Tussen servet en tafellaken

Meso Mathematische Studies

F. van der Blij
OW & OC, RU Utrecht

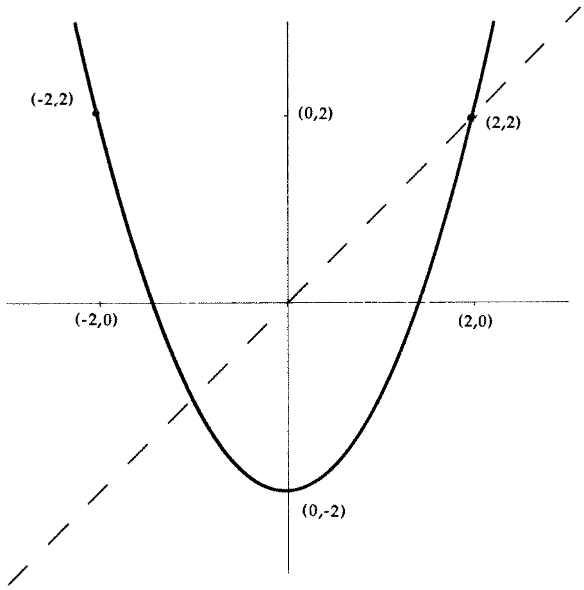
Samenvatting

Mesowiskunde wil díe wiskunde omvatten die meer dan elementaire (school)wiskunde is, maar geen echte (research)-wiskunde.
De normale wiskundekennis van de docent uit het voortgezet onderwijs is als regel voldoende om zelf met de problemen aan het werk te gaan.

In dit artikel willen we enkele problemen en thema's aan de orde stellen die meer wiskundige voorkennis en vaardigheid vragen dan de leerlingen in het voortgezet onderwijs bezitten. Aan de andere kant zullen wiskundige onderzoekers, de onderwerpen uit de echte vaktijdschriften als norm hanterend, dit alles erg elementair vinden.

Ikzelf had plezier in het ontdekken. Misschien hebben enkele lezers van de Nieuwe Wiskrant, als ze de problemen echt aanpakken, er net zoveel plezier in. Wiskunde doen is een leuke bezigheid, ook als het niet nuttig is!
Is dit verhaal een concurrent van de puzzelrubriek van Aad Goddijn? Er is wel verwantschap!

1. Laat $f(x) = x^2 - 2$. We schrijven $f^{(2)}(x)$ voor $f\{f(x)\}$, $f^{(3)}(x)$ voor $f[\{f(x)\}]$ enzovoort. Zoek bij gegeven k alle getallen x met $f^{(k)}(x) = x$. (Periodiciteit bij iteratie). Uit de grafiek van f zien we dat voor zulke x moet gelden $|x| \leqslant 2$.
Voor $k = 1$ en 2 is het direct te doen. Voor $k = 3$ en 4 voert het met wat aardig puzzelwerk tot het oplossen van derde graads vergelijkingen, die òf numeriek, òf met Cardano, òf goniometrisch aangepakt kunnen worden. Er is best een aardig meso artikel over te schrijven!



$f(x) = x^2 - 2$ vergeleken met $f(x) = x$

fig. 1

2. In een cirkel beschrijven we een regelmatige n-hoek. De hoekpunten noemen we $P_0, P_1, P_2, \ldots$
We rekenen de indices modulo n, dus $P_{n+3} = P_3$ enzovoort. We kiezen een (natuurlijk) getal a en trekken de verbindingslijnen van P_i naar P_{ai} voor

$t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Wat voor patroon vormen deze lijnen? Voor $a = 2, 3, 4, 5, 6$ zien we een soort spirograafkromme ontstaan. Kunnen we bewijzen dat er echt epicycles te zien zijn? Met een beetje differentiaalrekening lukt het best. Maar wat gebeurt er als a veel groter wordt, misschien in de buurt van n komt?

3. In een vakantiecursus van het Centrum voor Wiskunde en Informatica vertelde Prof. Van de Craats ons, hoe handig het voor de meetkunde van de driehoek is om het vlak op te vatten als complex vlak met de oorsprong in het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Noem de hoekpunten α, β en γ. Het zwaartepunt is dan $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$. Enig vernuft laat zien dat het hoogtepunt $(\alpha+\beta+\gamma)$ is.
Als $\rho = F(\alpha, \beta, \gamma)$ een meetkundig te definiëren punt van de driehoek voorstelt, moet $F(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda F(\alpha, \beta, \gamma)$.

(Complexe vermenigvuldiging is een gelijkvormigheidstransformatie.)
Waar zou $-\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ liggen? We zien $|\frac{\alpha\beta}{\gamma}| = |\alpha| = |\beta| = |\gamma|$ dus het is een punt op de omgeschreven cirkel, maar waar? Wat is de betekenis van het punt $\frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{\beta\gamma}{\alpha}$?

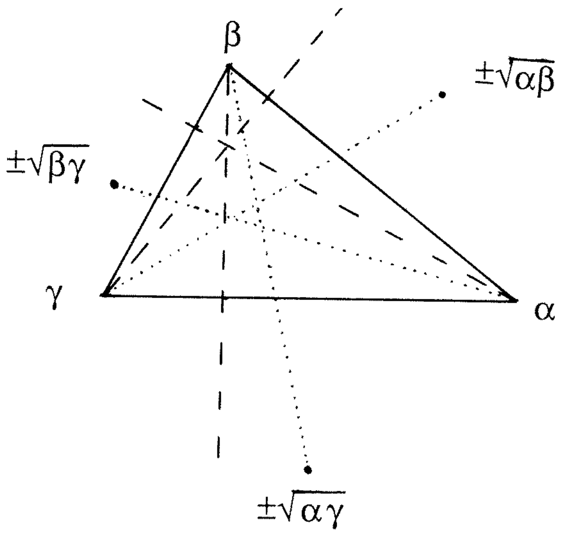


fig. 2

Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is zo ongeveer $\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\alpha\gamma}$. Maar alleen maar zo ongeveer, want wat is de wortel uit een complex getal? Er zijn er twee. Er staan dus in $\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\alpha\gamma}$ wel acht punten! Vier kan ik begrijpen, door de complexe benadering verdween 'binnen' en 'buiten', en de drie aangeschreven cirkels zijn niet te onderscheiden van de ingeschreven cirkel. Wat zijn de andere vier?

Een fraaie stelling van Morley vertelt dat de drie in de tekening aangegeven snijpunten van trisectrices (lijnen die de hoeken van een driehoek in drie gelijke delen verdelen) een gelijkzijdige driehoek vormen. Is dit met complexe getallen te bewijzen? Maar hoeveel trisectrices van een hoek zijn er? Een veelvoud van $\frac{2\pi}{3}$ mag niet weggelaten worden.

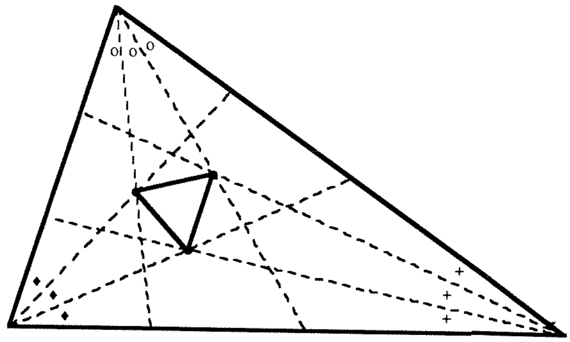


fig. 3

4. Als je met n munten gaat gooien is de kans op kop, bij een eerlijke munt, 50%. Er zullen dus $\frac{1}{2}n$ munten op kop liggen. Natuurlijk niet waar. Er zullen ongeveer $\frac{1}{2}n$ munten op kop liggen. Als n oneven is, zullen nooit precies $\frac{1}{2}n$ munten op kop liggen.
Wat is de kans dat er bij het werpen met $2n$ munten precies n met de kop boven liggen? O, ja, natuurlijk $\binom{2n}{n} \cdot 2^{-2}$.
Hoeveel is dit? Het rekendoosje laat snel afweten. Maar een tabel doet vermoeden dat dit aantal groeit als $\sqrt{n}$. Is het ongeveer $c \cdot \sqrt{n}$, waarin c een constante is? Is er een asymptotiek, en hoeveel is c? Herinnert u zich nog dat $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, of gelooft u dat niet? Is een nauwkeuriger formule te vinden? Heus $c \cdot \sqrt{n} \cdot e^{\frac{1}{8n}}$ is echt beter. Waarom?

5. Nameten doet vermoeden dat de som van de hoeken van een driehoek ongeveer 180° is. Soms wat meer, soms wat minder. Bij het werpen met munten was soms wat meer, soms wat minder heel normaal. Is het met de som van de hoeken van een driehoek ook zo gesteld?

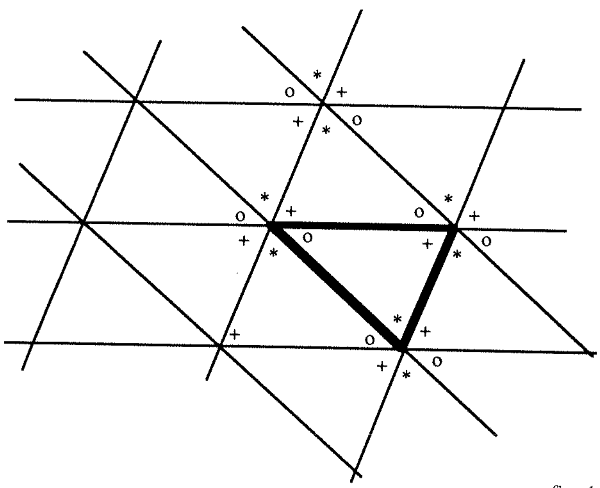


fig. 4

We tekenen een driehoek en merken op dat we met congruente driehoeken het vlak kunnen overdekken. Uit de figuur zien we direct dat de som van de driehoeken 180° moet zijn; en wel precies 180°.

Figuur 5 laat ook een driehoek zien. Als we zo'n driehoek heel klein tekenen, anders gezegd, van ver weg bekijken, krijgen we figuur 6.

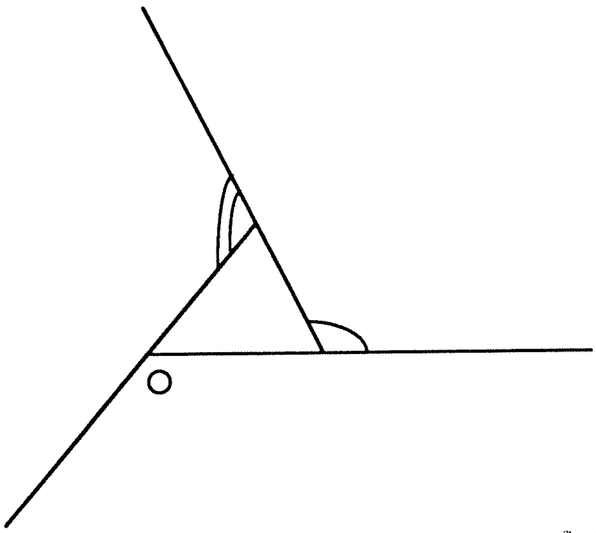


fig. 5

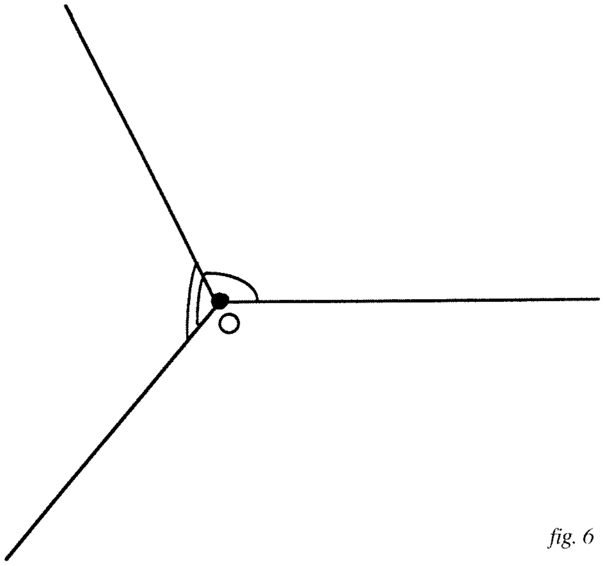


fig. 6

De som van de driehoeken die nu in een punt samen lijken te komen, is 360° en daarmee vinden we in figuur 5 direct dat de som van hoeken van de driehoek 180° is. En weer precies!

Vreemd is dat in de 'echte' wiskunde het niet zo vanzelfsprekend is dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is. Er is een apart axioma over evenwijdige lijnen voor nodig. In niet euclidische meetkunde is de stelling fout!
Wat leren onze bewijzen ons? In het eerste veronderstelden we dat de wereld met congruente driehoeken betegeld kon worden op de manier als we in figuur 4 aangaven. Dat kan alleen in het euclidische vlak.
In het tweede geval bewezen we eigenlijk alleen dat de som van de hoeken van heel kleine (infinitesimale) driehoeken (bijna) 180° is. En uit de boldriehoeksmeting weten we dat bij boldriehoeken bijvoorbeeld de oppervlakte een maat is voor het overschot van de hoekensom over 180°.