

# Cyclograaf, een computerversie van de spirograaf

E. Kamerich/L. van Schalkwijk

Faculteit Wiskunde en Informatica, KU Nijmegen

## Samenvatting

*De mechanische spirograaf levert prachtige hypocycloïden, maar het kost veel tijd en precies tekenwerk. Achterliggende wiskundige ideeën komen nauwelijks aan bod. Dat ligt heel anders bij de computersimulatie van de spirograaf.*

Velen onder u zullen van vroeger de spirograaf kennen: een set tandwielen, enkele grote en een heel stel kleinere. Door een groot wiel op een stuk papier vast te houden, een pen in een gaatje in een klein wiel te steken en dit wiel aan de binnenkant van dat grote wiel af te wentelen krijg je krommen, zogenaamde hypocycloïden, waarmee je prachtige plaatjes kunt maken, vooral als je in hetzelfde plaatje goed gekozen hypocycloïden over elkaar heen tekent.

Aan dit spel zitten enkele wiskundige aspecten: kun je uit de aantallen tandjes van het grote en het kleine wiel berekenen, hoe vaak je rond moet gaan om een gesloten kromme te krijgen, en kun je uit die aantallen ook berekenen wat de symmetrie van die kromme is? Ggd en kgv spelen bij de antwoorden van die vragen een essentiële rol. Bij de oude, mechanische spirograaf kwamen die zaken doorgaans niet uit de verf door het tijdrovende en moeizame tekenwerk. Een computersimulatie kan veel sneller werken en bovendien uitgebreidere tekenmogelijkheden bieden.

Dit idee heeft geleid tot een project aan de lerarenopleiding (UNILO) van de Katholieke Universiteit Nijmegen onder leiding van L. van Schalkwijk, waarin een computersimulatie is gemaakt door E. Kamerich en een bijbehorend leerlingenwerkschrift door W. Caspers.

Het computerprogramma biedt eenvoudig te bedienen commando's voor het wijzigen van de parameters, het uitvegen van tekeningen of terugroepen ervan, het wel of niet tonen van de kleine cirkel bij het tekenproces, enzovoort. Geleid door het werkschrift leren de leerlingen stap voor stap de mogelijkheden van het programma kennen, gaan op zoek naar de onderliggende wiskunde en leren spelenderwijs wat met hoeken en hoekmaten omgaan.

De motivatie is sterk: de leerlingen willen graag mooie plaatjes maken. Die uitdaging brengt leerlingen tot eigen initiatief. Al snel wordt dan duidelijk dat lukraak proberen tot weinig bevredigende plaatjes leidt; ze willen 'ontwerpen' wat voor guirlandes toegevoegd zouden moeten worden en dan krijgen ze vanzelf het probleem: hoe maken we zo iets, welke parameters moeten we kiezen? Dank zij de computer is snel te zien of de gemaakte keuze inderdaad het verwachte resultaat oplevert; zo nee, dan moet er verder nagedacht worden. Gelukkig biedt het programma de mogelijkheid de laatste toevoeging uit te vegen door het vorige plaatje terug te roepen.

Het beheersen van de rekenkundige/wiskundige achtergrond komt telkens goed van pas. De kern van het uiteindelijke inzicht is:

het produkt van  
het aantal keren dat de kleine cirkel de grote cirkel doorloopt tot de figuur gesloten is en  
de omtrek van de grote cirkel  
is gelijk aan het produkt van  
het aantal lussen/bogen van de figuur en  
de omtrek van de kleine cirkel.

Voordat leerlingen aan een dergelijk algemeen inzicht toe zijn krijgen ze problemen zoals:

De omtrek van de grote cirkel is 140; de omtrek van de kleine cirkel is 60. Hoe vaak moet ik de kleine cirkel de grote laten doorlopen om een gesloten figuur te krijgen?

Daarbij blijken leerlingen soms tot leuke oplossingen te komen zoals:

'De kleine is 60, de grote is 140.

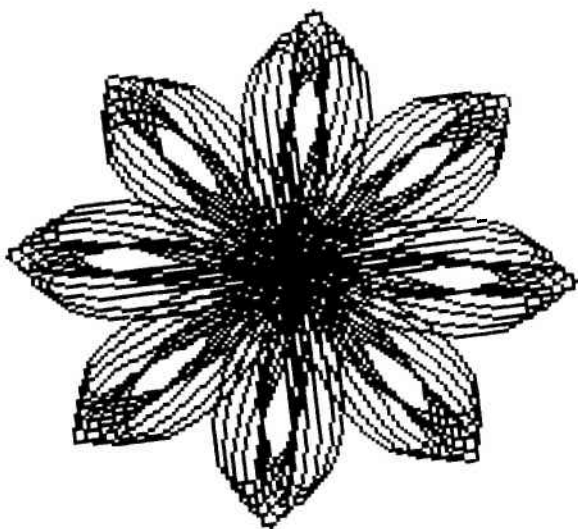
2 keer 60 is 120, rest 20.

60 gedeeld door 20 is 3, dus 3 keer rond.'

Het algoritme van Euclides in wording! Vraag aan de

leerling is dan natuurlijk wel of die methode altijd correct werkt, kortom of in te zien is dat dit een goede methode is.

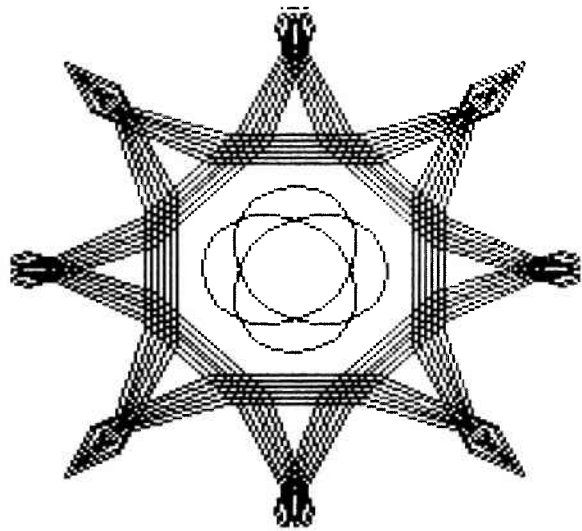
Bij het vormen van inzicht in bovengenoemde kern wordt gebruik gemaakt van het idee van de door de kleine cirkel langs de grote cirkel afgelegde afstand. Om het denken hierover te vergemakkelijken wordt in gedachten de grote cirkel uitgebogen tot een rechte lijn, zodat de kleine cirkel nu kan lopen op een (lange) rechte weg met paaltjes op vaste onderlinge afstand, die het beginpunt op de grote cirkel markeren. Vervolgens maken de leerlingen tabellen om systematisch bij elke keer dat de kleine cirkel over die weg weer een keer ronddraait, te kijken naar het aantal keren dat de tekenpen onderaan is geweest, de intussen afgelegde afstand en wel/niet terugkeren in 'uitgangspositie'. Vanuit dit systematisch onderzoeken wordt het bedoelde inzicht gekweekt.



Tenslotte komen er vragen zoals:

Er is een figuur met 9 lussen getekend. Het aantal keren rond moest (minstens) vier zijn om een gesloten figuur te krijgen. Wat voor waarden kunnen de omtrek van de grote cirkel en de omtrek van de kleine cirkel allemaal gehad hebben?

Aan het eind van de serie lessen krijgen leerlingen ruim de gelegenheid creatief zelf allerlei mooie plaatjes te laten groeien en die af te drukken op de matrixprinter om ze mee te nemen naar huis.



Het pakket 'Cyclograaf' is op dit moment in gebruik in studielessen van de brugklassen van het Elzendaalcollege in Boxmeer (havo/vwo), waar het tevens dient als een prettige eerste kennismaking met computers. Er worden ongeveer tien lessen aan besteed. De leerlingen werken in tweetallen het werkschrift door. Het blijkt dat ze er enthousiast aan werken van de eerste tot de laatste minuut van de les en vaak tot verrassende tekeningen komen.

Het werkschrift is bestemd voor brugklasleerlingen havo/vwo; we denken dat het programma met een aangepaste versie van het werkschrift ook geschikt zou zijn voor mavo/lts, maar zo'n versie is er (nog) niet.

Het pakket, bestaande uit het programma (op 5 1/4 inch floppy) en de leerlingentekst, is te bestellen (om deze voor de eigen school te reproduceren) door f 25,- over te maken op postgiro 1803523 van Kath. Universiteit/Dir. A-Fac., Postbus 9108, 6500 HK Nijmegen onder vermelding van 'UNILO CYCLOGRAAF'.