

Een schoolonderzoek ruimtemeetkunde

A. Roodhardt

CSG Oostergo, Dokkum

De eerste lichter kandidaten voor havo-wiskunde B heeft drie schoolonderzoeken ondergaan. Om wat meer ervaring op te doen hebben we op elke school één onderzoek in een minder traditionele vorm gehouden. Voor 'Oostergo' in Dokkum werd dat een practicum ruimtemeetkunde: 'de Achtkanter'.

Het idee steunt op twee belangrijke grondgedachten van het nieuwe programma: de leerling moet zijn kennis zoveel mogelijk opbouwen uit en relateren aan de werkelijkheid en de leerling moet in staat zijn nieuwe problemen aan te pakken.

Omdat we eventuele ongelukken met de normering wel zouden kunnen opvangen, hebben we het gewaagd naast enkele eenvoudige en 'gewone' problemen ook een aantal zeer moeilijke op te nemen. Die hoefden natuurlijk niet allemaal te worden opgelost.

Korte commentaren:

- De introductie van het object door een productievoorschrift geeft een duidelijk inzicht in de eigenschappen, zodat ook snel te zien is van welke kennis men mag uitgaan.
- Het monteren van het object leverde geen punten op, hoewel dat voor een flink aantal leerlingen een tijdrovende klus was. Sommigen voelden zich benadeeld omdat het stevige papier, waarop het bovenvlak moest worden overgenomen, te klein was. We hebben hem toen discreet ingefluisterd de tekening diagonaalsgewijs op het papier te leggen.
- *opgave 1, 2, 3*
Een 'verkenning' van het object. Meten in tekeningen en foto's was bekend. Toch hadden enkele leerlingen meer vertrouwen in hun berekeningen. Een aantal lukte het deze zekere punten te missen door uit te gaan van een ongebruikelijke voorstelling van het begrip 'verticaal'.
- *opgave 4*
Ook goed gemaakt. Soms trad een soort negatief van de 'horrorvacui' op: de doorsnede met het niet

bestaande vlak was goed, maar met het echte niet. Getuige deze oplossingen.

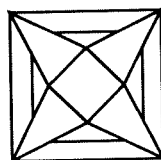


fig. 1

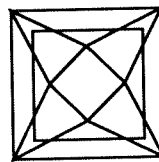
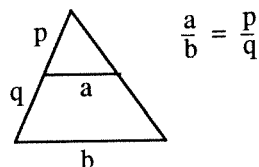


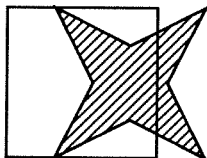
fig. 2

- *opgave 5*
Lastig en tamelijk slecht gemaakt. Het kwam vaak voor dat de lichamen waarin het object gesplitst werd, tezamen niet meer het origineel konden opleveren. Vooral de liggende piramide gaf moeilijkheden. Een probleem apart was het duidelijk weergeven van de oplossing. Dus zeer moeilijk te corrigeren.
- *opgave 6*
Veel goede oplossingen. Het voltooiën van een constructie was tijdens de lessen al een paar keer aan de orde gekomen. De meest voorkomende fout was het kiezen van een lengte in het bovenvlak.
- *opgave 7, 8, 9*
Weinig problemen. Fouten waren als regel terug te voeren tot verkeerde evenredigheden in driehoeken zoals de beruchte:



- *opgave 10*
Door minder dan de helft gemaakt. In die gevallen was de verantwoording van de oplossing uitstekend.

- *opgave 11*
Het zal na opgave 10 geen verbazing wekken dat dit nummer de mist inging.
- *opgave 12*
De standaardbehandeling van hoeken was nog niet aan de orde gekomen. Ondanks enkele goniometrische fouten wel aardig gemaakt.
- *opgave 13*
Zeer moeilijk. Lukte maar een enkeling.
- *opgave 14*
Dit was een volkomen nieuwe situatie, maar dat was geen beletsel voor een goed resultaat. Toch hebben sommige leerlingen zich de zaak niet voorgesteld bij het echte object, zoals uit dit type oplossing blijkt.



- *opgave 15*
Voor deze leerlingen niet zo eenvoudig, omdat ze niet kunnen steunen op de traditionele meetkunde.
- *opgave 16*
Voor de bolleboos.

In havo-5 weer met een schaar papiertjes knippen was natuurlijk een leuke herinnering aan de kleuterschool, maar ja, als je daardoor van die leraren een leuk cijfer kunt loskrijgen, dan doe je dat serieus met een brede grijns. Gaandeweg gingen de grijnzen over in denkrimpels. Maar de meesten vonden deze vorm van schoolonderzoek wel aantrekkelijk.

Wat vonden we er zelf van?

Over het resultaat zijn we, in aanmerking genomen de nieuwheid van deze vorm en de in dit jaar nog niet ideale voorbereiding, redelijk tevreden.

Tevreden zijn we ook met het feit dat de leerlingen zich bij de confrontatie met een nieuw probleem niet zo gauw gewonnen gaven. Wel vonden we dat de tastbare aanwezigheid van het object nog niet voldoende werd uitgebuit.

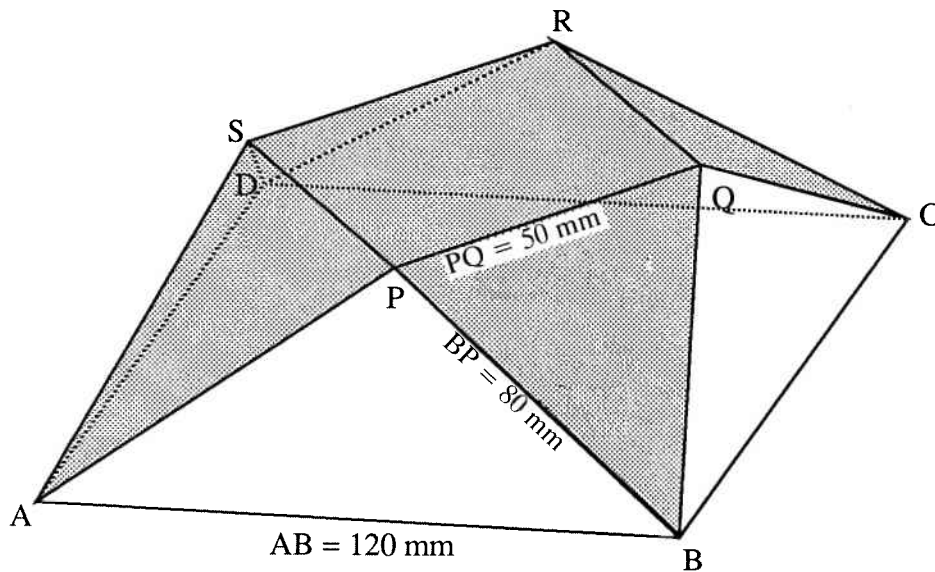
De presentaties van de oplossingen liepen uiteen van slecht en slordig tot knap en nauwgezet. Het is moeilijk daar tijdens de lessen altijd voldoende aandacht aan te schenken. Het is jammer dat zulke kwaliteitsverschillen vaak moeilijk in de becijfering zijn door te geven. Mocht dat gewenst zijn, dan kan dat pas gestimuleerd worden door correctievoorschriften van het centraal examen.

De spreiding over de leerstof vonden we ook achteraf goed. De verdeling over de moeilijkheidsgraden had beter gekund. Een van de zeer moeilijke problemen had beter vervangen kunnen worden door een paar vragen uit het bovengebied van de middenklasse.

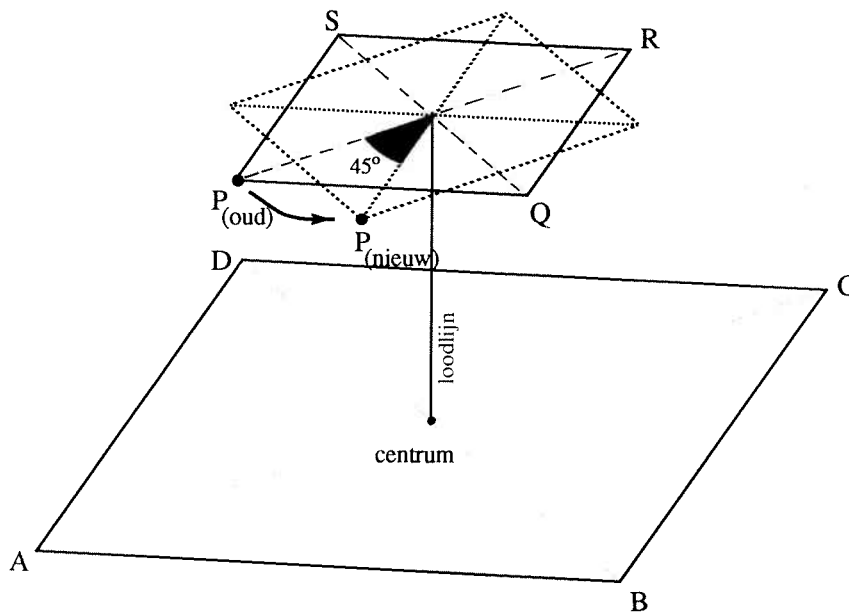
Besluit: Wij vinden deze vorm van schoolonderzoek de 'moeite' waard.

Inleiding

Dit practicum gaat over achtkanters, waarvan je hier een exemplaar ziet.



Het volgende verhaal geeft je bijzonderheden van zo'n lichaam. In plaats van een opsomming is gekozen voor de beschrijving van een ontstaanswijze. Hieruit kun je heel veel eigenschappen aflezen die je dan ook zonder meer mag gebruiken. Omdat dit lichaam zoveel symmetrieën bevat, kun je deze achtkanters 'regelmatig' noemen.



Je kunt je het ontstaan van dit lichaam zo voorstellen:

In het centrum van het vierkante grondvlak ABCD wordt een loodlijn op dit vlak opgericht. Het andere uiteinde van de loodlijn is het centrum van een kleiner vierkant PQRS dat dezelfde stand heeft als ABCD en daarmee evenwijdig is. Dit bovenvlakje wordt vervolgens 45° gedraaid. De nieuwe punten P, Q, R, S worden met het grondvlak verbonden en wel: P met A en B, Q met B en C, R met C en D, S met D en A.

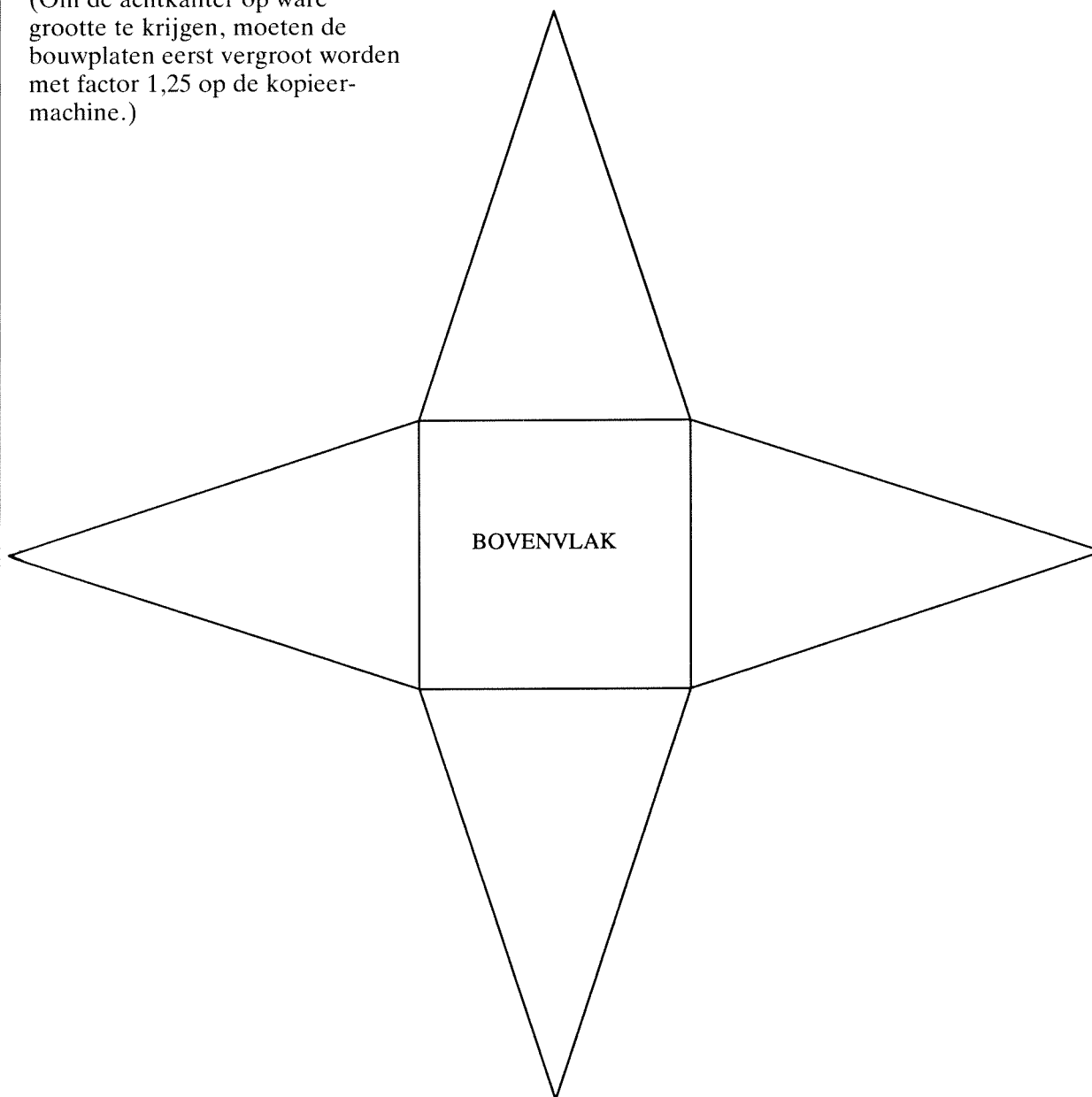
Het maken van achtkanters

Voor het uitvoeren van het practicum heb je een model van papier nodig. Dat wordt gemaakt van twee bouwplaten.

De eerste bouwplaat (zie hieronder) bevat het bovenzvlak met daaraan verbonden de vier zijvlakken waarvan de punt naar beneden wijst. (In de tekening op de vorige bladzijde is dit het gearceerde deel.)

De tweede bouwplaat bevat het grondvlak. (Zie volgende pagina.)

(Om de achtkanter op ware grootte te krijgen, moeten de bouwplaten eerst vergroot worden met factor 1,25 op de kopieer-machine.)



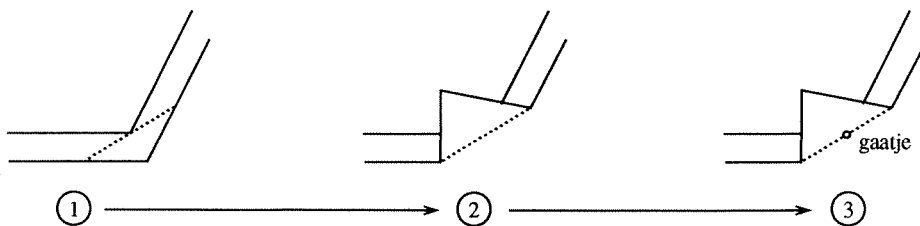
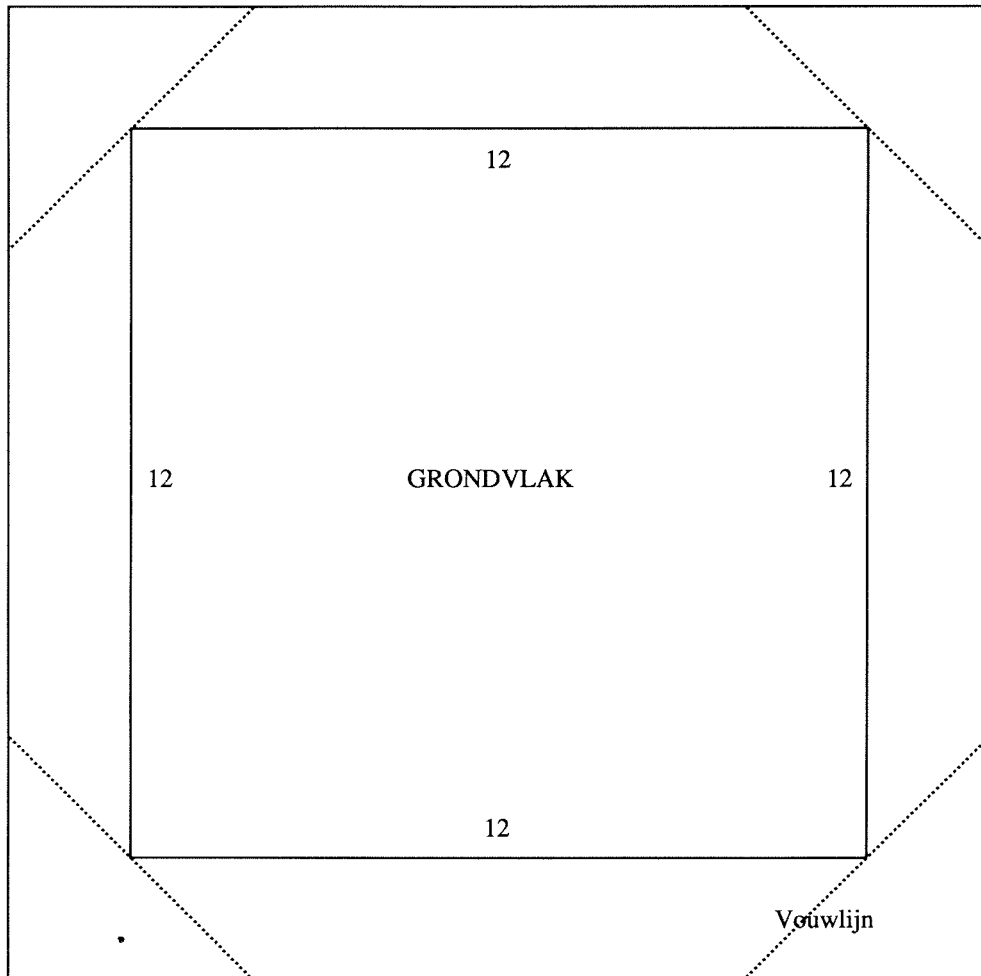
Achtkanter

(Practicum Ruimte meetkunde)

De vier zijvlakken waarvan de punt naar boven wijst blijven in het model open. Die moet je er natuurlijk wel bij denken.

Door de eerste bouwplaat op steviger papier te leggen en met de passer de hoekpunten door te prikken, kan de tekening op dat papier worden gemaakt. Knip de figuur als één geheel uit. De grensribben kunnen geritst worden om het vouwen te vergemakkelijken.

Het grondvlak kan zo blijven. Door langs de stippellijnen te vouwen en bij de hoekpunten kleine gaatjes te knippen, kan het bovenstuk passend bevestigd worden.



Practicum Ruimte meetkunde 'de Achtkanter'.

Achtkanter

(Practicum Ruimte meetkunde)

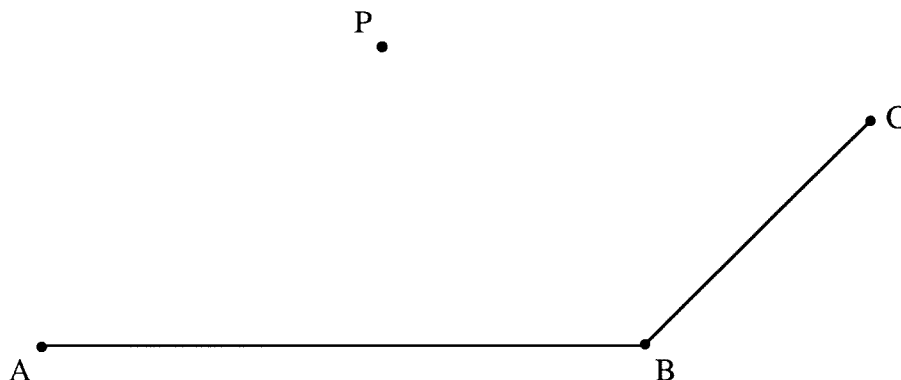
Opdrachten 1 t/m 6

De lengten van AB, PQ en BP (respectievelijk 120, 50, en 80) kunnen zo gebruikt worden. Andere benodigde lengten moeten door metingen worden vastgesteld (N.B. in mm.)

De tekeningen van deze opgaven mogen niet aangevuld worden met lijntjes en getallen voor de opdrachten na nummer 6. Daarvoor zul je duplicaten, die niet zo nauwkeurig hoeven te zijn, moeten gebruiken.

① t/m ④ millimeterpapier

- ① Teken op ware grootte de verticale doorsnede door AC.
- ② Teken op ware grootte de verticale doorsnede door QS.
- ③ Teken het bovenaanzicht op ware grootte.
- ④ Vlak V is parallel met het grondvlak en verdeelt de loodlijn uit P op het grondvlak in twee gelijke delen.
(Populair gezegd: V is het horizontale vlak op halve hoogte van de achtkanter.)
Teken in de figuur van ③ de doorsnede van V met de achtkanter.
- ⑤ Bepaal de inhoud van de achtkanter.
- ⑥ Van een *andere* regelmatige achtkanter is op de tekening hieronder een gedeelte van de scheve projectie gegeven.
Vul deze tekening aan met het bovenvlak PQRS en geef een korte beschrijving van de gebruikte werkwijze.

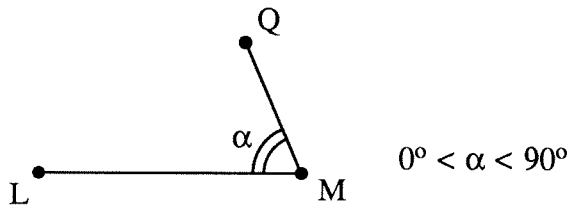


Practicum Ruimte meetkunde 'de Achtkanter'.

Opdrachten ⑦ t/m ⑬

Berekeningen moeten uitgaan van de gegeven lengten $AB = 120$, $PQ = 50$ en $BP = 80$. Antwoorden mogen dus niet steunen op metingen. Metingen ter controle zijn natuurlijk toegestaan.

- ⑦ Over het 'dak' van het lichaam wordt een touw van A naar C gespannen. Bereken de lengte van dat touw, wanneer dat strak gespannen staat.
- ⑧ Bereken de hoogte van de achtkanter.
- ⑨ K ligt op AP. De lengte van PK noemen we x , met $0 < x < 80$. Het vlak door K parallel met het grondvlak heeft een achthoekige doorsnede met het lichaam. Bereken de omtrek van deze achthoek als $x = 30$.
- ⑩ De omtrek van de achthoek is een functie van x . Bepaal het functievoorschrift.
- ⑪ Voor welke waarde van x zijn alle zijden van die achthoek even lang?
- ⑫ L is het midden van AD en M is het midden van BC. De hoek tussen LM en MQ noemen we α . Deze hoek is tevens de hoek die het zijvlak BCQ met het grondvlak ABCD maakt.

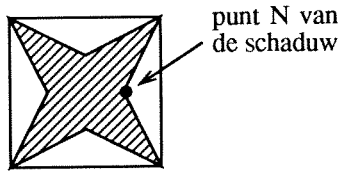


Bereken α in gehele graden.

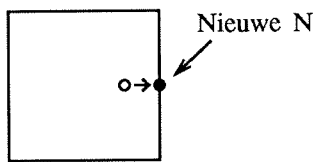
- ⑬ Vervolg op ⑫. Nog steeds geldt dat de achtkanter regelmatig is met $AB = 120$ en $BP = 80$. Maar de lengte van PQ hoeft niet meer 50 te zijn. Een andere lengte van PQ kan bereikt worden door hoek α te veranderen. De lengte van PQ is een functie van α . Bepaal het functievoorschrift.

Schaduw van de achtkanter

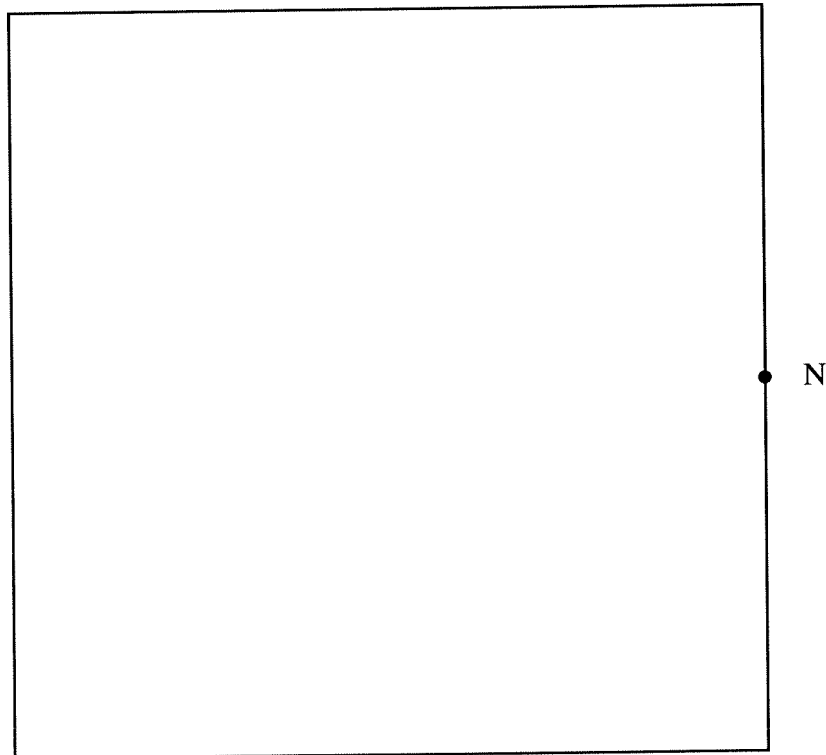
De achtkanter van papier wordt beschenen door een bundel evenwijdige stralen loodrecht op het grondvlak. Daardoor ontstaat er op het grondvlak een schaduw van deze vorm.



- ⑭ Door de stand van de lichtbron of van het lichaam geleidelijk te veranderen, treffen de stralen het grondvlak niet meer loodrecht. De schaduw gaat dan ook 'wandelen'. Het is mogelijk het punt N daarbij midden op de rand van het grondvlak te krijgen.



Teken op het plaatje hieronder de schaduw die bij deze situatie hoort.



- ⑮ Punt N kan in een rechte lijn van de oude naar de nieuwe stand gaan. Toon aan dat de oppervlakte van de schaduw 'onderweg' steeds even groot is.

Achtkanter

(Practicum Ruimte meetkunde)

- ⑩ De achtkanter in deze opdracht is niet meer regelmatig. De volgende bijzonderheden zijn wel gebleven:
- Grondvlak en bovenvlak zijn evenwijdige vierkanten.
 - De ligging van grondvlak en bovenvlak vertoont de draaiing van 45° .

Nieuw is:

- Het zijvlak ADS is een gelijkbenige driehoek met S als top die loodrecht op het grondvlak staat.
(De zijvlakken ABP, BCQ en CDR staan wel naar binnen.)

Maak van karton het deel van die achtkanter dat bestaat uit het grondvlak en de vier zijvlakken ADS, ABP, BCQ, CDR. Het resultaat moet uit één stuk bestaan. De stand hoeft niet te worden vastgezet.

- Geef een toelichting op het ontwerp.