Vijf mannen en een aap

J. W. Nienhuys
Technische Universiteit, Eindhoven

In de Folio-bijlage van de Volkskrant van 17 juni 1989 stond een raadsel vermeld (in een recensie van puzzelboeken):

> Vijf mannen en een aap lijden schipbreuk en komen op een eiland. Ze verzamelen een grote berg kokosnoten die ze de volgende dag zullen verdelen. 's Nachts besluit man A het zekere voor het onzekere te nemen en een deel van de kokosnoten voor zichzelf te reserveren. In het geheim deelt hij de berg in vijf gelijke delen. Hij houdt één kokosnoot over. Die geeft hij aan de aap. Hij verbergt zijn deel en gooit de rest weer op een hoop.
> In de loop van de nacht doen de vier andere mannen ieder voor zich hetzelfde. Bij elke verdeling blijft er één noot over, die naar de aap gaat.
> De volgende ochtend wordt het restant in vijf gelijke delen verdeeld. Er blijft nu niets voor de aap over. De vraag is hoeveel kokosnoten de originele berg bevatte.

De recensent, Ed Schilders, vermeldde over dit raadsel dat het één van de treiterachtigste hersenkrakers was en dat die bedacht was door de Amerikaanse schrijver en journalist Ben Ames Williams. Het kokosnotenraadsel (schreef Schilders) dateert uit 1947 en is de laatste journalistieke kraker die bijna voor een lezersoproer heeft gezorgd.

Ook in de Volkskrant ontstond over dit probleem een discussie. Die discussie is interessant vanuit onderwijskundig standpunt. Zaken als meerdere methoden om hetzelfde probleem op te lossen, botte en slimme manieren, onduidelijkheid in de vraagstelling zijn er allemaal in terug te vinden.
De discussie over deze opgave werd op gang gebracht door een ingenieur uit Lisse, die dit probleem oploste met een programmaatje (zaterdag 24 juni 1989). Het programmaatje probeerde voor alle getallen onder de 10.000 of de opeenvolgende gehele delingen wel uitkwamen. Toen kwam het lezerscorps in actie. De zaterdag erop wierpen zich acht briefschrijvers in de strijd, waarna de redactie de discussie sloot.

Uit de discussie bleek dat de vraagstelling toch niet geheel duidelijk was. Twee briefschrijvers interpreteerden de nachtelijke handelwijze van de mannen elk op een eigen, andere manier, namelijk als volgt:

I 'de rest' = alles wat er overblijft, inclusief de ene noot die aan de aap toegedacht was.
II De berg wordt in vijf gelijke delen verdeeld. Dit is mogelijk. De man neemt zelf éénvijfde mee en zondert van de resterende $\frac{4}{5}$ een enkele noot af die hij niet bij de berg kokosnoten legt, maar bij de aap.

De meeste lezers hebben de drie gegevens 'Hij deelt de berg in vijf gelijke delen' en 'Hij houdt één kokosnoot over' en 'Die geeft hij aan de aap' weten te combineren tot iets dat zich wiskundig zó laat formuleren: de berg bevat eerst $5x + 1$ noten, en daarvan wordt er één bij de (slapende) aap neergelegd. Uiteraard neemt de man dan zelf x mee, en laat $4x$ achter. Bijvoorbeeld 31 noten worden verdeeld in vijf hoopjes van zes, één blijft over voor de aap, zes worden er meegenomen, en de resterende 24 gaan weer bijelkaar.

Moraal: het is erg lastig om in woorden precies te zeggen waarom het gaat. Lezers kunnen zulke woorden vaak anders uitleggen dan bedoeld was. Als je probeert dubbelzinnigheid te vermijden ontstaat vaak een woordenbrij die door zijn afmeting alleen al verwarrend werkt. Mijn ervaring is dat in zo'n geval een getallenvoorbeeld vaak duidelijk maakt wat de bedoeling is. In dit geval zou je beter kunnen zeggen dat de man eerst één kokosnoot bij de slapende aap legt en dat hij daarna precies éénvijfde van de berg meeneemt.

De aanvankelijke briefschrijver meende dat zijn of haar oplossing erg elegant en kort was (de computer deed er maar een paar minuten over) en dat met pen en papier die oplossing bepalen erg bewerkelijk zou zijn. Diverse briefschrijvers deelden die mening niet en lieten zich in emotionele bewoordingen (verwekende welvaartsstaat, beledigend voor intelligentie, buitengewoon plomp) uit over de computermethode. Kennelijk voelen velen dat het bij een puzzeltje de bedoeling is met slimheid op eigen kracht achter de oplossing te komen. Op zo'n manier een computer inschakelen lijkt op de marathon per auto afleggen. Vijf briefschrijvers merkten op dat je gemakkelijk kunt inzien dat je niet alle getallen hoeft te proberen, maar dat je in stappen van vijf of meer alle getallen kunt proberen.

Drie briefschrijvers presenteerden een min of meer wiskundige aanpak. Eén aanpak zou kunnen zijn de aantallen die over zijn vóór meneer A, B enzovoorts hun slag hebben geslagen, aan te geven met A, B enzovoorts. De berg die na de vijfde man overblijft heeft F noten. Het aandeel dat iedereen krijgt bij de verdeling 's morgens noemen we G. Dan resulteert het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{5}{4}B + 1 & 4A &= 5B + 4 \\ B &= \tfrac{5}{4}C + 1 & 4B &= 5C + 4 \\ C &= \tfrac{5}{4}D + 1 & 4C &= 5D + 4 \\ D &= \tfrac{5}{4}E + 1 \quad \text{oftewel} & 4D &= 5E + 4 \\ E &= \tfrac{5}{4}F + 1 & 4E &= 5F + 4 \\ F &= 5G & F &= 5G \end{aligned}$$

Hier kun je op diverse manieren mee verder. De bedoeling is natuurlijk gehele positieve oplossingen te vinden. Aan de vergelijking kun je zien dat B tot en met G door 4 deelbaar zijn. Als je alleen naar de laatste drie vergelijkingen kijkt kun je al gemakkelijk inzien dat $G = 4(3+4x)$ moet zijn, met x geheel. Dat beperkt het uitproberen aanzienlijk. Maar uitproberen is natuurlijk toch een variatie op de computermethode.

Een andere manier om hiermee verder te gaan is B tot en met G uit deze vergelijking te elimineren. Dat lijkt omslachtig, maar valt mee: als je de vergelijkingen van beneden naar boven met stijgende machten van 4 vermenigvuldigt krijg je:

$$\begin{aligned} 1024A &= 5 \cdot 256B + 1024 \\ 256B &= 5 \cdot 64\ C + 256 \\ 64C &= 5 \cdot 16\ D + 64 \\ 16D &= 5 \cdot 4\ \ E + 16 \\ 4E &= 5 \cdot \ \ F + 4 \\ F &= 5G. \end{aligned}$$

Van onder naar boven substitueren levert dan:

$1024A = 15625G + 8404.$

Voor dit type vergelijking is een standaardmethode die een beetje bewerkelijk is. In feite gaat de techniek om dit type vergelijkingen op te lossen al terug op de oude Grieken (Euclides en Diophantus). We doen dit voor, eigenlijk meer om de methode te laten zien. Het rekenwerk is in dit geval nogal een gedoe. We beginnen met twee flauwe gelijkheden op te schrijven.

$$\begin{aligned} 1024 \cdot 0 &= 15625 \cdot 1 - 15625 \\ 1024 \cdot 1 &= 15625 \cdot 0 + 1024 \end{aligned}$$

De onderste gelijkheid vermenigvuldigen we met 15 (in gedachten) en we trekken het resultaat af van de bovenste. Het resultaat is:

$$1024 \cdot 15 = 15625.1 - 265$$

Waarom 15? De bedoeling is dat we het achterste getal kleiner maken. Deze truuk kunnen we herhalen. Nu trekken we viermaal de laatste gelijkheid af van de voorlaatste. We krijgen dan:

$$1024 \cdot 61 = 15625 \cdot 4 - 36$$

Zo gaan we door tot het achterste getal niet meer kleiner gemaakt kan worden.

$$\begin{aligned} 1024 \cdot -412 &= 15625 \cdot -27 - 13 \\ 1024 \cdot 1297 &= 15625 \cdot 85 + 3 \\ 1024 \cdot 4776 &= 15625 \cdot 313 - 1 \end{aligned}$$

We hebben nu opgelost de vergelijking:

$1024A = 15625G - 1.$

Dat is weliswaar de verkeerde vergelijking, maar we zijn toch in zicht van de haven. Als we linker- en rechterzijde van de laatste gelijkheid met -8404 vermenigvuldigen krijgen we:

$$1024 \cdot (-40137504) = 15625 \cdot (-2630452) + 8404.$$

Dus $A = -40137504$ is een oplossing. Aan de vergelijking $1024A = 15625G + 8404$ zien we dat we bij gegeven A altijd een veelvoud van 15625 mogen optellen, als we een zelfde veelvoud van 1024 dan ook maar bij G optellen. Dat passen we toe om een positieve oplossing te verkrijgen. Als we het 2569-voud van 15625 bij die nare negatieve oplossing optellen, verkrijgen we 3121. De gevraagde positieve oplossingen voor A zijn dus 3121 plus een 15625-voud. Het is niet moeilijk om in te zien dat je op deze manier alle oplossingen vindt.

Het rekenwerk valt behoorlijk tegen, hoewel we met deze methode niet meer zijn aangewezen op de methode van 'oplossingen proberen tot er eentje lukt'. In elk geval, de briefschrijver die deze oplossing presenteerde, schreef erbij dat zo'n oplossing de voldoening geeft van een intellectuele prestatie. Hij liet doorschemeren dat hij net de derde klas vwo achter de rug had, en niet over computers beschikte. Met zulke derde klassers mogen we blij zijn!

Het kan echter wel eenvoudiger. Daarvoor moet je gebruik maken van de structuur van het probleem. Kijk even naar de bovenste vijf vergelijkingen. Dat zijn allemaal dezelfde vergelijkingen. Kunnen we niet gewoon voor A tot en met F hetzelfde getal invullen? Welk getal dat is, is een kwestie van één vergelijking met één onbekende $x = \frac{5}{4}x + 1$, en de oplossing is evident: $x = -4$.

We hebben in één klap een oplossing gevonden voor elk van vijf inhomogene vergelijkingen. Als je eenmaal een inhomogene vergelijking hebt opgelost, dan hoef je alleen nog maar de bijbehorende homogene vergelijking op te lossen [1]. Wat moet er nog bij die -4 opgeteld worden om de ware A, B enzovoorts te verkrijgen? Laten we die getallen even a, b, enzovoorts noemen. Dus $A = a - 4$, $B = b - 4$ enzovoorts. De vergelijking $A = \frac{5}{4}B + 1$ gaat dan over in $a - 4 = \frac{5}{4}b - \frac{5}{4} \cdot 4 + 1$, oftewel $a = \frac{5}{4}b$. Zo krijgen we voor het hele stelsel:

$$a = \tfrac{5}{4}b;\ \ b = \tfrac{5}{4}c;\ \ c = \tfrac{5}{4}d;\ \ d = \tfrac{5}{4}e;$$
$$e = \tfrac{5}{4}f;\ \ f - 4 = 5G,$$

waaruit volgt $a = (\frac{5}{4})^5 f$. Het is duidelijk dat f deelbaar moet zijn door 4^5, zeg $f = 4^5 y$ en dan volgt daaruit $a = 5^5 y$. Maar dan hebben we nog een vergelijking genegeerd, namelijk de laatste.

We krijgen dan $4^5 y = 5G + 4$, oftewel:

$$1024y = 5G + 4,$$

hetgeen we schrijven als:

$$1025y - 5G - 5 = y - 1.$$

Het is duidelijk dat $y - 1$ een vijfvoud is, dus $y = 5k + 1$, voor de een of andere gehele niet-negatieve k. Elk zo'n vijfvoud plus een geeft een gehele waarde voor G. Met andere woorden, $a = 5^5(5k + 1)$, en dus is de uiteindelijke oplossing gelijk aan $5^5 - 4 + 5^6 k$, met gehele niet-negatieve k (kleinste waarde 3121). Het aardige van deze oplossing is dat je hem eventueel geheel uit het hoofd kunt vinden, zonder pen en papier. Ik moet overigens bekennen dat ik het verwerken van de laatste vergelijking niet uit het hoofd heb gedaan, maar op het randje van de krant.

Samenvattend, zou je deze oplossing kunnen kenschetsen als een opdeling van het probleem. In de eerste stap kijk je alleen naar de nachtelijke activiteit, en je begint met een eenvoudige oplossing te zoeken. Trek je niets aan van de beperking dat het aantal kokosnoten positief moet zijn. Daarna de algemene oplossing voor het stiekeme gebeuren. Tot slot ga je na welke van de stiekeme oplossingen een berg achterlaten die door vijf deelbaar is.
De andere interpretaties (I en II) van het vraagstuk kunnen ook zo worden opgelost, de oplossingen zijn dan $5^5 + 1 + 5^6 k$ (kleinste waarde 3126) voor versie I en $5^6 - 5 + 5^6 k$ (kleinste waarde 15260) voor versie II, telkens met k geheel en niet-negatief, dus nul op z'n kleinst.

Dit vraagstuk kan op meerdere manieren worden aangepakt en de vraagstelling kan zelfs op meerdere manieren worden opgevat. Botte methoden van alles proberen (zonder nadenken), kun je verbeteren door even je verstand te gebruiken. Je moet niet verbaasd zijn als nieuwe puzzeltjes kunnen worden opgelost met technieken die tweeduizend jaar oud zijn. Het loont om de structuur van het vraagstuk te gebruiken, en ook om te proberen het probleem in delen te splitsen. Als je het slim aanpakt, kun je de computer hetzij uit laten staan, hetzij duizenden malen efficiënter gebruiken.
Misschien is de belangrijkste les van deze briefwisseling dat er nog heel wat mensen zijn die warm lopen voor puzzeltjes met een wiskundige inslag.

Noot

[1] Een vergelijking waarin alleen maar optellingen en vermenigvuldigingen voorkomen, en waarin de onbekenden alleen maar vermenigvuldigd worden met getallen en niet met zichzelf of andere onbekenden, heet een *lineaire* vergelijking. Als er in de vergelijking termen ongelijk nul voorkomen zonder onbekenden, dan heten dat *inhomogene* termen, en de vergelijking of het stelsel vergelijkingen heet dan ook inhomogeen. Als je de inhomogene termen weglaat, ontstaat de bijbehorende *homogene* vergelijking. Een standaard wiskundige techniek is eerst één oplossing van de inhomogene vergelijking zoeken. Wat daar dan nog bijgeteld moet worden is een oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking.