

# Economie en wiskunde A, een nadere analyse

A. van Streun

Didactiek van de wiskunde, RU Groningen

## Oriëntatie

Een zwak punt bij leerplanontwikkeling in Nederland is het ontbreken van een landelijk evaluatieplan, uit te voeren enige jaren nadat tot invoering van het nieuwe leerplan is overgegaan. De ervaringen van een beperkt aantal, niet aselekt gekozen, ontwikkelingsscholen laten zich slecht generaliseren naar de gehele populatie van docenten en scholen waarvoor het nieuwe leerplan is bestemd. Ook bij de invoering van wiskunde A en B op het vwo en straks (1990) op het havo is niet voorzien in zo'n landelijk evaluatie-onderzoek, zodat we moeten proberen op grond van incidentele ervaringen (zie het artikel van Van der Horst en Woudhuijsen elders in dit nummer [1]) algemene conclusies te trekken. Een hachelijke zaak!

Een belangrijk aspect van het nieuwe vak wiskunde A is dat leerlingen leren om generalisaties op grond van beperkte data kritisch op hun waarde te beoordelen. Omdat duidelijk is dat de genoemde auteurs daar niet aan toe zijn gekomen, begin ik daarmee. Een tweede algemeen leerdoel in wiskunde A is dat leerlingen leren een als logisch gepresenteerde redenering met behulp van enige wiskunde op vooronderstellingen en zindelijk denken te analyseren. Dat probeer ik eveneens met het betoog in het genoemde artikel over wiskunde A. Tenslotte blijven er een aantal aandachtspunten over voor wiskundedocenten die wiskunde A doceren en voor docenten van economisch gerichte studies, die een instroom krijgen van studenten met alleen wiskunde A.

## Verbreiding van de populatie

Hoewel schrijvers van artikelen zich daar niet altijd rekenschap van geven, is iedere argumentatie op grond van een eenvoudig tabelletje onderworpen aan de wetten van het toeval en de statistiek. (Zoals Paulos in het prachtige boekje 'Ongecijferdheid' overtuigend laat zien is enige kennis van breuken en procenten gecombineerd met wat logisch denken ruim voldoende om veel ongerechtvaardigde opvattingen op te blazen.) Op grond van het tabelletje van ingestroomde economiestudenten met de percentages geslaagden en gezakten, trekken Van der Horst en Woudhuijsen algemene conclusies over gehele populaties leerlingen en economiestudenten. Omdat de vergelijking met de

oude situatie (wiskunde 1) zich opdringt, is het goed om eerst de twee populaties (vwo met wiskunde 1 en vwo met wiskunde A en/of B) met elkaar te vergelijken.

Studenten	met wiskunde A	met wiskunde B	met wiskunde A + B	Overigen
Aangemeld	672			
Deelgenomen	610	241	138	119
Procenten	(100)	(40)	(23)	(19)

Voorheen behaalde ongeveer 70% van de vwo-ers het diploma met wiskunde 1. Uit die 70%-groep trok de universitaire studierichting economie haar studenten. Thans heeft 90% van de vwo-ers één of twee wiskundevakken in het pakket en wel 30% alleen wiskunde A, 30% alleen wiskunde B en 30% beide. Uit die 90% trekken studierichtingen als economie en bedrijfskunde de laatste jaren een groot aantal eerstejaars.

Uit de cijfers van het CBS (zie bijvoorbeeld *Uitleg*, 26 april 1989) is genoegzaam bekend dat de zwaarte van het vakkenpakket (de mate van exactheid) en het cijferniveau van grote invloed is op de slaagkans bij de universitaire studies in de natuurwetenschappen, de technische wetenschappen, de economische wetenschappen en de sociale wetenschappen. Gaan we uit van een normale verdeling van studiegeschiktheid (intelligentie, studiezin, motivatie, doorzettingsvermogen, enzovoort) dan valt het te verwachten dat het studiesucces van de 90% verschilt van de 70%. Tenminste voor de vakken die een beroep doen op mathematische methoden en bij overigens gelijkblijvende omstandigheden. Omdat het procentuele aandeel van de natuurwetenschappen en de technische wetenschappen in het aantal eerstejaars de laatste jaren redelijk constant blijft, zal de sterke procentuele groei van het aantal eerstejaars bij de economische wetenschappen en bedrijfskunde bevorderd zijn door de sterke procentuele toename van het aantal vwo-ers dat aan zo'n studie mag beginnen (van 70% naar 90% van de gehele populatie).

## Een gedachtenexperiment

Hoewel wij tal van gegevens over de instroom bij economie aan de Universiteit van Amsterdam niet kennen en een exacte vergelijking tussen de oude en de nieuwe situatie niet valt te maken, is een gedachtenexperiment op basis van een aantal uitgesproken vooronderstellingen leerzaam. Dat leidt tot de conclusie dat de 'nieuwe' groep van studenten (de nieuwe 20%) het slecht deed bij het eerste tentamen wiskunde.

We nemen aan:

- studenten uit de 60% met wiskunde B doen het nu even goed als voorheen de studenten uit de 70% met wiskunde 1;
- de 30% alleen wiskunde A bevat de 10% die voorheen wiskunde 1 deed, de andere 20% is 'nieuw';
- de bovengenoemde 10% van wiskunde A scoort net zo goed (67% geslaagd) als de wiskunde B-groep;
- economie UvA trekt uit de huidige top-70% hetzelfde percentage eerstejaars als voorheen uit de 70% wiskunde 1-kiezers.

Uit de tabel valt af te lezen dat er 257 studenten waren met wiskunde B (uit de 60% van de vwo-populatie), zodat nog 43 studenten (een zesde deel van de B-groep) met alleen wiskunde A tot de vroegere 70% van de vwo-populatie kunnen worden gerekend. Van deze groep eerstejaars slaagt 67% (201 eerstejaars), zodat van de overblijvende 198 'nieuwe' eerstejaars nog 70 zijn geslaagd; dat is een slagingspercentage van 35%.

Bij de geformuleerde aannames komen er als gevolg van het nieuwe vak wiskunde A dus 70 studenten meer door het eerste tentamen wiskunde bij economie UvA dan bij de oude situatie het geval zou zijn. Samen met de herkansers uit de groep (198-70), die later alsnog zijn geslaagd, heeft de herverkaveling van het wiskundepakket in dit gedachtenexperiment een aanzienlijke toename van het aantal geslaagde eerstejaars economie tot gevolg gehad. Dat brengt financiële voordelen voor het budget van de economiefaculteit met zich mee.

## Oorzaak en gevolg

De auteurs Van der Horst en Woudhuijsen sommen een aantal fouten op, die typerend worden geacht voor de A-kandidaten. Een bekend rijtje dat al jarenlang figureert in vakdidactische publikaties in binnen- en buitenland, ongeacht het wiskundeprogramma. Het zijn allemaal voorbeelden van (onterechte) generalisaties van de distributieve wet  $a(b+c) = ab+ac$ . Als zodanig zijn ze vergelijkbaar met onterechte generalisaties op basis van een steekproefresultaat, zonder naar de relatie met de populatie te kijken.

Van alle fouten kan worden gezegd dat ze aan het eind van 4 vwo (de basistabel) niet meer gemaakt mogen worden. De schrijvers zullen waarschijnlijk niet bedoelen, dat het foutloos uitvoeren van deze technieken een voldoende voorwaarde is om het vak wiskunde in het eerste jaar economie te kunnen volgen. Dan

is de ingangsvoorwaarde (wiskunde A of B) overbodig.

Het is opvallend dat alle voorbeelden ontleend zijn aan het klassieke letterrekenen, dat alleen in de analyse een rol speelt. Waar zijn de fouten in de modelvorming, de matrixrekening, de hypothesetoetsing? Of bevat het vak en het tentamen wiskunde alleen de 'kale' analyse, waardoor het een rechtstreeks vervolg is op de analyse van wiskunde B? Het is natuurlijk vanzelfsprekend dat de genoemde fouten in het manipuleren met lettervormen veel meer gemaakt zullen worden door leerlingen *zonder* wiskunde B dan door leerlingen *met* wiskunde B. De laatstgenoemden hebben daarin de oude training in algoritmen en recepturen gehad, zoals voorheen in wiskunde 1 gebruikelijk was. Dat was toen voor veel wiskundedocenten de enige manier om de 70% nog tot een enigszins redelijk examenresultaat te brengen. Uiteraard beklijft de zo verkregen vaardigheid niet erg lang, leidt zo'n training gemakkelijk tot verbalisme en is de zo verkregen kennis weinig wendbaar bij het toepassen van wiskunde. [4] De docenten in mijn werkomgeving beklagen zich over de geringe creativiteit en de attitude van eerstejaars studenten wiskunde en natuurkunde, die allemaal wiskunde B hebben gehad. Zij wijten dat aan het klakkeloze imitatieleren uit het voorafgaand wiskundeonderwijs.

Het is daarom verbazingwekkend dat Van der Horst en Woudhuijsen nu het curriculum van wiskunde A als de oorzaak van verbalisme aanwijzen, waarbij zij een merkwaardige tegenstelling creëren tussen een intuïtieve benadering aan de hand van goede contexten aan de ene kant en inzicht bevorderend leren aan de andere kant. In hun visie dragen theoretische beschouwingen bij aan het inzicht, waarbij zij kennelijk veronderstellen dat die beschouwingen wel bij wiskunde B worden voorgedragen. Kijken we naar de definitie van de door hen geciteerde C. F. van Parreren, dan valt op dat deze juist de nadruk legt op de wendbaarheid van de kennis. In hoeverre kun je de technische vaardigheden gebruiken bij het oplossen van 'nieuwe' problemen. [4] Dat is heel andere koek dan de sommetjes waarmee de eerstejaars de fout zijn ingegaan. De theorievorming in de didactiek van de wiskunde en de natuurwetenschappen gaat er juist vanuit dat het leggen van een intuïtieve basis een voorwaarde is voor het bevorderen van inzicht in begrippen en methoden.

## Het gereedschap van wiskunde A en wiskunde B

Wegens het ontbreken van een evaluatie-onderzoek naar de nieuwe examenprogramma's wiskunde zijn bijdragen als die van Woudhuijsen en Van der Horst bijzonder waardevol. Analoge tabelletjes van de andere economiefaculteiten en van de bedrijfskunde moeten het beeld aanvullen. Daarbij is het interessant om meer te weten dan alleen de resultaten van een wiskundetentamen met klassieke analyse-opgaven. Hoe zit het met de resultaten voor de statistiek, een heel belangrijk onderdeel van wiskunde A? En wat zijn de resultaten bij vakken zoals 'Mathematische modelvorming'? De hier en daar bij economische of

bedrijfskundige studies gebruikte studieboeken over mathematische modelvorming liggen rechtstreeks in het verlengde van wiskunde A. [2] [3]

Op grond van de inhoud van de programma's en van de waargenomen onderwijspraktijk tot nu toe, kan ten behoeve van eerstejaars docenten economie en bedrijfskunde wel een beeld geschetst worden van het wiskundig gereedschap dat hun studenten vanuit het vwo meenemen. In wiskunde B (60% van de vwo-populatie) verschilt de analyse tot nu toe in niets van de analyse van wiskunde 1. Wegens de ruime hoeveelheid tijd die de ruimtemeetkunde uit het B-programma vraagt, valt niet te verwachten dat het voordeel van meer uitgesproken B-klassen kan worden benut voor een meer theoretische onderbouwing van de analyse, waar Van der Horst en Woudhuijsen om vragen. De analyse wordt veelal beperkt tot technisch gereken van het type dat tegenwoordig door geavanceerde computerprogramma's kan worden uitgevoerd. Enige hoop op meer inzichtelijk onderwijs bij wiskunde B ligt in de introductie van natuurwetenschappelijke toepassingen, te beginnen bij de modelvorming bij het onderwerp differentiaalvergelijkingen. Bij mijn eigen wiskundeonderwijs aan eerstejaars scheikundestudenten valt jaarlijks op dat studenten met alleen wiskunde B aanvankelijk veel meer moeite hebben met het opstellen van een mathematisch model bij een gegeven context dan hun medestudenten met beide wiskunde-vakken. Ook het inhalen van de statistiek kost veel extra inspanning. Omdat de vwo-ers met wiskunde B echte B-leerlingen zijn met natuurwetenschappen in hun pakket, slagen zij er bij de vervolgstudie natuurlijk wel in om hun achterstand in modelvorming en statistiek weg te werken.

De vwo-ers met alleen wiskunde A hebben niet een B-achtergrond, terwijl ze ook een duidelijk andere wiskundige vorming hebben gehad. Het type opgaven, waarin  $\sin(x+y)$  moet worden gedeeld door  $\sin x$ , komt niet voor in wiskunde A. (Waar komt dat overigens voor in de economie?) Het gereken in de toegepaste analyse is beperkt. Het gaat meestal om het onderzoek van een door een formule weergegeven verband tussen grootheden. In de eerste versie van een aantal schoolboeken voor wiskunde A is het belang van een zekere technische vaardigheid (gereedschap bij het oplossen van problemen) onderschat, zodat de genoemde fouten mij niet verbazen. De statistiek in deze vorm en de matrixrekening betekenen een verrijking van het wiskundeprogramma op het vwo. Beide vakken zijn op uitdrukkelijk verzoek van de universitaire afnemers in wiskunde A opgenomen. Het geheel heeft zeker vwo-niveau, terwijl een B-kandidaat zonder wiskunde A geen schijn van kans heeft om een voldoende op het A-examen te maken. Er wordt dus kennelijk iets substantieels onderwezen en geleerd. Het gevolg van het handhaven van dat niveau is helaas

wel dat ongeveer de helft van de vwo-ers er niet in slaagt een voldoende op het centraal schriftelijk examen te behalen. Verbetering van de schoolboeken, zowel op het punt van de basisvaardigheden als op het punt van de modelvorming en de probleemaanpak, kan in de komende jaren tot gunstiger resultaten leiden. Een effect in dezelfde richting valt te verwachten bij de verzwaring van het vwo met de uitbreiding tot acht vakken, waaronder de verplichting tot een tweede vreemde moderne taal en een vak wiskunde.

Welk advies geven we aan leerlingen die een economische wetenschap willen gaan studeren? Gezien het bovenstaande en de data uit het artikel van Van der Horst en Woudhuijsen ligt het kiezen van wiskunde A en B voor de hand. Veel dekanen en wiskundedocenten geven dat advies ook. Welk advies geven we aan de verantwoordelijke eerstejaars docenten bij de faculteiten economie en bedrijfskunde van de universiteiten? Organiseer aanvankelijk verschillende wiskundepakketten voor de instroom met wiskunde A en met wiskunde B. De A-leerlingen krijgen wat meer training in technische vaardigheden uit de analyse, de B-leerlingen moeten meer tijd steken in statistiek en modelvorming. Na enige trimesters zijn de verschillen aardig gelijk getrokken en hebben beide groepen een eerlijke kans gekregen. (De VUA doet iets dergelijks, evenals de heao's.) Aan een aantal universiteiten is het wiskundeonderwijs in het eerste jaar economie nog sterk gericht op de kale wiskunde (analyse), wat uiteraard een handicap is voor studenten met alleen wiskunde A. Zo'n opzet gaat uit van de illusie dat de transfer van die wiskunde naar economische toepassingen vanzelf wel komt! Ook de chronologische ordening 'Wiskunde Eerst Dan Toepassingen' geeft slechtere leerresultaten dan een opbouw waarin de wiskunde alternerend en in samenhang met goede contexten wordt opgebouwd. [4]

## Literatuur

- [1] Het artikel *Economie en wiskunde A, een nadere analyse* is eerder gepubliceerd in het 'Tijdschrift voor het economisch onderwijs', 1989-10, als reactie op het artikel van Woudhuijsen en van der Horst *Wiskunde A in het VWO, een blijvertje?*, in hetzelfde tijdschrift, 1989-8.
- [2] Burghes, D.N. en A.D. Wood: *Mathematical Models in the Social, Management and Life Sciences*, Wiley, New York, 1980.  
Burghes, D.N., I. Huntley & J. McDonald: *Applying Mathematics*, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1982.
- [3] Meyer, J.W.: *Concepts of Mathematical Modelling*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1985.
- [4] Streun, A. van: *Heuristisch wiskunde-onderwijs*, dissertatie, RU Groningen, 1989.