunnen er nieuwe breukenrelaties ontdekt worden door het handige en het uitgebreide verdelen aan elkaar te koppelen.

Streefland gebruikt een verhaaltje over een klein Frans restaurantje om het uitgebreide verdelen een herkenbare status te geven. Het kleine Franse restaurantje heeft maar één klein oventje waar maar één pizza inpast. Dus ook als je met een groot gezelschap bent worden de pizza's één voor één opgediend. Elke pizza wordt onder alle tafelgenoten verdeeld om te voorkomen dat de pizza's koud worden. En de modelsituatie voor het uitgebreide verdelen is geboren. Streefland noemt het 'Frans verdelen', een aanduiding die zekere meerwaarde heeft boven de hierboven gebezigde omschrijving 'uitgebreid verdelen' omdat de situatie van het kleine restaurantje zo steeds weer in herinnering geroepen wordt.

Omgekeerd kan nu bij elke breuk een verdeelsituatie opgeroepen worden:
$\frac{5}{6}$ is het resultaat van Frans verdelen van vijf-met-zijn-zessen;
$\frac{9}{4}$ is het resultaat van het Frans verdelen van negen-met-zijn-vieren; enzovoort.
Merk op dat je in het laatste geval met verdelen normaliter nooit op $\frac{9}{4}$ uitkomt, maar op $2\frac{1}{4}$. Blijkbaar

wordt een samengesteld getal veel gemakkelijker door een natuurlijke situatie voortgebracht dan een onechte breuk.

Met het expliciet maken van de relatie breuk-deling ($\frac{3}{4}$ is het resultaat van drie-met-zijn-vieren) is de weg geopend voor het bedenken van 'schuilnamen' bij breuken.
Zo zagen we dat $\frac{3}{4}$ via drie-met-zijn-vieren schuil kan gaan achter:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
$3 \times \frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$1-\frac{1}{4}$

Deze formules worden schuilnamen genoemd. Het zijn beschrijvingen waar de desbetreffende breuk achter schuilgaat. De schuilnamen gebruikt Streefland als een situatie waarbinnen de leerlingen op onderzoek gaan naar relaties tussen breuken. Anders dan in de traditionele breukendidactiek wordt er geen vaste set sommen in een vaste volgorde doorgewerkt, maar worden de sommen door de leerlingen zelf geproduceerd.

De vraag naar de schuilnamen van $\frac{3}{4}$ komt neer op de vraag: bedenk zoveel mogelijk sommen waar $\frac{3}{4}$ uitkomt. In eerste instantie worden deze sommen gevonden door de verdeling op verschillende manieren uit te voeren.
Als de handige verdeelmethoden uitgeput zijn moeten nieuwe bronnen aangeboord worden om het aantal schuilnamen uit te breiden. Een eerste ingang vormen de gelijkwaardige breuken. Zo zijn de schuilnamen van $\frac{6}{8}$ ook schuilnamen van $\frac{3}{4}$. Naast de al gevonden schuilnamen levert dit:

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$
$6 \times \frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}+\frac{2}{8}$
$1-\frac{2}{8}$
$\frac{5}{8}+\frac{1}{8}$
enzovoort.

Dit levert niet alleen aardig wat nieuwe schuilnamen op, er kan ook een nieuwe relatie ontdekt worden. We zien dat $3 \times \frac{1}{4} = 6 \times \frac{1}{8}$. Een relatie die veralgemeniseerd kan worden als 'twee keer zoveel stukjes die twee keer zo klein zijn'.
Met het inzetten van dit type relaties kunnen de leerlingen de monografie van schuilnamen van een bepaalde breuk uitbreiden met oplossingen die de concrete verdeelsituatie overstijgen. In de proefklas leverde een inventarisatie van schuilnamen van $\frac{5}{6}$ dan ook oplossingen als:

$5 \times \frac{1}{6}$
$10 \times \frac{1}{12}$
$20 \times \frac{1}{24}$.

Een volgende stap is het creëren van schuilnamen op puur symbolisch niveau. Hier kan het 'Franse' verdelen als startpunt gebruikt worden:

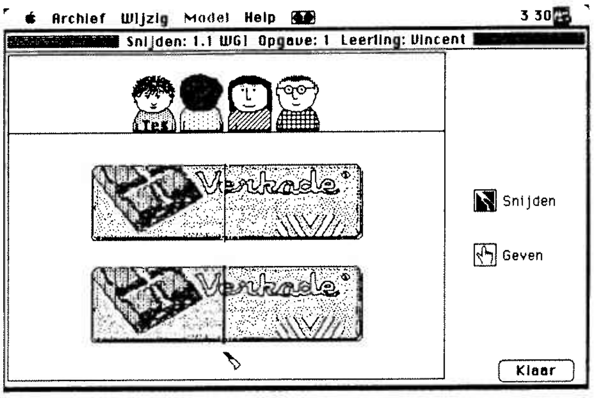
$$\frac{5}{6}=\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}=5 \times \frac{1}{6}=\frac{1}{6} \times 5$$
$$=1 \times \frac{5}{6}=\frac{5}{6} \times 1$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$
$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ enzovoort.}$$

Via de schuilnamen ontdekken de leerlingen niet alleen relaties tussen breuken die zich als weetjes kunnen vastzetten (zoals: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$ en $2 \times \frac{3}{4}=1\frac{1}{2}$ en dergelijke). De leerlingen ontdekken ook meer algemene regels en samenhangen. Dit type ontdekking wordt ondersteund en uitgebreid in andere didactische settings waar mooie namen voor bedacht zijn als 'tafelschikkingen', 'rekenen met een bemiddelende grootheid' en 'het Land van Samen'. Het bestek van dit artikel laat een nadere toelichting op deze activiteiten helaas niet toe. We beperken ons hier tot de schuilnamen omdat die centraal staan in de courseware die we hierna beschrijven. Voor de totale leergang verwijzen we naar het proefschrift van Streefland [1].

Realistische courseware

Het computerprogramma 'Eerlijk verdelen' [2] dat we hierna beschrijven als voorbeeld van realistische courseware, is op dit moment nog in ontwikkeling. In het kader van het Informaticastimuleringsplan (INSP) is inmiddels een werkend prototype ontwikkeld, dat bestaat uit drie onderdelen. Het eerste deel toont concrete verdeelsituaties, waarin de verdeling tekenend wordt uitgevoerd.

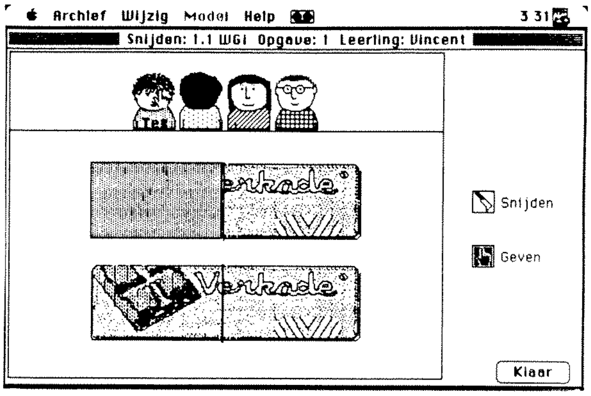
Op het scherm staan enkele iconen die de leerling met de muis van de computer kan besturen.
Met het mesje tekent de leerling de gewenste doorsnijdingen.



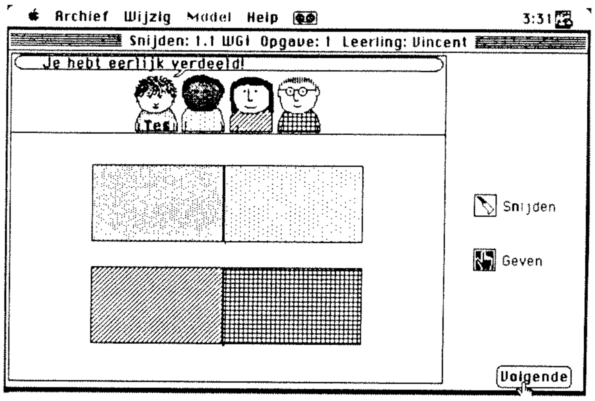
scherm 1

Hij gebruikt het handje om de verschillende stukken aan de afgebeelde kinderen toe te delen. (Zie scherm 2.)

Deze toekenning wordt door de computer zichtbaar gemaakt door het aangewezen stuk in te kleuren met het raster dat overeenstemt met het truitje van het kind. (Zie scherm 3.)



scherm 2

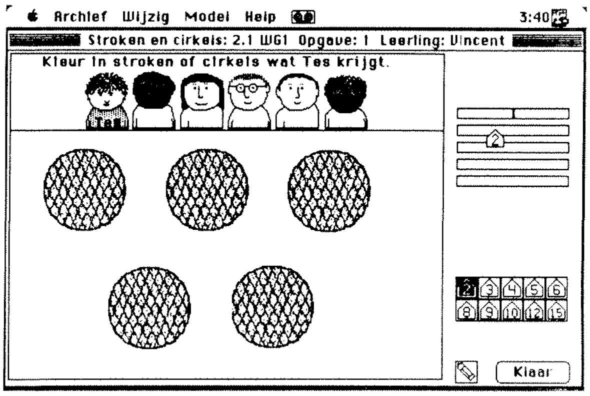


scherm 3

Als de leerling klaar is geeft het programma aan of de verdeling eerlijk is.

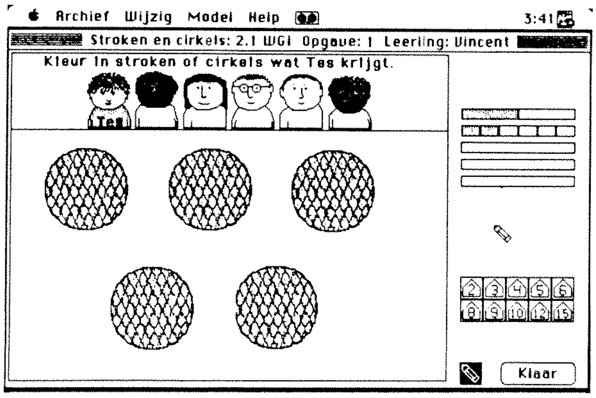
In het tweede deel kan de leerling in een model aangeven hoe de verdeling uitgevoerd moet worden, waarna de computer het tekenen en het toekennen voor zijn rekening neemt.
Er kan uit twee modellen gekozen worden: stroken en cirkels.
Via het werken met modellen verschuift de aandacht van het netjes uitvoeren van de verdeling naar het bedenken hoe je de verdeling aan zult pakken. Als het erom gaat aan te geven hoe je een bepaald verdelingsprobleem aan zou kunnen pakken, kun je volstaan met een klein schetsje. De modellen hebben hier een zelfde soort functie.

Met de genummerde 'hakkertjes' geeft de leerling bijvoorbeeld aan in hoeveel delen een bepaald stuk verdeeld moet worden.



scherm 4

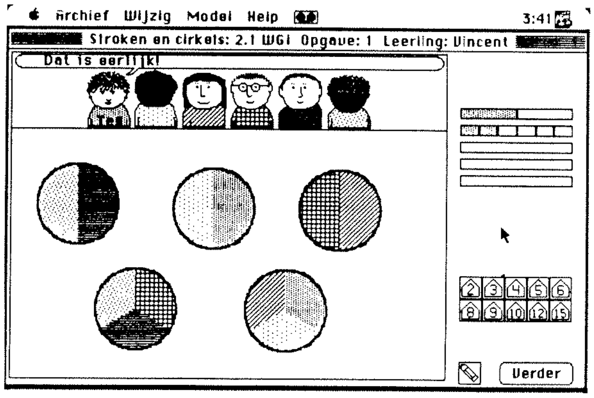
Het toekennen van een bepaald stuk aan één kind geschiedt door dit stuk met het 'kleurpotloodje' te kleuren.



scherm 5

In de huidige versie van het programma betekent dit, dat er alleen uniform verdeeld kan worden: als één kind $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{6}$ krijgt, krijgen alle kinderen $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{6}$. Dit blokkeert oplossingen als $\frac{3}{4}$ is $1-\frac{1}{4}$, omdat er dan ook een kind moet zijn dat $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ krijgt. Om dergelijke oplossingen ook mogelijk te maken zal er nog iets aan het programma veranderd moeten worden.

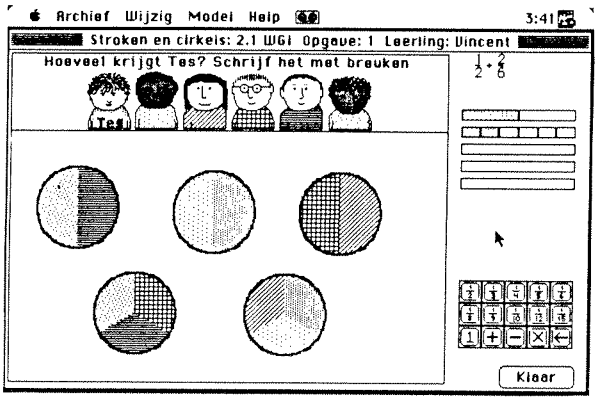
Wanneer de leerling tenslotte *klaar* aantikt, voert de computer de verdeling uit.



scherm 6

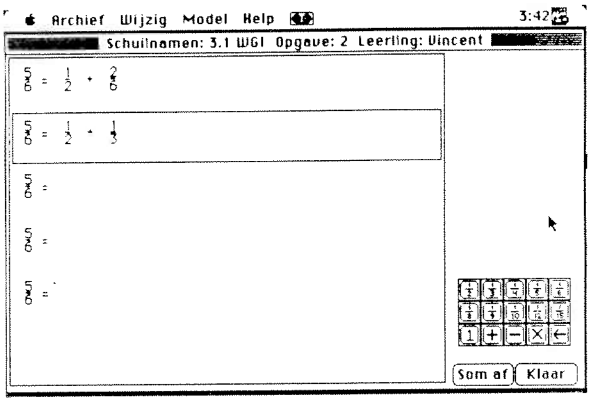
Wanneer de leerling de formele breuknotatie beheerst, kan het programma zo ingesteld worden dat de leerling ook gevraagd wordt de oplossing in breukentaal te noteren.

Op de breukenknopjes staan alleen stambreuken, maar door $\frac{1}{6}$ twee keer aan te klikken maak je $\frac{2}{6}$.



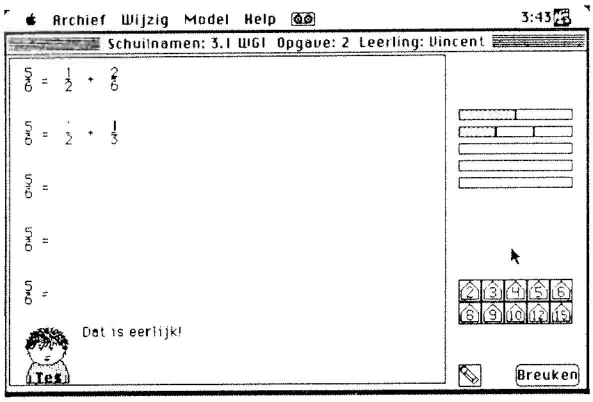
scherm 7

Het derde deel mikt op het bedenken van schuilnamen op symbolisch niveau. De opgaven worden formeel gepresenteerd en beantwoord.



scherm 8

Wanneer de leerling geen oplossing ziet kan een van de modellen uit het tweede deel opgeroepen worden.

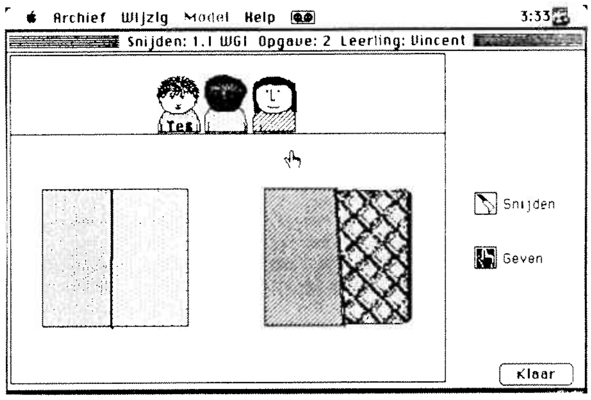


scherm 9

Andere courseware

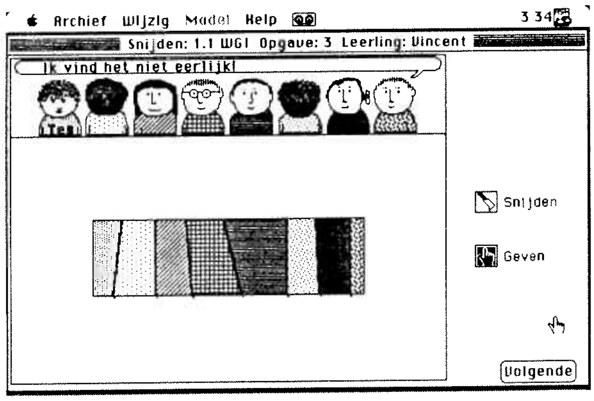
Waarin verschilt dit computerprogramma nu als 'realistische courseware' van de eerder genoemde 'drill & practice'-programma's?
Bij het maken van courseware speelt de gekozen didactiek op twee manieren mee: je probeert recht te doen aan de gekozen didactiek (1) en je probeert of je met een computerprogramma tegemoet kunt komen aan problemen die zich bij de desbetreffende benadering voordoen (2).

1. Consequenties van de didactiek
Kenmerkend aan de realistische breukendidactiek is het open karakter van deze benadering. Probleem oplossen, vrije exploratie en 'eigen produkties' zijn kernelementen in de leergang. De leerling wordt in deze benadering gezien als een onderzoeker van het breukengebied. Dit exploratieve karakter is bijvoorbeeld goed zichtbaar in het eerste deel, waar de leerling het snijden en het toekennen af kan wisselen. Zo kan de leerling bijvoorbeeld eerst ieder kind een groot stuk geven alvorens met delen verder te gaan.



scherm 10

Zo kan het handig verdelen ook maximaal uit de verf komen.
Het exploratieve karakter van het programma eist ook een andere feedback dan die welke in de 'drill-and-practice'-programma's gebruikelijk is. Hier past geen betweterige computer die zegt hoe je het moet doen. We willen de kinderen nu juist de keuze laten hoe ze iets doen.
Bij de exploratieve benadering past een computerprogramma dat laat zien wat de consequenties van een verdeelplan zijn. In deel één liggen het plannen en uitvoeren nog heel dicht bij elkaar. In deel twee staat het plannen centraal. En in deel drie wordt er geoogst op het niveau van de formele breuken.
De verdeelsituatie blijft het situatiemodel waar steeds op teruggegrepen kan worden. De feedback kan daarom summier blijven. In deel één kan de leerling aan de tekening al wel zien of de gekozen oplossing juist is. En als er ongelijk verdeeld wordt, is er wel een van de delers die zich beklaagt:

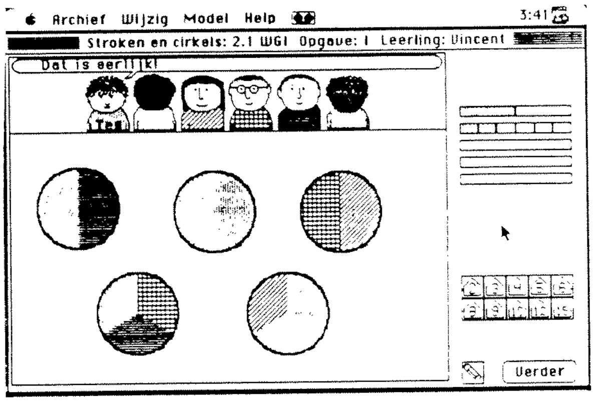


scherm 11

Bij deel twee vormt het verdelen door de computer de toets van het verdeelplan. (Zie scherm 12.)

In deel drie wordt er wel met goed/fout gereageerd als de leerling de lijst schuilnamen klaar heeft, maar daar wordt geen commentaar aan toegevoegd.

2. Verminderen van praktijkproblemen
Net als bij de 'drill-and-practice'-programma's vindt de inschakeling van de computer ook hier zijn rechtvaardiging in de gedachte dat daarmee aan bepaalde onderwijsproblemen tegemoet gekomen kan



scherm 12

worden. Hier gaat het om het volgende.
De 'eigen produkties' vormen een kernelement van de didactiek, maar deze variëren van leerling tot leerling. In klassikale nabesprekingen kan de leerkracht wel op de meeste oplossingen ingaan. Maar hoe houd je als leerkracht overzicht? Het nakijken en analyseren van alle individuele produkties kost veel meer tijd dan het nakijken van gewone sommen.
Controleren en analyseren of rubriceren zijn taken die je in principe door een computer kunt laten uitvoeren. Een analyse zou informatie op moeten leveren over de weetjes en de relaties die de leerling vlot kent.
We kunnen dit nagaan door te kijken welke weetjes regelmatig opduiken en welke nooit. En door te kijken naar de (vermoedelijk) gebruikte strategieën. De analyse richt zich vooralsnog vooral op de breuken die in de gekozen schuilnamen voorkomen. Zo kunnen we zien of de leerling kiest uit:

- breuken met dezelfde noemer als de gegeven breuk;
- breuken uit dezelfde breukenfamilie, met families als die van $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ en die van $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $(\frac{1}{9})$, $\frac{1}{12}$;
- breuken uit verschillende families.

Voor het bedenken dat $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ een schuilnaam voor $\frac{5}{6}$ kan zijn, komt tenslotte wat meer kijken dan voor een schuilnaam als $\frac{4}{6}+\frac{1}{6}$.

Op basis van de gekozen breuken kunnen we ook iets zeggen over de oplossingsstrategieën. Een analysemethode daarvoor hebben we echter nog niet uitgewerkt. Ook voor de concretere niveaus van het programma ontbreken de analyse-methoden nog.

Uiteindelijk is het de bedoeling dat het programma de leerkracht informeert over mogelijke eenzijdigheden en fouten van de leerling. De leerkracht kan dan proberen de leerling op het spoor te zetten van andere oplossingsstrategieën. Dat kan in een één-één contact, maar dat kan ook, of juist bij voorkeur, door middel van klassegesprekken waar de leerlingen contextproblemen oplossen, oplossingen aan elkaar uitleggen en elkaars oplossingen bespreken.

Ook in die zin verschilt dit programma van veel 'drill-and-practice'-programma's. Het programma is niet leerkracht-vervangend en er zijn ook tussentijdse interventies noodzakelijk. Het werken met 'eerlijk verdelen' dient in het gewone breukenonderwijs ingepast te worden. Enerzijds vormt het programma een aanvulling op het werken in de klas, anderzijds moet het programma met klassikale activiteiten aangevuld worden. Zo wordt het Franse verdelen niet in het programma uitgelegd, en ook het schuilnamen-idee wordt niet toegelicht. Dit soort zaken kan veel beter in een gewone les aan de orde gesteld worden.

Het gebruik van de computer is tenslotte geen doel op zich, de computer moet alleen daar ingezet worden waar er van een zekere toegevoegde waarde sprake is. Bij 'Eerlijk Verdelen' is dat een vorm van geleide exploratie. Omdat de computer de consequenties van een gekozen oplossing doorrekent op het niveau van de concrete verdeling, wordt de leerling alle vrijheid gelaten in de te volgen oplossingsprocedure. Enerzijds kan de leerling zo een probleem-benadering ontwikkelen die we kunnen kenschetsen als 'gericht proberen', anderzijds doet de leerling specifieke kennis op door het ontdekken en gebruiken van getalrelaties en handige verdeelstrategieën.

Literatuur

[1] Streefland, L.: *Realistisch breukenonderwijs*, (proefschrift), OW&OC, Utrecht, 1988.
[2] Het programma *'Eerlijk Verdelen'* wordt binnen de vakgroep OW&OC ontwikkeld door Frans van Galen, Koeno Gravemeijer, Vincent Jonker en Johan Zuidema. Het programma wordt ontwikkeld op een Apple Macintosh, in de toekomst kan het programma overgezet worden op NIVO-machines.