Weten hoe je tekent

M. Kindt
OW & OC, RU Utrecht

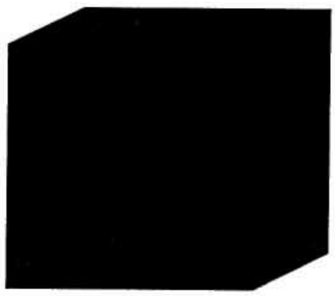
Na het vwo moet ook het havo eraan geloven: ruimtemeetkunde is in! Dit klinkt alsof er sprake is van een modeverschijnsel: tachtiger jaren, postmoderne wiskunde...
De opstellers van het Hawexprogramma zijn er weliswaar van overtuigd dat wiskundeleerplannen modieuze trekjes kunnen vertonen, maar zij zijn ook van mening dat het voor leerlingen die bijvoorbeeld 'de techniek' in willen, nu en in de toekomst, van groot belang is dat ze in staat zijn hun ruimtelijke intuïtie op effectieve wijze in praktijk te brengen. De algebraïsche methode, zoals die in het huidige havo-programma floreert, is voor een zekere klasse van problemen inderdaad effectief, maar heeft het nadeel dat bij het hanteren ervan de relatie met de aanschouwing meestal verloren gaat. Om die reden is bij de Hewetoperatie destijds het besluit genomen het accent in de meetkunde van de bovenbouw te verleggen van vectormeetkunde naar meer aanschouwelijke methoden. In het vwo-programma is nog een residu van die vectormeetkunde aanwezig. Het gevaar bestaat dat dit residu in de examenpraktijk langzaam maar zeker boven komt drijven.

Bij het programma wiskunde B in het kader van Hawex is inmiddels een stapje verder gezet. In de laatste voorstellen van de programmacommissie is de vectormeetkunde geheel uitgebannen.
Dit besluit, om op het havo niet zoals op het vwo 'van twee walletjes te willen eten' is na rijp beraad en op grond van het verloop van het experiment genomen. In het nieuwe voorstel ziet de doelomschrijving van de ruimtewiskunde in wiskunde B er als volgt uit:

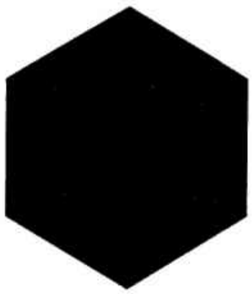
'De kandidaat moet blijk geven van ruimtelijk inzicht door het analyseren van ruimtelijke objecten, het kunnen beschrijven van het verloop en het resultaat van bewegingen van objecten in de ruimte en het op verschillende manieren in beeld kunnen brengen van ruimtelijke objecten.
Voor de begripsvorming is het van belang dat de onderwerpen in de ruimtemeetkunde worden toegelicht met concrete voorbeelden. Objecten waaraan ruimtemeetkunde kan worden bedreven, zijn: kunstvoorwerpen, bouwwerken, maquettes, enzovoort. Bij de presentatie van zulke objecten kan gebruik worden gemaakt van tekeningen en foto's.
Het kunnen gebruiken van verschillende tekenmethoden bij de weergave van driedimensionale objecten is een wezenlijk leerdoel. De kandidaat dient te weten dat een tekenmethode een conventie is en dat de relatie tot de driedimensionale werkelijkheid afhankelijk is van de gevolgde tekenmethode.'

Projectiemethoden

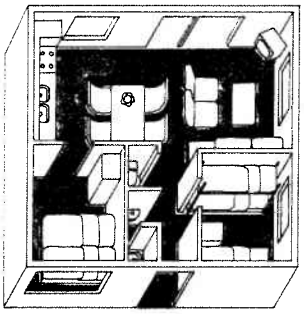
Lezer, stelt u zich het volgende onderzoekje voor. Teken een kubus op de in wiskundeboeken geijkte manier: scheve projectie met voor- en achtervlak als vierkant en met de andere vier zijvlakken als twee aan twee congruente parallellogrammen. Knip de figuur uit en leg hem in de eerstvolgende wiskundeles op de overheadprojector. Liefst een beetje scheef, maar dat hangt ook van de gevorderdheid van de klas af. Op het scherm komt:



Vraag aan de klas: wat voor figuur zie je nu?
Onder leraren op nascholingscursussen of bij andere gelegenheden, heb ik die proef meermalen uitgevoerd. Na een aarzelend 'zeshoek', kwam bij de meesten een gedecideerd 'kubus' over de lippen. Zo zie je maar wat jarenlange indoctrinatie vermag. Er kan nog wat meer verwarring worden gezaaid door ook een regelmatige zeshoek uit te knippen en die ernaast te leggen.
Versterkt dit tweede plaatje het concept 'zeshoek' of het concept 'kubus'?



De methode 'Moderne Wiskunde' heeft de ontwikkelingen haarfijn aangevoeld en de implicatiepijl op de voorkaft vervangen door kubusjes in de gedaante van de regelmatige zeshoek. Binnenin het boek is ook het een en ander veranderd, maar wat opvalt is dat de kubus hier, zoals ook in de andere methoden, veelal figureert in de onnatuurlijke voorstelling van de scheve projectie. Waarom onnatuurlijk? Wel, bekijk het onderstaande plaatje waarin je vanuit een verheven standpunt naar een gemeubileerde kamer kijkt. Deze figuur komt voor in het Hawexboekje 'Tekenen wat je weet' (thans in ontwikkeling). In het plaatje wordt het onnatuurlijke snel duidelijk: om de vloer in de ware vorm te zien, moet de waarnemer zich hoog in de lucht bevinden, recht boven die vloer. Maar dan worden bijvoorbeeld de opstaande muren voor het oog gereduceerd tot een omlijsting van het plaatje. Kortom, in de figuur is per se niet getekend wat je ziet. Dat neemt niet weg dat het plaatje in de afgedrukte vorm functioneel is, in elk geval meer duidelijk maakt dan een plattegrond met bovenaanzicht van tafel en bed.

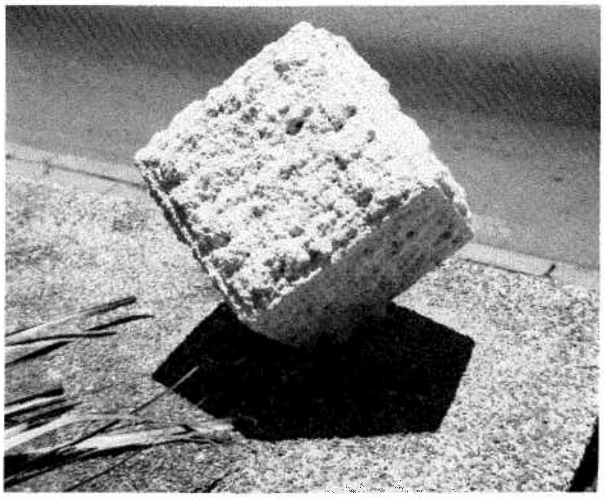


In de Hawexboekjes over ruimtemeetkunde vormen foto's en afbeeldingen van ruimtefiguren, zoals die worden aangetroffen in allerlei boeken en tijdschriften, een belangrijke bron van inspiratie. Daarbij ontmoet de leerling de diverse projectiemethoden als daar zijn: scheve parallelprojectie (met name de zogenaamde Cavalière-projectie en de militaire projectie), loodrechte projectie (met name de isometrische en de ingenieursprojectie), perspectief of centrale projectie.

In het examenprogramma staat er onder het kopje 'projectiemethoden':

De begrippen centrale projectie en parallelprojectie.
Interpreteren van een perspectieftekening. De begrippen horizon en verdwijnpunt.
In een perspectieftekening een lijnstuk verdelen in stukken die in werkelijkheid gelijk zijn in het geval dat dit lijnstuk parallel is met het horizontale vlak.
Interpreteren van een tekening in scheve of loodrechte parallelprojectie.
De regels voor het behoud van evenwijdigheid en van verhouding. De begrippen wijkhoek en verkortingsverhouding.
Een projectiefiguur maken of voltooien vanuit een meetkundige beschrijving of foto.
Centrale projectie en parallelprojectie in verband brengen met kijken naar objecten en met problemen van licht en schaduw.

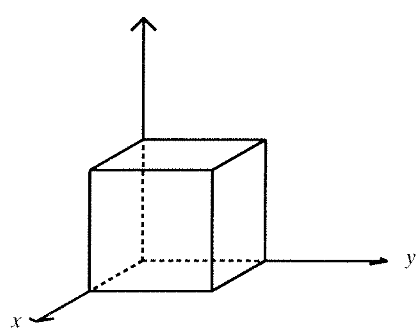
Tot zover dit stukje examenprogramma. Het laatste woord, schaduw, werpt (hoe gek het ook klinkt) licht op de scheve kubusprojecties. Het zeshoekige silhouet in het begin van dit artikel is niets meer en niets minder dan de schaduw van een massieve kubus op een vlak bij een geschikte stand ten opzichte van de zon.
Dat ook de regelmatige zeshoek als zodanig op kan treden, laat onderstaand tropisch kiekje zien. Met die foto kun je nog wat twijfel zaaien: hoe weet je dat de schaduw geen vijfhoek is? Het toverwoord is hier: puntsymmetrie. Omdat de kubus het is (ik bedoel: puntsymmetrisch) is zijn zonneschaduw het ook (behoud van verhouding bij parallelprojectie) en komen uitsluitend 'even-hoeken' in aanmerking.



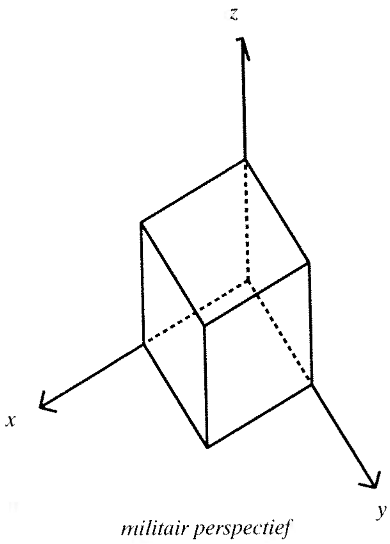
Omgekeerd is het ook zo dat elke puntsymmetrische zes- of vierhoek als schaduw kan optreden van een kubus. Dit is de stelling van Pohlke (1810-1876). De stelling kan aldus worden geformuleerd in termen van vectoren:

Laat V een vlak zijn en O een punt in V.
Elk stelsel van drie vectoren in V en uitgaande van O, waarvan er tenminste twee onafhankelijk zijn, kan worden opgevat als het beeld bij scheve projectie van een orthonormaal drietal vectoren in de ruimte.

Assenstelsels in wiskundeboekjes worden meestal zo getekend dat y-as en z-as loodrecht op elkaar staan en de x-as een stompe hoek maakt met de horizontaal getekende y-as. Het gemak dient de mens. Maar even gemakkelijk is de methode waarbij x-as en y-as scheef in het vlak, maar onderling loodrecht worden getekend en de z-as weer verticaal. Die laatste methode staat bekend onder de naam 'militair perspectief'.

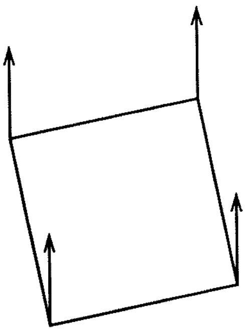


cavalière perspectief

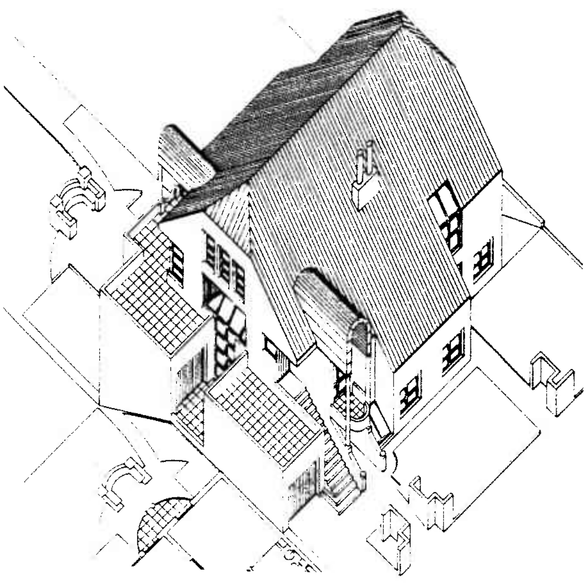


militair perspectief

Evenals de Cavalière-projectie levert de militaire projectie een handige manier om snel een kubus te tekenen: teken het grondvlak op ware grootte (maar wel scheef ten opzichte van de verticaal) en til de hoekpunten op . . .

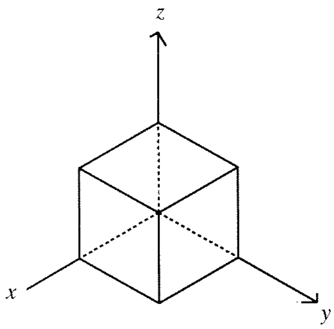


Het militair perspectief is architecten en reclametekenaars niet geheel onbekend, zoals bijvoorbeeld blijkt uit onderstaande figuur (uit het boekje Tekenen wat je weet).
Een opdracht bij de tekening luidt: elke hoofdrichting is op dezelfde schaal getekend. Hoe hoog is het huis? Een geslaagde opgave, getuige de inventiviteit die een aantal leerlingen hierbij ontplooiden.

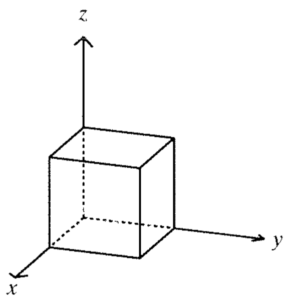


Loodrechte projectie

Als je naar een onbeschermde hoek van de kamer kijkt, zie je een stelsel van drie onderling loodrechte assen. Het beeld laat echter drie stompe hoeken zien, aangenomen dat het oog zich niet bevindt op één van de drie assen of in één van de drie grensvlakken. Kortom als je een assenstelsel wilt tekenen, zoals dat in de ruimte waarneembaar is, zijn de beide voorgaande tekenmethoden verwerpelijk. Het presenteren (en zelf maken) van zichtgetrouwe tekeningen zou voor de vorming van het ruimtelijk inzicht weleens van groot belang kunnen zijn. Jan van de Craats deed er al eens een boekje over open. [1]
Bij een natuurlijke voorstelling van ruimtelijke zaken is er de keus tussen (centraal) perspectief en loodrechte projectie (perspectief met een oneindig ver oog). Op de laatste richt ik nu verder mijn blik, de eerste komt in een volgend artikel aan de beurt.

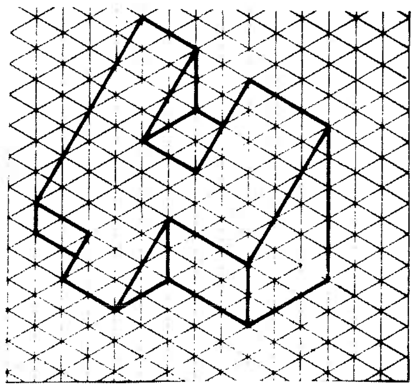


isometrisch perspectief



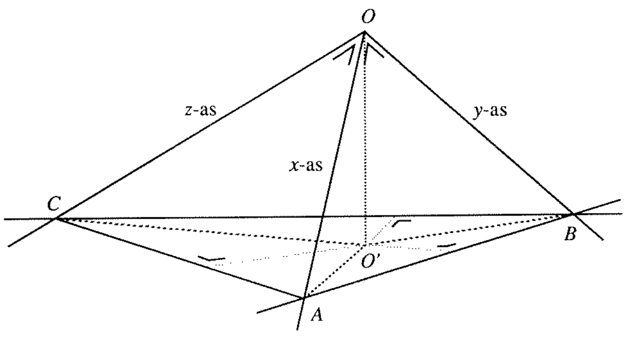
ingenieurs perspectief

De meest eenvoudige vorm van loodrechte projectie, afgezien van de bekende boven-, voor- en zijaanzichten, is de *isometrische projectie.* Daarbij maken in de tekening de drie hoofdrichtingen hoeken van 120 graden met elkaar en zijn de eenheden op de drie assen even groot. Bij het gebruik van deze projectiemethode is isometrisch papier (papier met een rooster van gelijkzijdige driehoekjes) warm aan te bevelen, ook voor de onderbouw!



In zijn artikel Voorbeelden [2] propageert Jan van de Craats het gebruik van de ingenieursprojectie. In de tekening maken de y-as en de z-as een hoek van 97,2 graden met elkaar en deelt de x-as de uitspringende hoek tussen y- en z-as in twee gelijke delen. Bovendien verhouden de eenheden op x, y- en z-as zich als 1,2 en 2. Wat zijn nu de uiterlijke kenmerken van een figuur in loodrechte projectie? Meer toegespitst: hoe kun je aan de tekening van een kubus zien of er sprake is van scheve of rechte projectie?

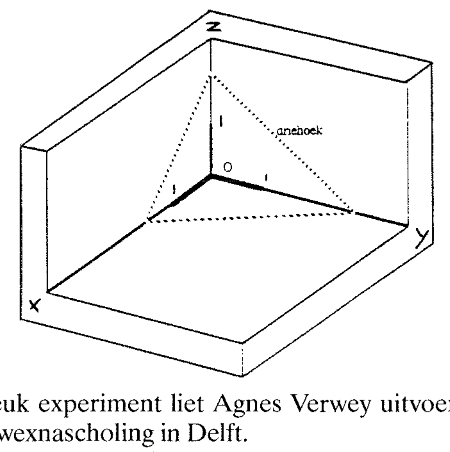
Om dat te onderzoeken, moeten we ons een beetje verdiepen in de achtergrond van de rechte parallelprojectie, ook wel axonometrie of beter rechte axonometrie genoemd. Het woord axonometrie zegt het al, we gaan daarbij uit van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$. Neem om te beginnen aan dat het tafereel (zeg V) waarop geprojecteerd wordt niet parallel is met één of twee van de coördinaatassen. Met andere woorden: vermijd de situatie waarbij in de vlakke voorstelling twee assen langs dezelfde rechte vallen of één as verschrompelt tot een punt. De x-as, y-as en z-as snijden het tafereel V respectievelijk in A, B en C.



Een interessante stelling is nu dat de projectie O' van O juist het hoogtepunt is van de (noodzakelijk) scherphoekige driehoek ABC.

Het bewijs rust op een klassiek stukje stereometrie: AO staat loodrecht op vlak OBC, dus BC loodrecht AO (a); OO' staat loodrecht V, dus BC loodrecht OO' (b); uit (a) en (b) volgt BC loodrecht vlak AOO', dus BC loodrecht AO' ofwel AO' is hoogtelijn in driehoek ABC. Mutatis mutandis voor BO' en CO'.

Deze stelling kan worden gevisualiseerd in een drievlakshoek van piepschuim. Knip een scherphoekige driehoek uit een overheadsheet en teken met viltstift de drie hoogtelijnen. Pas de driehoek met de zijden tegen de coördinaatvlakken. Kijk naar het hoekpunt zo dat de blikrichting loodrecht op het driehoekige vlak staat en je vangt oorsprong en hoogtepunt op één kijklijn.



Een leuk experiment liet Agnes Verwey uitvoeren op de Hawexnascholing in Delft.

Materiaal: een plastic rechthoekig doosje waarin een beetje water.

Het doosje wordt nu zo gedraaid dat een driehoekige waterspiegel ontstaat met hoekpunten op drie in één punt samenkomende ribben. Recht op de waterspiegel kijkend, zie je dat hoekpunt als hoogtepunt van de waterspiegel.

Aardig hierbij is het stukje dynamiek: moeiteloos kun je een driehoek van vorm laten veranderen.

Terug naar de figuur.

De lijnen OA, OB en OC worden verkort afgebeeld op het tafereel als OA', OB' en OC'. De verkortingsverhoudingen $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OB'}{OB}$ en $\frac{OC'}{OC}$ zijn gelijk aan de sinussen van de hoeken (zeg ϕ_x, ϕ_y en ϕ_z) die OO' maakt met de drie assen.

Uit $\cos^2\phi_x + \cos^2\phi_y + \cos^2\phi_z = 1$ (de driedimensionale Pythagoras) volgt uit eenvoudig:

$\sin^2\phi_x + \sin^2\phi_y + \sin^2\phi_z = 2$.

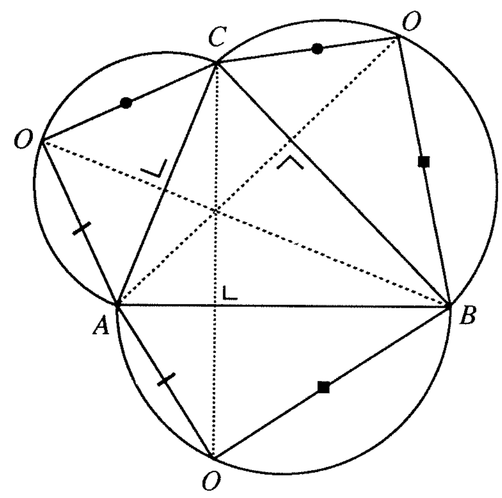
In woorden: de som van de kwadraten van de verkortingsverhoudingen in de drie asrichtingen is gelijk aan twee. Ga na dat deze stelling ook geldt in de twee 'ontaarde' gevallen van loodrechte projectie, waarbij de x-as verschrompelt tot een punt of waarbij x- en y-as in elkaars verlengde komen.

Bij de isometrische projectie is driehoek ABC een gelijkzijdige driehoek met O' als middelpunt; de verkortingsverhouding in elk van de drie asrichtingen is $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ (ruim 0,8 dus).

Als we bij de ingenieursprojectie de verkortingsverhouding in de x-richting gelijk stellen aan f, dan zijn die in de beide andere richtingen $2f$.

Hieruit volgt $9f^2 = 2$, dus $f = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ (0,47 ongeveer). Uit een figuur in ingenieursprojectie kunnen werkelijke afmetingen nu door meten en berekenen worden teruggevonden.

Fraai is ook de constructieve aanpak, waarbij het viervlak $OABC$ uitgeslagen wordt in een vlak.



De halve cirkels op de zijden AB, BC en CA garanderen de rechte hoeken tussen OA, OB en OC. De verkortingsverhoudingen $\frac{OA'}{OA}$, enzovoort, zijn nu constructief te gebruiken.

Kennelijk is het zo dat elke drie van O uitgaande lijnen die drie stompe hoeken vormen opgevat kunnen worden als loodrechte projectie van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$. Kies maar een punt A op de x-as en de driehoek ABC met de assen als hoogtelijnen ligt vast! Ook vast liggen de drie verkortingsverhoudingen. De ingenieursprojectie waarbij twee verkortingsverhoudingen gelijk zijn is een voorbeeld van een *dimetrische* projectie. Als de drie verkortingsverhoudin-