# Sinusfuncties

**H. Freudenthal**, OW & OC, RU Utrecht
**S.L. Kemme**, RU Groningen

## Functies en grafieken

'Functioneel denken' is lange tijd een slogan geweest, maar inmiddels vervangen door steeds weer andere die om de beurt evenzeer versleten zijn. Maar functies en grafieken komen toch steeds vroeger in het blikveld van de leerling. Trouwens niet pas in de wiskundeles, maar het wiskundeonderwijs mag en moet er wel het zijne toe bijdragen en ook dat zal steeds vroeger geschieden.
Functies en grafieken horen tot de *basisvorming* en daar zal hier de nadruk op liggen. Het NewMath-dogma om die twee van elkaar te scheiden en grafieken heel eventjes nog als een achterafse toepassing van functies een kans te geven, is afgezworen. Als systematicus houd je leerlingen liefst netjes van elkaar gescheiden. Als didacticus verstrengel je ze – om een term van L. Streefland te bezigen – in de hoop en met de bedoeling ze in het leerproces van de leerling wederzijds van elkaar te laten profiteren. Ten langen leste moet de leerling ook te weten komen dat en hoe hij ze kan en moet ontstrengelen, ook weer ten behoeve van allebei. Dit is trouwens een didactisch principe dat verder reikt dan alleen maar functies en grafieken, maar laten we ons hier tot dit paar beperken.

Dit paar? Als je het beeldscherm erbij betrekt, is de computer, die het werk van potlood, liniaal en passer overneemt, nummer drie in dit gezelschap, al zou ik in dit verband de vingeroefeningen op het toetsenbord willen uitstellen totdat de leerling het werk op het millimeterpapier voldoende onder de vingers heeft om de hulp, door de computer geboden, echt in het verlengde van zijn handwerk te ondervinden; naar de aard van de verschillende onderwerpen zal de tijd, aan het handwerk besteed eer de computer het overneemt, nogal uiteenlopen.

Functies waren in de historie oorspronkelijk algebraische verschijnselen, zij het dan door meetkunde, kinematica en mechanica gedicteerd. Ik weet niet wie voor het eerst zo iets als het verloop gedurende een etmaal van de luchttemperatuur op een zekere plek een functie (van de tijd) heeft durven noemen en evenmin van welk verschijnsel de eerste 'empirische' functie feitelijk rekenschap aflegde. Ze zijn er nu te kust en te keur; er verschijnt vrijwel geen krant of je vindt er een of meer van die grafieken in; ik heb de indruk dat zelfs verstokte alfa's er niet bang meer voor zijn.

'Geen empirische' functies deugt niet, maar 'alleen empirische functies' deugt nog minder. Maar wat dan wel? Lineaire natuurlijk met de bijbehorende rechtlijnige grafieken. Ook met de bijbehorende vergelijkingen? Als het kan, ja. Maar alleen als je tevens echt laat zien wat het betekent als je de numerieke coëfficiënten erin laat variëren, want pas in die verscheidenheid gaan ze – net als alles in de wereld – echt leven. Dan, voor de afwisseling, ook stuksgewijs lineaire functies; je kunt er nogal wat verhalen bij verzinnen.

Na de lineaire de kwadratische functies? De oppervlakte van een vierkant als functie van de zijde? Het lijkt me nogal gezocht. Val en worp liggen als voorbeelden voor de hand. Maar echt genoegen heb ik met dit soort voorbeelden nooit genomen. Ik zou het even na moeten gaan, maar ik heb al sinds lang voor de sinussen gepleit, de sinussen als functies. Gelukkig biedt het Ontwerp Eindtermen-Basisvorming nu ook de mogelijkheid. In het onderdeel V5 van Verbanden, Grafieken en Functies staat: 'Herkennen en beschrijven van verbanden: bijvoorbeeld lineaire, kwadratische, hyperbolische, periodieke en exponentiële.'

Het gebeurde een tijd geleden: een 75-jarige alfa, die van haar schoolwiskunde genoeg heeft onthouden om er anderen privé mee te helpen bij (een even taai leven leidende) huiswerksommen, vroeg me onder meer waar nu eigenlijk de sinus goed voor was. Bijna was ik erin getrapt en met driehoeken begonnen en met geodesie geëindigd, maar het TV-toestel en de vleugel in de kamer hebben me voor die misstap behoed, en het werd een verhaal over ether-, lucht- en snaartrillingen waar ze wel van onder de indruk leek te zijn.

## Sinusfuncties alom

Als ik me niet bedrieg heeft de sinus als *functie* zich in de historie voor het eerst aangemeld bij de trillende snaar. (De wet van Snellius kun je moeilijk als tegenvoorbeeld aanvoeren en bij de cycloïde was de sinuslijn alleen maar als 'compagne' betrokken.) En ook tegenwoordig is de kans groot dat de eerste plaatjes van sinusfuncties die een opgroeiende tegenkomt bedoeld zijn de gespannen snaar met zijn grond- en boventonen qua *vorm* weer te geven. En qua *beweging*? Misschien wordt er nog bij verteld en met een grafiek geïllustreerd hoe elk afzonderlijk punt van de snaar heen- en weer trilt: ook weer volgens een sinusfunctie. En met de snaar trilt de lucht mee, met de lucht een membraan in het oor of in een toestel, met die membraan een elektrisch potentiaal, de zenuw langs of het toestel en de ether door, om ergens iets net zo mee te laten trillen, wat je daar met je zintuigen opvangt of weer als zo'n fraaie kromme op de oscilloscoop kunt toveren.

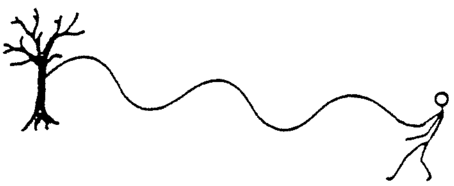
Trillingen – het heeft lang geduurd voor de mensheid dit soort beweging au sérieux heeft genomen. Het eerste geval was, voor zover ik weet, de slinger. Ook de slingerbeweging wordt door een sinusfunctie beschreven – ik moest het eens even nagaan wie voor het eerst de differentiaalvergelijking van de slinger heeft geïntegreerd.
Slingers zijn er van alle soorten: de seismograaf bijvoorbeeld is er een, met een haast horizontaal slingervlak, hetgeen zijn werkzame lengte en zijn gevoeligheid om aardtrillingen waar te nemen onmetelijk vergroot.

Elastische trillingen, de golfbeweging van het wateroppervlak dat door een steentje verstoord wordt, het licht als ether-trilling, en allemaal hebben ze met sinusfuncties te maken. Fourier-analyse noem je het als je zo'n beweging in echte of denkbeeldige componenten splitst. Ik etaleer deze rijkdom, waar lineaire en kwadratische functies bij verbleken, omdat fysische feiten, zoals de sinusvormen van trillende snaren ook zonder mathematisch bewijs didactisch volstrekt acceptabel zijn.

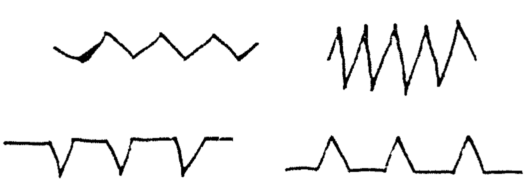
## Sinusfuncties op school

Welke van die voorbeelden laten zich op school gebruiken? Ziehier een stel, waarbij in het midden wordt gelaten op welk niveau en hoe dit precies zou kunnen en moeten.

Een touw met één eind aan een boom; het andere eind wordt op en neer geslingerd. Je zou het op een zonnige dag met de klas kunnen doen en er een polaroid foto van maken.

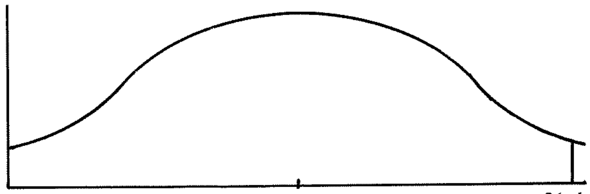


Patronen van een zig-zag naaimachine — niet sinusvormig, maar wel periodiek. Je kunt ze zelf instellen — een eerste aanzet tot 'parameters'? Bijvoorbeeld:

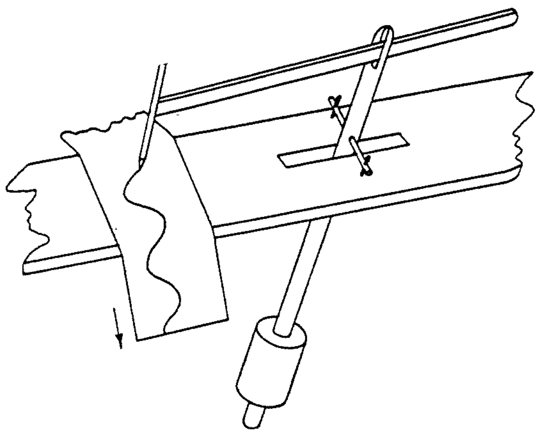


Nog een ingewikkeld voorbeeld van een periodieke functie: een grafiekje van de openingstijden van een winkel.

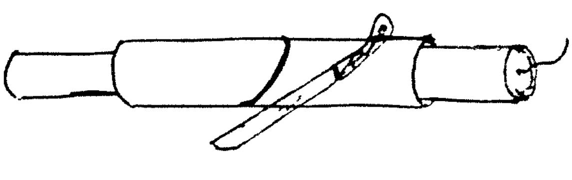

De periode is een week. Of een jaar? Als je de vakantiesluiting erbij betrekt.
Hierbij aansluitend: de grafiek van de daglengte over een heel jaar:



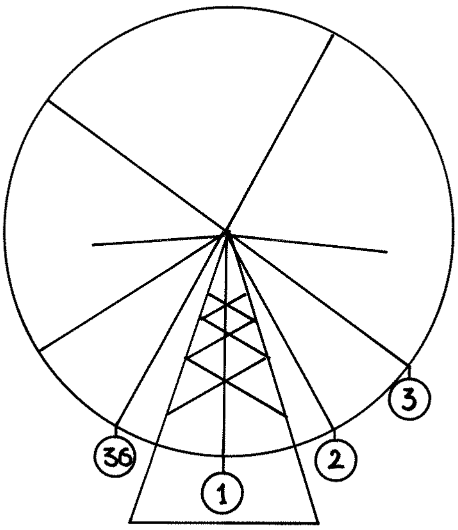

Vul zelf maar de waarden in die bij de verticale as moeten staan. Hoe zou de grafiek er aan de evenaar uitzien? Aan de noordpool, de zuidpool?
Eb en vloed natuurlijk. In het katern 'Periodieke Functies' staan een aantal voorbeelden en opdrachten die zich zó naar de onderbouw laten verplaatsen.
De slinger: Het volgende plaatje laat zien hoe de heen- en weergaande beweging omgezet kan worden in de sinusvorm.



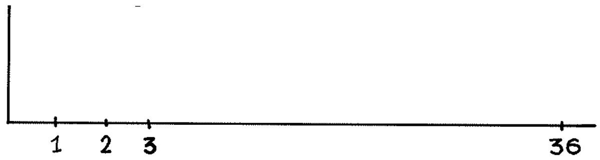
Moet het apparaat er echt bij in de les, of kunnen leerlingen zich dat ook zó voorstellen? Het is allemaal proberen.
Foto's van watergolven en van trillende snaren, geluidsgolven zichtbaar gemaakt in een glasbuis met zand, ribbels in het zand op het strand — voorbeelden van het verschijnsel als zodanig zonder dat daar onmiddellijk aan gerekend hoeft te worden.
De sinusvorm laat zich mooi demonstreren met een papiertje rond een kaars gewikkeld en schuin doorgesneden. (Het mes moet goed scherp zijn.) Het opengevouwen papier levert een prachtige sinus.



Laat eerst raden wat de vorm zal zijn en geef daar tijd voor! Bedenk achteraf een verklaring voor de vorm, zonder formules!




Het reuzenrad. Ziehier de stap van het verschijnsel naar de grafiek. De 36 gondels zijn genummerd. Meet de hoogte van de gondels boven de grond en zet die uit in de grafiek:




Laat de grafiek niet aan zijn lot over. Teken nu de grafiek van de hoogte van je eigen bakje als het rad rond gaat draaien. Laat raaklijnen tekenen. Waar stijgt of daalt de kromme het hardst en wat doet de raaklijn daar? De helling als functie van de tijd uitzetten: waar lijkt de nieuwe grafiek op en valt dit ook al in de figuur van het draaiende wiel te zien en te beredeneren? Ik laat weer in het midden hoever je hiermee moet gaan, maar — geloof me — er is echt geen differentiaalrekening voor nodig.
Maak nu een grafiek van de hoogte van de reflector aan de trapper van een fietser die 's avonds achteruit rijdt!
Het reuzenrad en de reflector op de fiets kun je natuurlijk ook simuleren met een computer. Maar pas nadat het *hand*werk is geweest. Dan kunnen er ook veel mooiere sinussen over het scherm gaan rollen en kan misschien de stap naar de sinusformule worden gezet als een formule die dit soort grafieken in het algemeen beschrijft. Daarbij hoeven de leerlingen niet te weten dat de sinus ook een verhouding in een driehoek is al sluit het het verband met gonio niet uit – immers de sinus van een bepaalde hoek is zo iets als een momentopname uit de film van het wentelende wiel. Maar in eerste instantie is zo'n sinus gewoon een functie op $\mathbb{R}$, net zoals $y = 2x+1$ of $y = 3x^2$.
Of als $x - \mathrm{int}(x)$, dat eveneens een periodieke functie van $x$ levert en dan één die zelfs in de computer zit.
Er zijn prachtige Software-pakketten die in een handomdraai sinussen van de gedaante:

$$a \sin(bt - c) + d$$

op het scherm toveren. Laat leerlingen zelf ontdekken wat er gebeurt als je een van die letters andere waarden gaat geven. Kun je door een handige keuze van de letters ook een gegeven grafiek natekenen?

Of twee sinussen bij elkaar optellen. Twee met dezelfde periode, en hoe kun je beredeneren wat zich daar voordoet? Of de een met een periode die een veelvoud van de andere is. Of twee met perioden waarvan de één een geheel veelvoud van de ander is of die onderling commensurabel zijn, speciaal met perioden die weinig verschillen. Of twee met onderling incommensurabele perioden, of althans met perioden waarvan het kleinste gemene veelvoud zo groot is dat de computer de verschijnselen die zich dan voordoen goed benadert. Of sommen van meer dan twee.
Golven maak je met:

$\sin at \cdot \sin bx$ (staande)
$\sin(ax - bt)$ (lopende).

Maar die plaatjes zul je niet zo gemakkelijk met de bestaande software op het scherm kunnen krijgen.

## Het wiel uitgevonden?

*Waarom* ik de sinus als functie en dus de sinusfuncties propageer zal nu duidelijk zijn. *Hoe* ik het me voorstel is al uiteengezet. Als het om 'weg als functie van tijd' gaat, en daar gaat het toch veelal om, dan prefereer ik de sinusfuncties boven andere. Uit eigen ervaring met leerlingen en uit de literatuur bent u uiteraard bekend met de verleiding om de tijd-weg grafiek voor de afgelegde weg aan te zien. Wat valt er aan te doen? Hoe kun je die voorkomen?
Stel je het wentelende wiel voor: links het wiel met de lichtbron en rechts de grafiek van zijn stijgen en dalen. Allebei, weg en grafiek, zijn netjes in het beeld, maar duidelijk van elkaar gescheiden. Ik geef toe dat je met enige moeite zo iets ook bij andere tijd-weg grafieken kunt uithalen, maar is het echt de moeite waard die het *daar* kost, terwijl het zich *hier* vanzelf aanbiedt? Ik zou haast zeggen: geen tijd-weg grafieken voorafgaande aan de sinusfuncties.
En als tweede, veel belangrijker, argument: het geometrisch-kinematisch ontstaan van sinusfuncties dat fel afsteekt tegen het min of meer formeel-statische van al die andere.
En tenslotte: de rijkdom van de afzonderlijke sinusfunctie en de grote verscheidenheid in de hele familie.

Nog twee opmerkingen – niet meer!
Eén: Vertaal hetgeen ik het *geometrisch-kinematische* van de benadering noemde in het onderwijs naar de kant van de leerling toe ten volle in het *visueel-motorische*, heb er vrede mee als hij daarop reageert en dring er niet op meer aan als hij er niet aan toe is!
Twee: Sinusfuncties is niet één hoofdstuk om zo maar achter elkaar af te werken zoals gonio vroeger was. Het is een leerlijn om om de beurt te laten vieren en weer aan te halen, naar gelang van wat de andere ermee verstrengelde leerlijnen toelaten of eisen, een leerlijn waarvan de feitelijke lengte door elke leerling afzonderlijk mag en moet worden bepaald.

Opmerking: Met het 'ik' in de voorgaande tekst presenteert zich de eerste auteur, wiens oorspronkelijke verhaal door de tweede auteur in hoge mate is verlevendigd en verrijkt.