

Eerstegraads vergelijkingen met de computer

Ofwel: met LOSOP in de klas

D. Kok/H. Staal

Faculteit Wiskunde en Informatica, VU Amsterdam

Samenvatting

Tot op heden hebben 'onderwise' onderwerpen als letterrekenen en het oplossen van vergelijkingen de storm van didactische vernieuwingen weten te weerstaan: er waren (nog) geen redelijke alternatieven. De computer kan misschien een aanzet leveren tot een beter begrip.

Inleiding

Vernieuwing van het wiskundeonderwijs heeft de laatste jaren vooral plaatsgevonden door het invoeren van nieuw lesmateriaal. Er is veel aandacht besteed aan het onderwijzen van wiskunde vanuit niet-wiskundige contexten. De voordelen hiervan kunnen zijn dat beter zichtbaar wordt wat de zin is van wiskunde en dat leerlingen zelfstandiger aan het werk kunnen. Voor wiskundesecties die hun onderwijs in deze richting willen vernieuwen is er een schat aan materiaal en ideeën ontwikkeld door het IOWO en later OW&OC, door SLO en SIO. Overigens richtte deze ontwikkeling zich niet op alle onderdelen van de schoolwiskunde. Wat betreft ouderwetse onderwerpen als letterrekenen en oplossen van vergelijkingen, zijn we didactisch gezien niet veel verder gekomen dan dat we steeds beter kunnen verklaren waarom deze onderwerpen voor veel leerlingen ontoegankelijk zijn. Intussen blijft het zo, dat juist het wel of niet mee kunnen komen bij dit soort onderwerpen in grote mate bepalend is voor een succesvolle schoolcarrière.

In dit artikel willen we aangeven dat de computer mogelijkheden biedt om het onderwijs rond meer 'formele' wiskunde als het oplossen van eerstegraads vergelijkingen te verbeteren. Met het programma Losop [1] menen we hiervan een voorbeeld te kunnen geven.

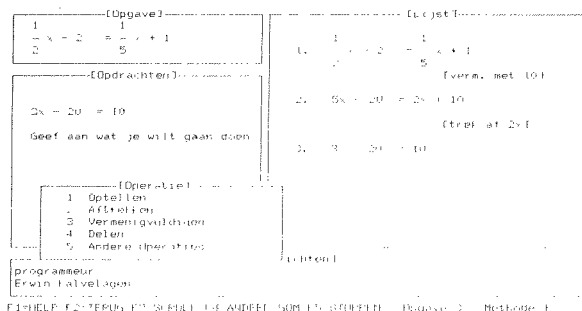
Losop biedt de leerling oefenmogelijkheden op het moment dat de leerling aan de slag gaat met het welbekende algoritme voor het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden.

We geven eerst een uiteenzetting over de mogelijkheden van het programma. Daarna zetten we nog eens een serie didactische problemen rond lineaire vergelijkingen op een rijtje.

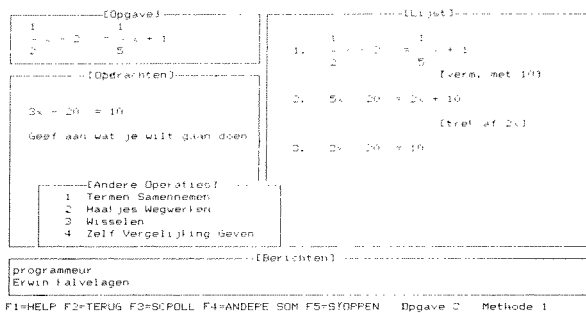
Tenslotte laten we zien wat Losop wel bij deze problemen te bieden heeft en wat niet.

Een korte beschrijving van LOSOP

Als een leerling werkt met Losop kan bijvoorbeeld het volgende scherm ontstaan:



De leerling kan kiezen uit één van de aangegeven operaties. De eerste vier spreken voor zichzelf. Onder 'Andere Operaties' zitten de volgende, meer ingewikkelde, operaties:



Losop kan van tevoren op drie manieren ingesteld worden. We duiden ze aan als methode 1, methode 2 en methode 3.

Bij methode 1 kan de leerling met het scherm hierboven verdergaan door bijvoorbeeld te kiezen: optellen. Op het scherm komt dan de vraag:

Wat wil je optellen?

De leerling kan nu een getal intypen. Op het scherm verschijnt dan het resultaat, dus de vergelijking:

$$3x = 30$$

als de leerling 20 optelt. Bij methode 1 kan de leerling zich dus helemaal concentreren op de vraag: hoe verander ik de vergelijking zo, dat ik dichterbij de oplossing kom. Ofwel, hoe krijg ik een vergelijking van de vorm $x = 10$. De computer doet het rekenwerk. Bij methode 2 gaat het anders vanaf het moment dat de leerling heeft ingetypt wat hij wil optellen. De leerling moet nu zelf de vergelijking geven die het resultaat is van deze operatie. De leerling doet hier dus ook het rekenwerk.

Bij methode 3 vervalt op het scherm het blokje 'operatie'. De leerling moet op eigen kracht en zonder enige bijsturing een volgende vergelijking invoeren. De computer controleert alleen nog maar of de nieuwe vergelijking gelijkwaardig is met de oorspronkelijke. Het onderdeel 'Ongelijkheden' is op een zelfde manier opgezet.

Problemen rond het oplossen van eerstegraads vergelijkingen

Als een leerling de vergelijking:

$$3(x+2)-8=7x-14$$

moet oplossen, dan zien we graag:

$3(x+2)-8=7x-14$	
$3x+6-8=7x-14$	stap 1
$3x-2=7x-14$	stap 2
$3x=7x-12$	stap 3
$-4x=-12$	stap 4
$x=3$	stap 5

Laten we deze stappen eens nader bekijken.

Stap 1

De leerling moet hier de distributieve eigenschap toepassen. Het probleem hierbij is dat de vorm $3(x+2)=3x+6$ uit het hoofdstuk over de distributieve eigenschap veel lijkt op een vergelijking.

In beide gevallen staat er een $=$ -teken met links en rechts iets met een letter erin. Het $=$ -teken moet hier echter anders opgevat worden en rond dat teken is toch al veel verwarring. Veel leerlingen kennen het 'is gelijk'-teken van de basisschool als het sein dat de som ophoudt en het antwoord begint. Op kladpapier werken ze een sommetje als:

$$6 \times 13 + 15 =$$

als volgt uit:

$$6 \times 13 = 78 + 15 = 93.$$

Pas als de docent toekijkt, schrijven ze:

$$6 \times 13 + 15 = 78 + 15 = 93$$

en dat alleen omdat die docent nou eenmaal zo graag wil dat 'alles telkens weer opgeschreven wordt'.

Bij een rijtje sommen over de distributieve eigenschap is het goed mogelijk goede antwoorden te produceren, ook al heb je dit beeld van het $=$ -teken. Pas bij een vergelijking loop je echt vast. Er komt nog bij dat de x een andere betekenis heeft. Bij de distributieve eigenschap mag je voor een letter elk getal invullen. Je doet immers een uitspraak over alle getallen tegelijk. Bij een vergelijking gaat het erom een speciaal getal te vinden dat we voorlopig schrijven als x . Het inzicht dat zelfs $3(x+2)=3x+6$ is op te vatten als een vergelijking en dan één met een opmerkelijke oplossingsverzameling, mag je hier nog niet van leerlingen verwachten.

Stap 2 en 3

Een leerkracht zegt: 'Links en rechts 2 optellen, je mag ook een ander getal nemen, maar dat is niet handig.' 'Je mag' betekent hier: je weet dat je dan dezelfde oplossing houdt, ook al ken je die nog niet. Drie dingen tegelijk die afzonderlijk al lastig genoeg zijn. Leerlingen onthouden meestal in eerste instantie de regel dat je ongestraft met die 2 en 14 iets kunt doen, terwijl die $3x$ en $7x$ gewoon blijven staan. Dit levert ze dan later problemen op als ze bij een vergelijking met breuken erin links en rechts met hetzelfde gaan vermenigvuldigen. Nu moeten ze wel elke term vermenigvuldigen. Met optellen hoeft je dus niet met elke term rekening te houden, maar met vermenigvuldigen wel. Als de docent verwijst naar (weer) de distributiviteit krijgt hij vaak het commentaar: 'Hier staan toch geen haakjes?' Met andere woorden: de distributieve eigenschap betekent voor leerlingen haakjes volgens de regels wegwerken. En niet: de distributieve eigenschap kun je gemakkelijk noteren door haakjes te gebruiken.

Veel leerlingen laten de uitleg voor wat die is en hanteren de regel dat je bij links en rechts optellen apart met de x -en en de termen zonder x werkt en dat je bij vermenigvuldigen meteen elke term te lijf gaat. De opmerkingen hierboven gelden in nog sterkere mate voor het links en rechts $7x$ aftrekken. Het tekort aan inzicht komt vaak aan het licht doordat een leerling uitkomt op $-4x=12$ in plaats van $-4x=-12$.

Een vaak gehoord argument: je moest 12 van $7x$ aftrekken. Die $7x$ verdwijnt, dus valt er niets meer af te trekken en houd ik 12 over.

Stap 4 en 5

Veel leerlingen blijven steken bij $-4x = -12$. De beste manier om hier verder te gaan is om je te realiseren wat hier nu eigenlijk staat: een eenvoudige vermenigvuldiging. Dat vereist een omschakeling, omdat je bij de vorige stappen alleen verder kwam met ingewikkelde manipulaties. Als leerling heb je het net afgeleerd om je 'boerenverstand' te gebruiken.

Samenvattend

Leerlingen hebben problemen met lineaire vergelijkingen. Dat komt omdat ze bij dit onderwerp voor het eerst al hun kennis over rekenen en algebra moeten toepassen in een geheel nieuwe situatie. Veel leerlingen beschikken slechts over een aantal half begrepen trucjes. Dit leidt vaak tot fouten en in een gunstig geval weet een leerling die fouten te voorkomen door zich nieuwe trucjes eigen te maken.

Een wat dieper inzicht in de algebra kan slechts langzaam groeien. Daar is veel voor nodig. Oefenen en vooral ook tussentijds terugkijken op hoe je een opgave hebt gedaan en waarom dit tot een goed of fout resultaat heeft geleid. Dit laatste doen leerlingen niet gauw uit zichzelf. Er is stimulans van de docent nodig. Die docent heeft echter ongeveer dertig leerlingen in de klas zitten. Dat leidt zeker bij dit onderwerp tot een veelheid en verscheidenheid aan fouten die voor de docent nauwelijks bij te benen zijn. Voor je het weet gaat een leerling 'sommen lang' door met een verkeerde methode.

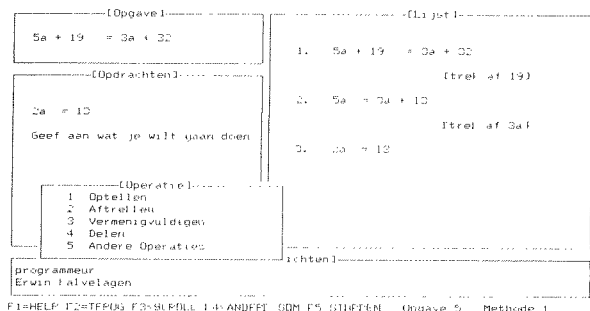
Juist wat dit laatste punt betreft kan het gebruik van Losop voordelen hebben. Ter toelichting hiervan eerst een voorbeeld.

Werken met LOSOP

Twee leerlingen in een tweede klas lbo werken met Losop. Er zijn al een paar lessen besteed aan vergelijkingen. Ze werken deze dag voor het eerst met dit programma. Ze doen de opgave:

$$5a + 19 = 3a + 32$$

met methode 1, dat wil zeggen, zij geven aan welke stap gezet moet worden, de computer zorgt voor de uitvoering van die stap. Na twee stappen is het volgende scherm verschenen:



Hoe verder met de vergelijking $2a = 13$?

De leerlingen besluiten dat er 2 afgetrokken moet worden. De computer geeft dan:

$$2a - 2 = 11$$

Dit wekt enige verbazing. Met de functie-toets F2 maken ze de laatste stap ongedaan en proberen het nu met 13 aftrekken. Dat levert:

$$2a - 13 = 0$$

Dit bevalt ook niet. Weer F2 en vervolgens worden nog geprobeerd: optellen van 2 en 13. Weer geen succes: ook die resultaten worden weer gewist. Dan volgt er een analyse: 'We moeten wel aftrekken maar dan zo min mogelijk.' Ze besluiten 1 af te trekken:

$$2a - 1 = 12$$

En dan komt de vraag: 'Waarom helpt dit allemaal niet?' Een begin van reflectie. Op dit moment besluit de docent in te grijpen. Hij helpt de leerlingen in te zien waarom je met optellen en aftrekken hier niet verder komt. De leerlingen besluiten dan tot 'delen door 2'. Zo loopt het toch nog goed af.

Vermoedelijk hadden deze leerlingen zonder Losop de opgave afgesloten met $a = 11$ en deze (foute) methode daarna toegepast op de volgende sommen. Nu dwong het programma ze tot een pas op de plaats zodat er reflectie kon plaatsvinden al of niet versterkt door de docent.

We zien als voordelen van het werken met Losop:

- De moeilijkheden worden gescheiden. Je kunt je helemaal richten op de te volgen strategie. De computer doet het rekenwerk.
- De leerling loopt vast in plaats van 'sommen lang' dezelfde fout te maken. Dit heeft als gevolg dat de leerling gedwongen wordt na te denken en eventueel de hulp inroept van de leerkracht.
- Doordat er veel op het scherm verschijnt, kan een docent goed volgen wat er gaande is en naar aanleiding daarvan adequate hulp bieden.
- Op grond van zijn waarnemingen kan de docent een zinvolle klassikale bespreking houden. Tijdens zo'n gesprek kan besproken worden: wanneer helpt optellen of aftrekken en wanneer vermenigvuldigen of delen en hoe komt dat? Leerlingen kunnen meedenken op grond van de zojuist opgedane ervaring.

Het belangrijkste voordeel van Losop lijkt ons dat het de leerling de mogelijkheid geeft om te experimenteren. Via 'trial and error' kan de leerling ontdekken welke aanpak tot resultaten leidt. In dat proces speelt het klasgesprek een essentiële rol.

Door de directe feedback die het programma geeft, hoeft klassikaal niet zoveel aandacht besteed te worden aan het in het schrift krijgen van foutloze oplossingen en controleren van huiswerk. Dit laatste kan de leerling zelf doen met de computer: met methode 3 kijken of het antwoord klopt en zondig met methode 1 stap voor stap nagaan waar het fout gegaan is.

De leraar kan de klassikale momenten benutten voor andere kwesties:

- Wat gebeurt er als je de haakjes wegwerkt?
- Bedenk een vergelijking die dezelfde oplossing heeft als $3p - 2 = p + 14$

- Wat betekent het dat 6 een oplossing is van de vergelijking $3x - 13 = x - 1$
- Waarom zijn de vergelijkingen $\frac{1}{3}x + 1 = 4$ en $x + 3 = 12$ gelijkwaardig?

Tot slot

Losop is ontwikkeld omdat we regelmatig van leraren te horen kregen dat er voor de onderbouw zo weinig bruikbare software was. Met name miste men de mogelijkheid de computer te gebruiken bij het ontwikkelen van inzichten en vaardigheden rond de traditionele schoolwiskunde. Hiertoe financieel in staat gesteld door het NIVO-project, hebben we samen met Erwin Kalvelagen een programma ontwikkeld waarmee leerlingen op inzichtelijke wijze leerden

eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden op te lossen. Vanaf het begin hebben we samengewerkt met leraren van lbo, mavo, havo en vwo. Zij ook hebben de definitieve vorm van het programma bepaald. We denken dat het ons gelukt is een voorbeeld te geven van computergebruik bij traditionele wiskunde, zonder daarbij in de valkuil van 'drill-and-practice' terecht te komen.

Literatuur

- [1] Kok, D. en E. Kalvelagen: (1989) *LOSOP, een programma voor het oplossen van eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden*, Wolters-Noordhoff, Groningen