Leerling en docent op onderzoek met de huiscomputer

F. van der Blij
OW & OC, RU Utrecht

Samenvatting

Eenvoudige PC's bieden prachtige mogelijkheden voor kleine onderzoeksprojecten. Vooral die, waarbij de mogelijkheden van een grafisch scherm optimaal worden benut, leveren zowel visueel als inhoudelijk verrassende ontdekkingen.

In dit artikel willen we een aantal suggesties voor kleine onderzoeksprojecten met eenvoudige computerapparatuur bespreken.
We geven alleen wiskundige probleemstellingen en aanwijzingen en zien af van voorbeeld-programma's. Maar zelfs in de eenvoudigste basic dialecten vragen de programma's maximaal 20 à 30 regels.
We zien af van het gebruik van random generatoren en gebruiken alleen de in het voortgezet onderwijs gangbare wiskundige vaardigheden. De eerste reeks voorbeelden zijn rekenvoorbeelden, bij de tweede reeks is een grafisch scherm nodig, men heeft een coördinaten-systeem op het scherm (van bijvoorbeeld tenminste $200*200$ pixels) en kan zowel op een bepaalde plaats een punt zetten als van het ene punt naar het andere punt een rechte lijn tekenen. Bij enkele voorbeelden geeft de mogelijkheid van een kleurenscherm extra zinvolle verrijkingen.
De meeste problemen hebben een open einde, veelal is er een nog onopgelost wiskundig probleem in verstopt.

Rekenvoorbeelden

De computer leent zich bij uitstek voor iteratieve processen. We beginnen met rijen van gehele getallen. Laat f een functie zijn, die aan een geheel getal weer een geheel getal toevoegt. De samenstelling van f met f geven we aan met $f{\cdot}f$ of ook met $f^{(2)}$. Dus geldt $f^{(2)}(x)=f(f(x))$; analoog definiëren we $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ enzovoort.

Als f monotoon strikt stijgend is zal:

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(a)=\infty$$

Boeiender zijn zulke rijen voor een niet monotone f.
We geven enkele voorbeelden:

1. $$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} \text{ als } n \text{ even is,}\\ 3*n+1 \text{ als } n \text{ oneven is.}\end{cases}$$

Dit is een beroemde puzzel geworden. Het, nog onbewezen, vermoeden is dat iedere positieve startwaarde k voert tot een rij geïtereerden die op den duur periodiek wordt met het rijtje 1, 4, 2, 1 enzovoort.
Bepaalde beginwaarden geven eerst lang stijgende rijen, men kan door eenvoudig redeneren vermoeden dat achtvouden plus zeven eerst wel even klimmen, een voorbeeld is 31.
Negatieve beginwaarden geven een ander gedrag, als men een keer het programma geschreven heeft loont het de moeite in dit gebied ook wat te gaan onderzoeken.

2. $$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} \text{ als } n \text{ even is,}\\ 10*n+a \text{ als } n \text{ oneven is.}\end{cases}$$

Hierbij beperken we ons tot een geheel getal a tussen 0 en 9, we schrijven dus gewoon een cijfer achter het getal. Wat proberen of wat nadenken,

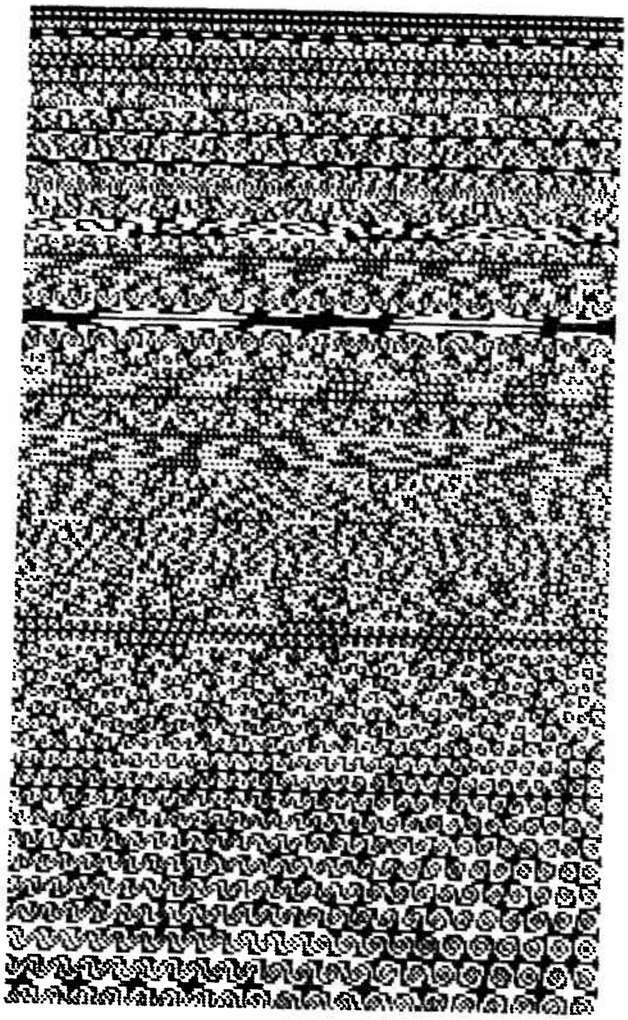
we laten de volgorde aan de lezer over, voert tot de conclusie dat alleen de waarden 2 en 6 voor a aardige resultaten en problemen geven.
Bijvoorbeeld $a=2$ en startwaarde 1 geeft 1, 12, 6, 3, 32, 16, 8, 4, 2, 1 enzovoort. Maar startwaarde 7 geeft bij $a=2$ de rij 7, 72, 36, 18, 9, 92, 46, 23, 232, 116, 58, 29, 292, 146, 73, 732, 366, 183, 1832, ...
Voor de echte denker komt er een nieuw probleem als de getallen in de rij de directe getallengte van de computer gaan overschrijden en op exponentiële notatie (en berekening?) overgegaan wordt. Denkwerk genoeg!

3. $$f(n) = \begin{cases} \text{sqr}(n) \text{ als } n \text{ een kwadraat is,} \\ n+a \text{ anders.} \end{cases}$$
Kleine waarden van a, zoals 1, 2, 3 geven voorspelbare resultaten. Bij $a=3$ en beginwaarde 7 vinden we als rij 7, 10, 13, 16, 4, 2, 5, 8, 11, .. maar omdat na 5 alle getallen een drievoud plus 2 zijn zal nooit meer een kwadraat voorkomen en de rij blijven stijgen. Ieder kwadraat is immers of een drievoud of een drievoud plus 1. Bij $a=7$ en startwaarde 21 vinden we de rij 21, 28, 35, 42, 49, 7, 14, 21, ...

4. Laat $s(n)$ de som van de echte delers van n zijn, dus $s(6)=6$ want $1+2+3=6$. Voor sommige getallen geldt $s(n)$ is kleiner dan n, heel duidelijk voor priemgetallen. Voor andere geldt $s(n)$ is groter dan n bijvoorbeeld voor getallen die tweemaal een voldoend grote macht van drie zijn.
Wat gebeurt er bij iteratie van de functie s? Duidelijk is dat de rij die met 6 begint een constante rij wordt. De getallen die zulke constante rijen geven heten vanouds volmaakte getallen.
Omdat $s(220)=284$ en $s(284)=220$ vinden we hier een rij met periode twee. De bijbehorende getallen heten bevriende getallen. Zijn er rijen met periode drie? Er zijn rijen bekend met periode vier, maar de startwaarde moet dan vrij groot zijn. Het is niet bekend of er altijd doorgaande rijen zijn. De meeste rijen stuiten na verloop van tijd op een priemgetal en daarna op 1.
Het is wel een aardige opgave om een verstandig algoritme te ontwikkelen om de som van de echte delers van een getal binnen redelijke rekentijd te vinden.

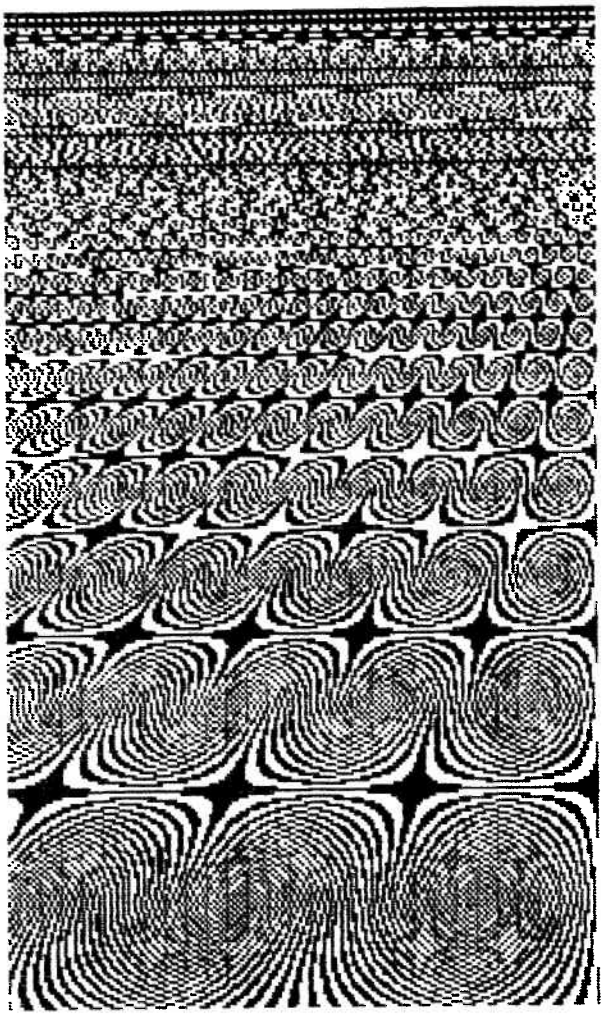
Grafisch scherm

1. We nemen gemakshalve aan dat op het scherm een coördinatensysteem is aangebracht, zodat op het scherm de punten (x, y) met $-N \leq x \leq N$ en $-N \leq y \leq N$ getekend kunnen worden. We tekenen een lijn van $(-N,0)$ naar (N,k). Natuurlijk zien we op het scherm een lijn die opgebouwd is uit een aantal horizontale lijntjes. Waar liggen de sprongpunten en hoeveel zijn het er?
Tekenen we een stelsel evenwijdige rechten van $(-N,a)$ naar $(N,k+a)$ voor een flink aantal waarden van a, dan zien we al iets zweverigs verschijnen. Tekenen we een aantal lijnen met verschillende richtingscoëfficiënten, dan slaan bij geschikte keuze van de parameters de vlammen uit het scherm. We stellen voor eens de figuur van alle lijnen van



$(-N,a)$ naar $(N,a*k)$ voor vaste k en een flink aantal opklimmende waarden van a in een figuur te realiseren.
2. Men zette op het segment $(0,0)$ tot $(N,0)$ een aantal stippen. Vervolgens roteert men deze stippen om de oorsprong, waarbij de rotatiesnelheid in de oorsprong en voor het punt op afstand N van de oorsprong nul is. Voor tussengelegen punten legt men de snelheid kwadratisch vast, zodat de snelheid voor een punt op afstand $\frac{N}{2}$ van de oorsprong maximaal is. Wat gebeurt met het rijtje punten na vele malen itereren van deze afbeelding? Na enig proberen komt men tot verrassende situaties. Het aardige is om deze te proberen te verklaren uit eenvoudige rekenkundige eigenschappen en de periodiciteit van de goniometrische functies. Waarom zou ik dit programma melk in de koffie genoemd hebben?

3. Men denke zich een gewoon cartesisch rooster van punten. Daarnaast denke men zich een tweede cartesisch rooster van punten met dezelfde oorsprong, maar met een iets andere onderlinge afstand van de punten. De punten van het eerste rooster noemen we zwart, die van het tweede rooster rood. We zouden dit echt uit kunnen



voeren. Maar daarna zou ik alleen die punten willen tekenen, waar een rood punt minder dan een voorgeschreven kleine afstand van een zwart punt afligt.
Zowel de onderlinge verhouding van de mazen van de roosters als de 'kleine afstand' zijn aardige, te variëren parameters.
Nog aardiger wordt het een cartesisch rooster met een poolcoördinaten rooster te combineren. Het poolcoördinaten rooster kan men maken met punten op een stelsel van (0,0) uitgaande stralen. Allerlei mogelijkheden zijn te proberen, de punten op een straal met gelijke afstanden of zodanig dat de x-coördinaten van de punten op een straal gelijke verschillen hebben. De stralen kan men onder gelijke hoeken tekenen of zó dat de richtingscoëfficiënten steeds met hetzelfde getal vermeerderd worden.

4. We noemen de hoekpunten van een regelmatige n-hoek opeenvolgend P_1, P_2, P_3, ... en rekenen met de nummers modulo n.
   Men tekene alle lijnen van P_k naar P_l bij de volgende keuzen van k en l:
   i) $k=t*a$, $l=(t+1)*a$ met $t=1, 2, 3, 4, \ldots$
   ii) $k=a^t$, $l=a^{(t+1)}$ met $t=1, 2, 3, 4, \ldots$
   iii) $k=t$, $l=a*t$ met $t=1, 2, 3, 4, \ldots$
   het geval i) geeft aanleiding tot beschouwingen over grootste gemene delers, enzovoort.
   Het geval ii) geeft visualiseringen van primitieve wortels modulo n. Voorbeelden als $n=255$ of 257 en $a=2$, maken op elementair vlak veel duidelijk.
   Het geval iii) doet een verband vermoeden van de figuren voor kleine waarden van a met 'spirograafkrommen'. Met wat differentiaalrekening kan men inderdaad verklaren dat de verkregen lijnen stelsels epicycloïden omhullen. Bij keuze van a vertoont de epicycloïde $a-1$ spitsen. Grote waarden van a (ten opzichte van n) geeft geheel nieuwe verrassingen, bijvoorbeeld als a ongeveer de helft van n is.

Functie-iteratie

Gemakshalve nemen we aan dat uw software de mogelijkheid biedt de grafiek van een voorgeschreven functie f te tekenen. Anders is in enkele regels, hetzij via punt voor punt plotten, hetzij via punten plotten en verbindingslijntjes, een grafiekenprogramma te schrijven.
We stellen voor functies te bestuderen die zich voor iteratie lenen, dus waarvoor het bereik een deelverzameling van het domein is. Men programmere de functie te tekenen die de k-de geïtereerde van een eenvoudige functie is.
Duidelijk is dat niet monotone functies de voorkeur verdienen.

i) $f(x) = a*x*(1-x)$,
   voor $0<x<1$ en $0<a<4$ of $a=4$.
ii) $f(x) = a*x*(1-x)*(1+x)$,
   voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$ en positieve waarden van a. Wat is de maximale waarde van a waarvoor de functie een bereik binnen $(-1,1)$ heeft?
iii) $f(x) = a \sin(x)$
iv) $f(x)$ wordt gedefiniëerd door $f(-1) = -1$, $f(-0) = a$, $f(+0) = -a$, $f(1) = 1$ en f is lineair op $(-1,0)$ en op $(0,1)$ terwijl a voldoet aan $0 \leqslant a \leqslant 1$.

In al deze gevallen beschouwe men zowel kleine waarden van k als flinke grote waarden van k (bijvoorbeeld rond de 10 of zelfs rond de 100).

De grafieken van de bovenstaande functies voor grote waarden van k zijn voor sommige waarden van a bijna constante functies, voor andere waarden van k trapfuncties met een klein aantal waarden, voor weer andere waarden van a chaotische vlakvullingen. We bespreken nog een andere manier om dit gedrag fraai grafisch voor te stellen.
We kiezen een van de bovenstaande typen i t/m iv en kiezen voor iedere functie het bijpassende geschikte gebied voor de parameter a. In het eerste geval dus $0 \leqslant a \leqslant 4$. In het derde geval kan men nemen $0 \leqslant a \leqslant 10$, maar het kan ook anders, in het vierde geval $0 \leqslant a \leqslant 1$.
Men verdele het a-interval in een groot aantal gelijke stappen. Voor ieder van de betrokken waarden van a iterere men de functie f met een willekeurig gekozen beginwaarde bijvoorbeeld honderd keer. (Attentie, er zijn enkele gevaarlijke zeer specifieke beginwaarden waarvoor alles mis gaat, het best is maar iets als 0.24675 te nemen.)
Daarna plot men de punten met als x-coördinaat de betrokken a-waarde, en als y-coördinaat de twee- of driehonderd volgende geïtereerden.

Ietwat formeler gezegd:
Voor de equidistante waarden $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ... plot men de punten

$$(ak, f^{(m)}(0.24675)) \text{ voor } 100 < m \leq 300$$

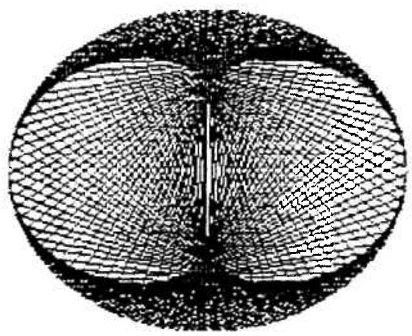
Omdat zowel k als m vrij veel waarden doorlopen zal de opbouw van deze figuur naar verhouding wel wat tijd kosten. Maar het resultaat is de moeite waard. Heeft men eenmaal de smaak te pakken en enig vermoeden wat voor wiskundige problemen met deze plaatjes samenhangen, dan wacht een nog vrijwel onbegrensd onderzoeksterrein op ontginning.

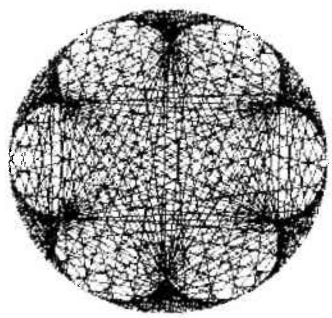
De meer geavanceerde problemen van de iteratie handelen niet over iteratie van getallen, maar over iteratie van afbeeldingen van punten van een vlak. Natuurlijk is dit soms te interpreteren als iteratie van complexe functies, bepaalde voorbeelden hiervan zijn klassiek geworden, men denke aan Julia- en Mandelbrotfiguren. Een voor mij nog vrij raadselachtige afbeelding is:

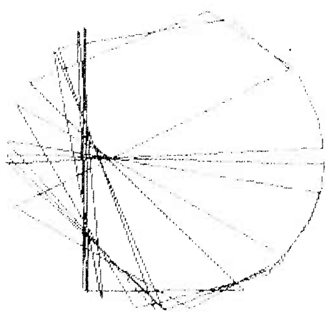
$$\begin{cases} x \to (x+y)/a \\ y \to y/x \end{cases}$$

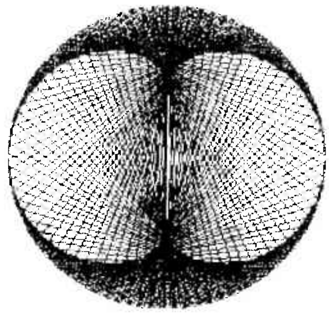
Zowel voor a in de buurt van 4.5 als voor heel grote positieve waarden van a is veel op te merken. Maar bewijzen lijken niet zo eenvoudig te vinden te zijn als vermoedens.

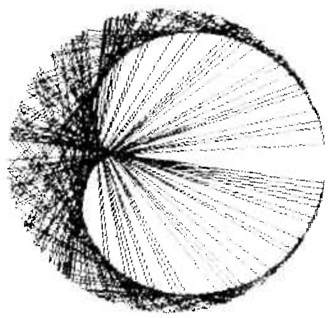

a = 2 , n = 257

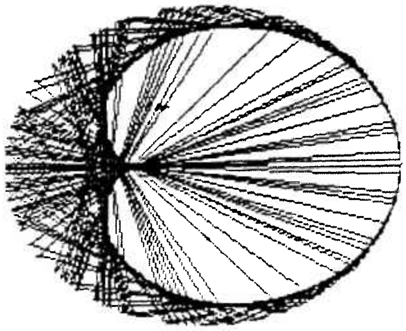

a = 3 , n = 257

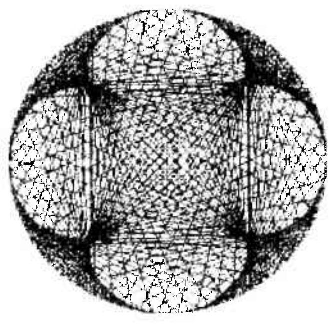

a = 7 , n = 257

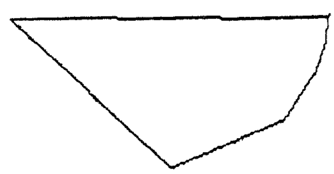

a = 2 , n = 259


a = 3 , n = 259


a = 2 , n = 253


a = 2 , n = 311


a = 5 , n = 259


a = 2 , n = 255