Vele wegen leiden naar Rome

Jac. Jansen
Strabrecht College, Geldrop

Verschillende oplossingsmethoden

Contextrijke opgaven worden afgewisseld door 'kale' opgaven in het wiskundepakketje 'Hellingen' van het Hawex-project. En ook 'kale' opgaven kunnen interessant zijn.
Het boekje 'Hellingen' is uitgebreid met zes oefenlessen. In oefenles 3, met als kop lineaire functies, wordt het opstellen herhaald van het voorschrift van een lineaire functie.

Een rechte lijn is bepaald door *twee* punten.
Een lineaire functie is bepaald als bij twee x-waarden de y-waarden gegeven zijn.

Voorbeeld:

Gegeven: y is een lineaire functie van x (1)
als $x = 1$, dan $y = 3$ (2)
als $x = 6$, dan $y = 5$ (3)

Gevraagd: druk y uit in x

Vervolgens krijgen de leerlingen drie oplossingsmethoden voorgeschoteld.
Ik vind het niet genoeg en voeg er een vierde methode aan toe. Het wordt me niet in dank afgenomen, maar daar later meer over.

Oplossing
Van een lijn l zijn A(50,90) en B(55,100) gegeven.
Stel het functievoorschrift op. Het vinden van de hellingscoëfficiënt 2 gaat als vanouds.
Voorlopig hebben we: $f(x)=2x+\ldots$
Wat betekent die hc 2 eigenlijk? Vanuit een punt van lijn l één naar rechts, twee omhoog. Of één naar links, twee omlaag.
Neem nu van de gegeven punten van l dat punt wat het dichtst bij de y-as ligt. De afstand van A tot y-as is 50.

Hoe vinden we het snijpunt van lijn l met de y-as?
Eén naar links, twee omlaag.
50 naar links, 2×50 omlaag.
En we vinden $(0,90-100)$.
Tenslotte: $f(x)=2x-10$.

De havo 4-leerlingen vinden het maar niets. Verwarrend, al die methoden. Een instroomster (van de mavo): 'Zo heb ik het niet gehad. Ik wil maar één methode.'

Ik ben zelf teleurgesteld. Dat werken met die hellingscoëfficiënt is zo aardig voor het inzicht.
Ik neem me voor, in het geval ik voor het bord werk, voorlopig maar één methode te bespreken.

Een aantal lessen later

Alles hebben de leerlingen verwerkt van het boekje 'Hellingen', maar de laatste bladzijde van oefenles 5 moet nog gemaakt worden. Ze vinden die pagina moeilijk, vertrouwt een collega mij toe. De volgende les ga ik opgave 5 en 6 in een klassegesprek doorspitten.
Vrijdagmorgen – het eerste uur – laat ik 5 en 6 de revue passeren. Bij de rondgang blijkt dat het huiswerk in gebreke is gebleven. Van som 5 staat hier en daar wat op papier. Bij opgave 6 hebben ze de moed opgegeven.

5. Bekijk de figuur van het eerste voorbeeld. De snijpunten van de grafieken zijn A en B.
Tussen de punten A en B worden verticale verbindingstukken PQ getrokken van de ene grafiek naar de andere.
In de figuur kun je zien dat er twee verbindingstukken PQ moeten zijn met lengte 1.
Bereken de coördinaten van PQ en Q in die gevallen.

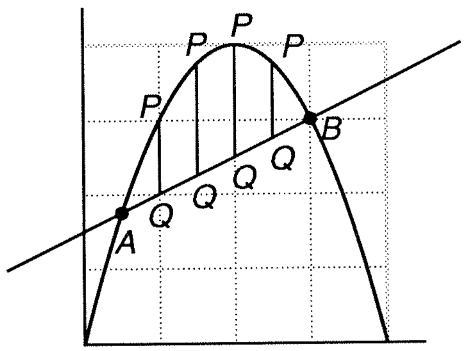

fig. 1

6. Gegeven de lijnen $l : y = 2x - 10$ en $m : y = 10 - \frac{1}{2}x$.
A ligt op l en B ligt op m zodat AB horizontaal is.
Bereken de coördinaten van A en B voor het geval A rechts van B ligt en $AB = 6$.
(Aanwijzing: Stel $x_B = x$, en druk y_B, x_A en y_A uit in x)

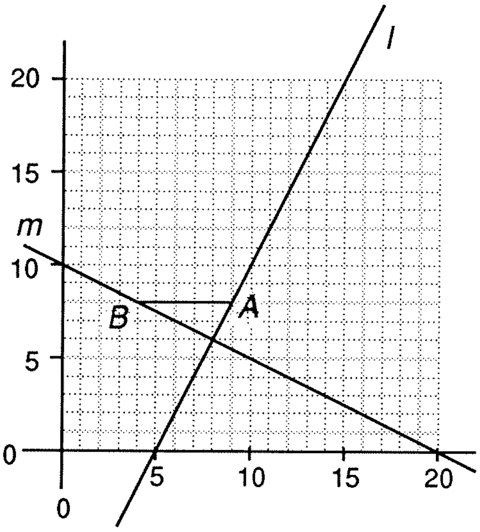

fig. 2

Ik maak opgave 5 op het bord. Vervolgens opgave 6, en wel als volgt:

$x_B = x$; punt B$(x, 10-\frac{1}{2}x)$
Punt A, zes eenheden naar rechts A$(x+6, 10-\frac{1}{2}x)$
Punt A ligt ook op lijn l
Dus: $y_A = 2(x+6)-10$, $y_A = 2x+2$
En tenslotte de vergelijking:
$10-\frac{1}{2}x = 2x+2$
$8 = 2\frac{1}{2}x$
$\frac{16}{5} = x$
B$(\frac{16}{5}, 8\frac{2}{5})$ A$(\frac{16}{5}+6, 8\frac{2}{5})$.

Ik heb het anders gedaan zegt Miranda. Na een korte inventarisatie blijken er verschillende methoden bedacht te zijn. Paul heeft iets speciaals. En Adinda heeft wat met sinus gedaan.

Het derde uur krijg ik ze weer. Ik begin als volgt: 'Ik vind het jammer als ik jullie de andere, door enkele van jullie bedachte methoden moet onthouden.'
De leerlingen zijn bereid.

Miranda:
Druk x in y uit.
lijn l: $2x = y+10 \rightarrow x = \frac{1}{2}y+5$
lijn m: $\frac{1}{2}x = 10-y \rightarrow x = 20-2y$
Nu geldt:
$\frac{1}{2}y+5 = (20-2y)+6$
$2\frac{1}{2}y = 21$ $\qquad y = 8\frac{2}{5}$
en de punten A en B volgen.

Paul: Verschuif lijn l tot punt B erop ligt.

Paul schudt de formule van de nieuwe lijn uit zijn mouw: $x = 2y+2$.
Hoe komt hij eraan? Evenwijdige lijnen: $y = 2x + \ldots$ en dan het hellinginzicht. Het nieuwe snijpunt met de y-as komt 2×6 hoger te liggen dan $(0,-10)$, dus $(0,2)$. (Zie figuur 3.)

Ik denk terug aan de les van de vier oplossingsmethoden. Reken het snijpunt uit van de nieuwe lijn met lijn m.

$y = 10-\frac{1}{2}x$ $\qquad y = 2x+2$
$10-\frac{1}{2}x = 2x+2$ $\quad 8 = 2\frac{1}{2}x$ $\qquad x = \frac{16}{5}$
Punten B en A volgen.

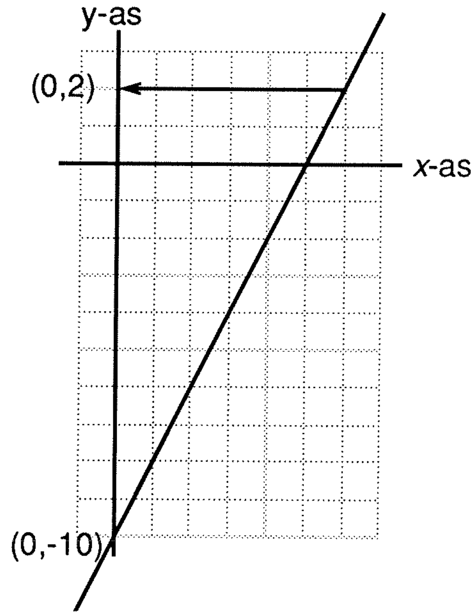

fig. 3

Robbert, een leerling uit mijn parallelgroep, maakt op eenzelfde manier opgave 5.
Verschuif lijn AB een eenheid in de positieve y-richting.
U(lezer), werk de opgave maar uit!

Tenslotte *Adinda*. De lijnen staan loodrecht op elkaar. Er is sprake van een rechthoekige driehoek ABS. S(8,6).
Adinda wil iets met sinus, maar laat het idee varen. Zij komt moedig terug met een nieuwe poging. Zij meent een $30°-60°-90°$-driehoek te herkennen in $\triangle$ ABS. In dat geval: AS $= \frac{1}{2} \times 6$. Echter de tangens van $\angle$BAS is gelijk aan 2. Toch geen $30°-60°-90°$-driehoek.

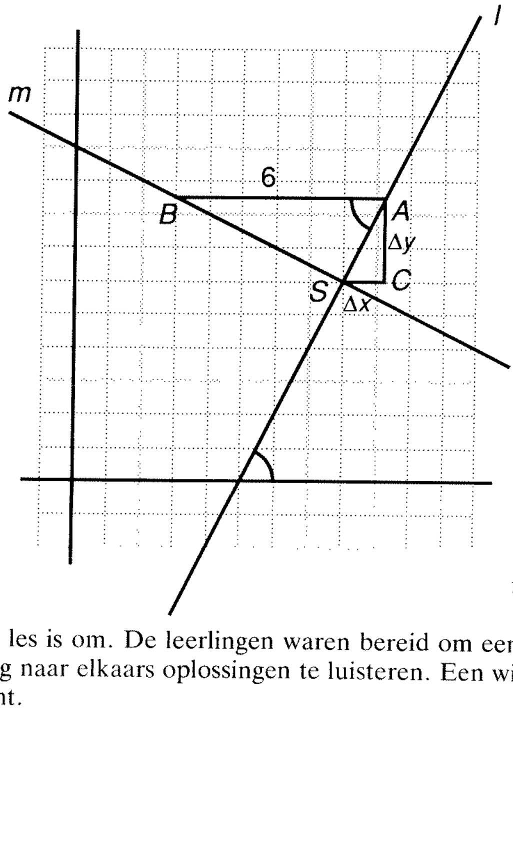

fig. 4

De les is om. De leerlingen waren bereid om een les lang naar elkaars oplossingen te luisteren. Een winstpunt.

Het idee van Adinda was zo gek nog niet.
Tan ($\angle$BAS) = 2; met behulp van 'Pythagoras':
in $\triangle$ABS: $AS^2 = \frac{36}{5}$ en in $\triangle$ACS (met $\triangle y = 2\triangle x$) volgt uit 'Pythagoras':
$5(\triangle x)^2 = \frac{36}{5}$, dus $\triangle x = \frac{6}{5}$ en $x_A = 8 + \frac{6}{5} = 9\frac{1}{5}$ en de punten B en A volgen.

Toegift

Op de valreep komt een collega met een oplossing die gebaseerd is op hellingen. En daar was het toch om te doen.
Snijpunt van lijn l en m berekenen: S(8,6)
(Zie figuur 5.)

Maak gebruik van de hellingen 2 respectievelijk $-\frac{1}{2}$.
Vanuit snijpunt S(8,6) een eenheid omhoog. Dan een halve naar rechts en je komt uit op lijn l.
Hellingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ kan betekenen: twee links, een omhoog. Dus vanuit S een omhoog, twee naar links en je komt uit op lijn m. Dit levert een horizontaal lijnstukje van lengte $2\frac{1}{2}$ op.
AB moet lengte 6 hebben. Vanuit punt S $\frac{6}{2\frac{1}{2}}$, dus $2\frac{2}{5}$ omhoog.
$y_A = y_S + 2\frac{2}{5} = 8\frac{2}{5}$.
Vanuit S $2\frac{2}{5}$ omhoog, vervolgens $1\frac{1}{5}$ naar rechts.
$x_A = x_S + 1\frac{1}{5} = 9\frac{1}{5}$.

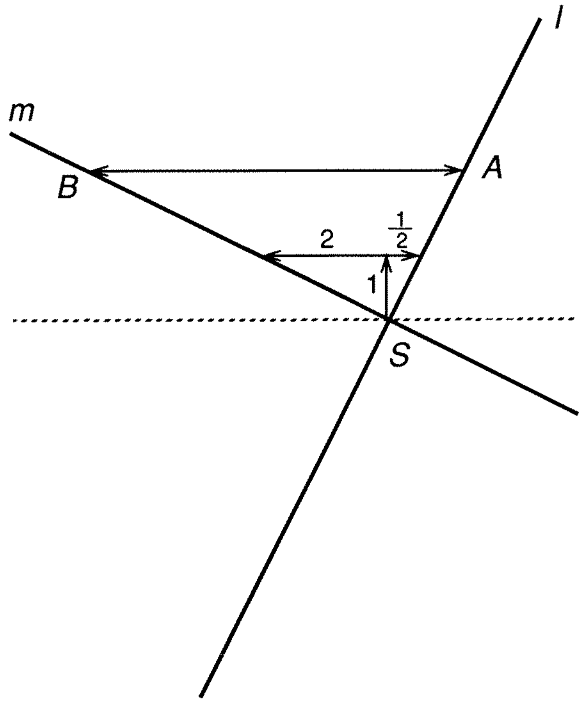

fig. 5