ORSTAT: Software voor Operations Research en Statistiek

E. Kalvelagen/H. Tijms
Instituut voor Econometrie, VU Amsterdam

Inleiding

Deze software is ontwikkeld met het simpele doel het wiskundeonderwijs op de middelbare school boeiender te maken en dus de leerling meer te motiveren voor wiskunde. Veel getalenteerde leerlingen denken dat wiskunde misschien best een aardig vak is, maar wel een vak waarin niet veel meer te ontdekken valt. Het gevolg is dat ze zich op andere vakken richten en verloren gaan voor een verdere studie in de wiskunde. Deze negatieve ontwikkeling is des te betreurenswaardiger daar de rol van de wiskunde in allerlei sectoren van de maatschappij steeds belangrijker wordt.
Het hoofddoel van de software is te laten zien dat de wiskunde nog vele uitdagende problemen bevat die tegelijkertijd van groot praktisch belang zijn. De microcomputer kan gebruikt worden om de leerling kennis te laten maken met nieuwe wiskunde waaraan ze misschien nog niet volledig toe zijn, maar die toch voor hen boeiend is en die hun nieuwsgierigheid prikkelt. Op deze wijze kan een bijdrage geleverd worden aan het behouden van wiskundig talent voor de wiskunde. Tegelijkertijd kan met de software de beeldvorming van de wiskunde bij de wiskundig minder getalenteerde leerling (en het grote publiek) verbeterd worden.
De software bevat modules die enerzijds aansluiten bij de middelbare school wiskunde (vwo) en anderzijds een goed beeld geven van praktische wiskunde zoals deze in het dagelijks leven gebruikt wordt. Hoewel enkele modules uitstekend passen in het wiskunde A-onderwijs, zij nogmaals benadrukt dat de software vooral bedoeld is als een extracurriculaire activiteit ter motivering van de leerling met inbegrip van de wiskunde B-leerling.

Software modules

Het softwarepakket bevat zeven modules waarvan wij hieronder de opzet en de doelstelling in het kort zullen beschrijven. Een uitgebreidere beschrijving wordt gegeven in de leswijzer behorende bij het softwarepakket.

1. Lineaire programmering

De lineaire programmering is bij uitstek geschikt om de leerling te oefenen in de wiskundige modelbouw. In onze visie is bij lineaire programmering het vertalen van een verbaal gesteld optimaliseringsprobleem naar een wiskundig model en het analyseren van dit model met behulp van de microcomputer een nuttiger training in wiskundig denken dan het ingaan op de details van de oplosmethoden. De grafische methode voor twee variabelen dient zeker besproken te worden, maar daarna zou de nadruk moeten liggen op de modelbouw en niet op de oplosmethode (voor drie variabelen).
Leuke en praktische problemen zijn er in overvloed mits maar niet wordt vastgehouden aan twee of drie variabelen. Dit laatste is ook in het geheel niet nodig, want bij modelformulering wordt de moeilijkheidsgraad niet bepaald door het aantal variabelen. Op natuurlijke wijze werkt de leerling net zo makkelijk met tien als met drie variabelen bij modelbouw. Ter illustratie het volgende voorbeeld.

Roosterprobleem
Bij de afdeling inlichtingen van een telefoondienst moeten afhankelijk van de periode van de dag tenminste de volgende aantallen telefonistes aanwezig zijn:

tijd van de dag	periode	vereist aantal
24.00 - 4.00 u.	1	4
4.00 - 8.00 u.	2	8
8.00 - 12.00 u.	3	10
12.00 - 16.00 u.	4	7
16.00 - 20.00 u.	5	12
20.00 - 24.00 u.	6	4

Om de vier uur precies kan een nieuwe dienst aanvangen, en wel aan het begin van de hierboven genoemde periodes. Elke dienst duurt acht uur. Hoe moet het dienstrooster samengesteld worden opdat het totale aantal benodigde telefonistes minimaal is, gegeven de gestelde aanwezigheidseisen?

Oplossing
De eerste stap tot de oplossing van het probleem is het definiëren van de volgende zes beslissingsvariabelen:

x_i = aantal telefonistes dat de dienst begint in periode i

voor $i = 1, \ldots, 6$.

Vervolgens kan het dienstroosterprobleem vertaald worden in het wiskundige LP-model:

$$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

onder de bijvoorwaarden:

$$x_1 + x_6 \geqslant 4$$
$$x_2 + x_1 \geqslant 8$$
$$x_3 + x_2 \geqslant 10$$
$$x_4 + x_3 \geqslant 7$$
$$x_5 + x_4 \geqslant 12$$
$$x_6 + x_5 \geqslant 4$$
$$x_i \geqslant 0 \quad \text{voor} \quad i = 1, \ldots, 6.$$

```
SIMOPT Versie 3.0              IEOR   VU Amsterdam


Het volgende model is gelezen:

Doelfunktie:
   MIN  1.0000 X1 +1.0000 X2 +1.0000 X3
        +1.0000 X4 +1.0000 X5 +1.0000 X6
Onder bijvoorwaarden:
   1.  1.0000 X1 +1.0000 X6 >=  4.0000
   2.  1.0000 X2 +1.0000 X1 >=  8.0000
   3.  1.0000 X3 +1.0000 X2 >= 10.0000
   4.  1.0000 X4 +1.0000 X3 >=  7.0000
   5.  1.0000 X5 +1.0000 X4 >= 12.0000
   6.  1.0000 X6 +1.0000 X5 >=  4.0000


  Resultaten:

  Waarde doelfunctie :           26.0000

  Variabele         Optimale waarde
  ---------         ---------------
  X1          :           4.0000
  X2          :          10.0000
  X3          :           0.0000
  X4          :           8.0000
  X5          :           4.0000
  X6          :           0.0000
```

fig. 1

In figuur 1 wordt de computer-output van de optimale oplossing gegeven. Hieruit blijkt dat per dag 26 telefonistes nodig zijn, waarvan er vier om 24.00 uur beginnen, tien om 4.00 uur, acht om 12.00 uur en vier om 16.00 uur.
De module Lineaire Programmering geeft verschillende andere 'aansprekende' voorbeelden en laat zien hoe de bijbehorende LP-modellen eenvoudig met de microcomputer kunnen worden doorgerekend.

2. Het kortste pad probleem

Deze module heeft tot doel de leerling kennis te laten maken met het principe van 'recursiviteit', wat een basisbegrip is in de moderne wiskunde en informatica. Daartoe wordt eerst de beperking van 'brute' rekenkracht van de computer – hoe snel deze ook is – getoond. Dit wordt gedaan aan de hand van het kortste pad probleem. In dit probleem moet in een netwerk van steden met gegeven afstanden tussen de steden een pad tussen een tweetal steden berekend worden waarvan de totale lengte zo klein mogelijk is. Voor grotere netwerken is de methode van complete aftelling, waarbij voor elk pad afzonderlijk de lengte bepaald wordt, praktisch onuitvoerbaar vanwege snel oplopende rekentijden. Echter, door het probleem recursief in kleinere problemen van een zelfde structuur te splitsen, is een zeer efficiënte wiskundige rekenmethode te geven. Dit wordt in de module gedemonstreerd. Daarnaast kan de leerling de module gebruiken om experimenteel eigen 'slimme' methoden te ontwikkelen.

3. De wet van de grote aantallen

Veel mensen zijn geneigd te denken dat ook bij een korte reeks van worpen met een zuivere munt, kop en munt vrijwel even vaak zullen optreden. Sommige gokkers denken zelfs dat de kans op kop toeneemt als een aantal keren achtereen munt gegooid wordt. De module kan gebruikt worden om bovenstaande misvatting te bestrijden en een beter inzicht te verkrijgen in het fenomeen van fluctuaties bij een kansexperiment. Het werpen van een munt of dobbelsteen wordt nagebootst met behulp van computersimulatie. Het simulatieproces wordt grafisch op het scherm weergegeven. Het experiment herhaaldelijk doen is de beste manier om inzicht in 'randomness' te verkrijgen.

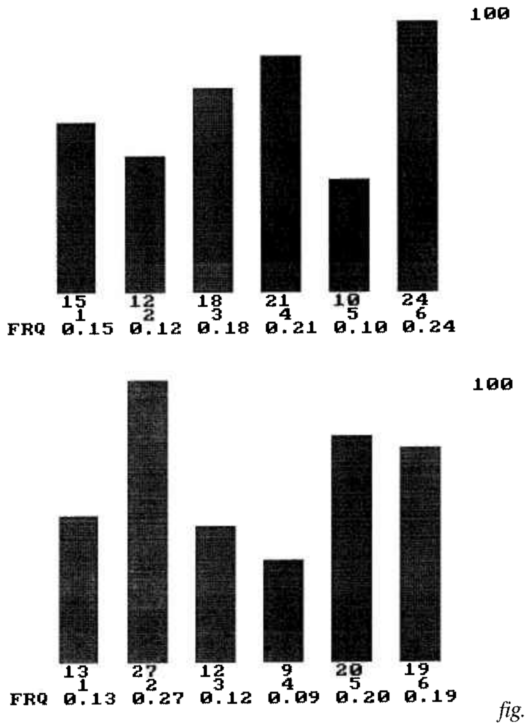

fig. 2

Een plaatje zegt meer dan duizend woorden, vergelijk figuur 2 waarin een 'screendump' wordt gegeven van twee simulatie-experimenten, elk bestaande uit honderd worpen met een zuivere dobbelsteen. Tevens laat de module zien op welk een grillige wijze de waarden van de zweetkansen uiteindelijk gaan naar de waarden van de weetkansen.

4. De normale klokvormige curve

Deze module laat experimenteel zien dat de normale curve een soort 'natuurwet' in de kansrekening is. Het resultaat dat de som van een voldoend groot aantal onafhankelijke stochastische variabelen bij benadering een normale kansverdeling heeft, verklaart dat de normale curve een goede beschrijving geeft van veel praktische verschijnselen. De module demonstreert dit resultaat op visuele wijze, door het kansdiagram te tekenen van de kansverdeling van de som van het aantal punten verkregen bij een aantal worpen met een dobbelsteen, waarbij de leerling zelf bepalen kan hoe groot het aantal worpen is en hoe de dobbelsteen eruit ziet (zuiver of onzuiver). Eén blik op het kansdiagram is voldoende om te zien of het ongeveer de klokvorm van de normale curve heeft.

5. Het handelsreizigersprobleem

Deze module beoogt te laten zien dat de wiskunde nog steeds uitdagende problemen kent die nog niet bevredigend opgelost zijn, terwijl het probleem van groot praktisch belang is. Het handelsreizigersprobleem is eenvoudig te formuleren. Een handelsreiziger moet in zijn verkoopgebied elke stad precies éénmaal bezoeken en dan weer terugkeren op zijn uitgangspunt. Het probleem is een rondreis te vinden waarvoor de totale lengte zo klein mogelijk is.
Dit is één van de beroemdste problemen uit de discrete wiskunde. Het handelsreizigersprobleem kent veel praktische toepassingen. Denk bijvoorbeeld aan het ontwerpen van een kortste rondreis vanuit het postkantoor voor een postauto die dagelijks een aantal postbussen moet legen. Een andere toepassing is het bepalen van de volgorde waarin een aantal verschillende produkten op een zelfde machine gemaakt moeten worden, zodat de totale omstelkosten minimaal zijn.

Hoewel het probleem eenvoudig te formuleren is, is het bijzonder moeilijk op te lossen. De methode van volledige aftelling is praktisch onuitvoerbaar, omdat het aantal mogelijke rondreizen exponentieel snel toeneemt met het aantal steden. De module die grafisch van aard is, stelt de leerling in staat zelf een rondreis te construeren op het scherm. Daarnaast is er de optie de computer een rondreis te laten vinden. In het laatste geval heeft de leerling de keus tussen een heuristische methode en een exacte methode. Het is leerzaam het onderscheid te zien tussen deze twee methoden.

Een heuristische methode is een methode die altijd binnen een korte rekentijd een oplossing vindt die in het algemeen niet optimaal is, maar vaak wel van een goede kwaliteit. Een interessante heuristiek in de module is de grootste hoekmethode. Deze heuristiek begint met een deeltour die de kleinste omhulling van alle steden omvat. Deze beginstap is essentieel en wordt ingegeven door het feit dat een optimale tour in het platte vlak zichzelf niet snijdt bij Euclidische afstanden tussen de steden. In elke stap van de grootste hoekmethode wordt de deeltour met één stad uitgebreid en wel de stad die de grootste hoek maakt met twee opeenvolgende steden op de deeltour.
Het intuïtieve idee achter de heuristiek is dat, hoe groter de hoek is die een stad maakt met twee andere steden, des te dichter die stad moet liggen bij de verbindingslijn van die twee steden. Deze heuristiek levert een rondreis waarvan de totale lengte meestal vrij dicht ligt bij de minimale lengte van de optimale rondreis.

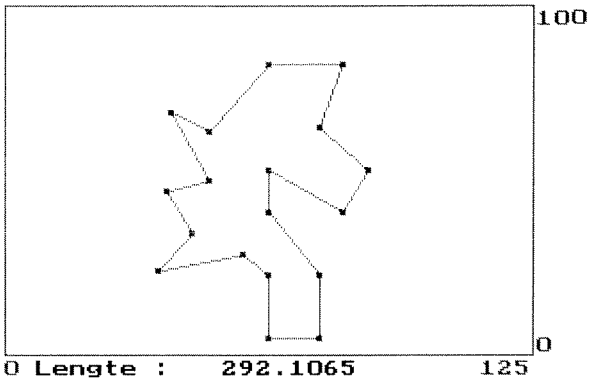

fig. 3

In figuur 3 wordt voor een configuratie van achttien steden een screendump gegeven van de rondreis verkregen met de grootste hoekmethode. De coördinaten van de achttien steden zijn: (62, 83), (80, 83), (74, 65), (86, 53), (80, 41), (62, 41), (62, 53), (74, 23), (74, 5), (62, 23), (56, 29), (44, 35), (38, 47), (39, 69), (48, 64), (48, 50), (36, 24) en (62, 5). De lengte van de rondreis verkregen met de heuristische grootste hoekmethode is 292.11, terwijl de lengte van de optimale rondreis gelijk is aan 286.56.
Heuristische methoden staan tegenover exacte methoden waarmee in principe een optimale oplossing gevonden wordt, maar die erg veel rekentijd kunnen vergen. Voor het handelsreizigersprobleem is nog steeds geen exacte rekenmethode gevonden waarvoor de rekentijden niet uit de hand lopen als het aantal steden groot wordt.

6. Statistische tabellen en grafieken

Deze module stelt de leerling (en leraar) in staat om met hetzelfde gemak waarmee op de handrekenmachine standaardfuncties als $\sin(x)$ en $\ln(x)$ worden uitgerekend, op de PC kansverdelingen als de normale verdeling, de binomiale verdeling en de hypergeometrische verdeling uit te rekenen. Daarnaast kan met de optie-grafiek van deze module de leerling experimenteel nagaan wanneer het staafdiagram van de discrete binomiale verdeling begint te lijken op de klokvormige kromme van de continue normale verdeling. Om een idee te geven hoe de optietabel van de module werkt, geven wij in figuur 4 voor een aantal waarden van de parameters n (= het aantal experimenten) en p (= de succeskans) van de binomiale verdeling de getalwaarden van de binomiaalkansen op precies x, op ten hoogste x en op meer dan x successen.

[Binomiale Verdeling B(n,p)]

n	p	x	P(B≤x)	P(B=x)	P(B>x)
25	0.50000000	5	0.00203866	0.00158340	0.99796134
25	0.50000000	10	0.21217811	0.09741664	0.78782189
25	0.50000000	15	0.88523853	0.09741664	0.11476147
50	0.10000000	1	0.03378586	0.02863208	0.96621414
50	0.10000000	5	0.61612301	0.18492460	0.38387699
50	0.10000000	10	0.99064540	0.01518333	0.00935460
100	0.30000000	20	0.01646285	0.00757564	0.98353715
100	0.30000000	30	0.54912360	0.08678386	0.45087640
100	0.30000000	40	0.98750159	0.00849017	0.01249841
175	0.60000000	100	0.24294146	0.04528444	0.75705854
175	0.60000000	110	0.80153567	0.04615609	0.19846433
175	0.60000000	120	0.99229874	0.00410502	0.00770126
250	0.75000000	150	0.00000014	0.00000007	0.99999986
250	0.75000000	175	0.04179982	0.01109830	0.95820018
250	0.75000000	200	0.97349716	0.01093644	0.02650284

fig. 4

7. Het Steiner-probleem

Deze module laat de leerling kennismaken met een fascinerend probleem uit de discrete wiskunde dat nog onopgelost is. Wat is het Steiner-probleem?
Stel een telefoonmaatschappij wil een zo kort mogelijk netwerk van telefoonlijnen ontwerpen zodat voor een gegeven aantal steden elk tweetal onderling bereikbaar is via een route. Als het netwerk alleen de steden als knooppunten mag gebruiken, is de oplossing eenvoudig te berekenen en wordt gegeven door de minimale opspannende boom over de steden. De minimale opspannende boom wordt iteratief berekend door eerst een willekeurig gekozen stad te verbinden met de dichtstbijzijnde stad en daarna in elke volgende stap de tot dan geconstrueerde subboom uit te breiden door een verbinding aan te leggen naar de dichtstbijzijnde stad buiten de subboom, met dien verstande dat geen gesloten circuit mag ontstaan. In figuur 5 wordt de opspannende boom gegeven voor dezelfde configuratie van achttien steden als in figuur 3.

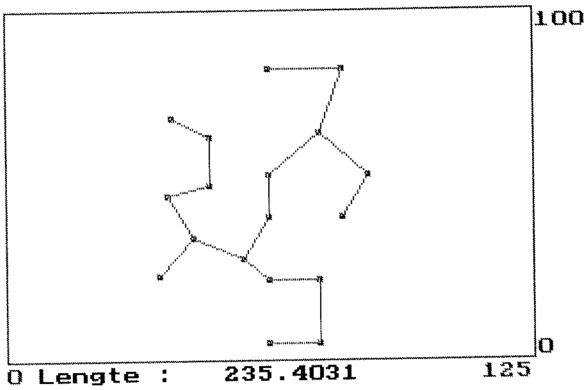

fig. 5

Het probleem wordt echter veel moeilijker als naast de gegeven steden ook nader te kiezen hulppunten als knooppunten gebruikt mogen worden. Hoeveel hulppunten te gebruiken en waar ze te plaatsen? Dit probleem heet het Steiner-probleem naar de Zwitserse wiskundige Jakob Steiner, die in de negentiende eeuw het probleem stelde hoe drie punten in het platte vlak door lijnen te verbinden, zodat de totale lengte van de getrokken lijnen zo klein mogelijk is. Voor het speciale geval van drie punten is een geometrische oplosmethode gevonden. De methode werkt als volgt voor drie punten A, B, C die niet op een rechte lijn liggen:

1. Bepaal eerst de grootste zijde van de driehoek ABC, stel de zijde AB. Richt op de zijde AB en tegenover het punt C een gelijkzijdige driehoek ABZ op.
2. Construeer een cirkel door de drie hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek ABZ. Verbind het punt Z van de driehoek met het derde punt C en bepaal het snijpunt P, van de lijn ZC met de cirkel.
3. Als het snijpunt P binnen de driehoek ABC valt, dan is P het gezochte Steiner-punt en wordt de optimale Steiner-boom gevonden door elk van de drie punten A, B, C met P te verbinden. Als het punt P buiten de driehoek valt, dan bestaat de kortste opspanning uit de twee kleinste zijden van de driehoek ABC.

In figuur 6 wordt deze constructie weergegeven. Voor

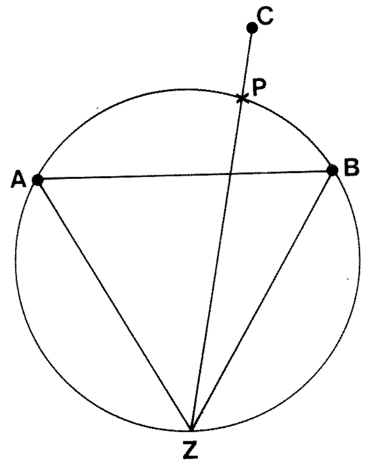

fig. 6

het speciale geval dat de drie punten A, B en C een gelijkzijdige driehoek vormen, wordt het Steiner-punt P gegeven door het zwaartepunt van de driehoek ABC, vergelijk figuur 7.

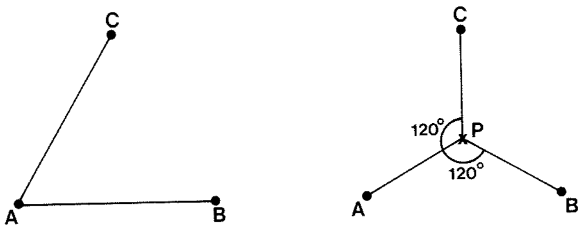

fig. 7

In dit geval wordt met de Steiner-boom een reductie van 13.4% bereikt ten opzichte van de lengte van de minimale opspannende boom bestaande uit de twee zijden AB en AC.

Zoals bij de lineaire programmering de grafische methode niet bruikbaar is voor het geval van meer dan drie variabelen, is bij het Steiner-probleem de geometrische methode niet uit te breiden voor het geval van meer dan drie punten in het platte vlak. Een exacte methode die voor het algemene geval binnen 'redelijke' rekentijden tot een optimale oplossing leidt is nog niet gevonden. Wel zijn een aantal geometrische eigenschappen bekend van de optimale hulppunten (Steiner-punten) wanneer de afstanden tussen de steden de Euclidische afstanden zijn. Deze zijn:

a. in elk Steiner-punt moeten drie lijnen samenkomen, waarbij elk tweetal lijnen een hoek van 120° maakt;
b. het aantal Steiner-punten is hooguit gelijk aan het oorspronkelijke aantal steden minus 2.

Hierbij is het interessant op te merken dat het een onbewezen stelling is dat de lengte van een optimale Steiner-boom nooit meer een factor $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (oftewel 13.4%) kleiner kan zijn dan de lengte van de minimale opspannende boom over de steden. Deze bovengrens wordt bereikt voor het speciale geval van drie steden die een gelijkzijdige driehoek vormen; voor grotere

problemen met willekeurig gekozen steden blijkt experimenteel dat de reductie veelal niet meer dan 5% is.
Het computerprogramma stelt de leerling in staat het aantal steden en de positie van de steden te kiezen. Als de steden vastgelegd zijn, geeft het computerprogramma de minimale opspannende boom over de steden. Daarna geeft het programma de leerling de mogelijkheid zelf hulppunten toe te voegen met het doel een kortere Steiner-boom te construeren. Hoe op het oog de hulppunten te kiezen bij een groter aantal steden is bepaald niet eenvoudig. In figuur 8 is hiertoe een poging gedaan voor de stedenconfiguratie uit figuur 5.

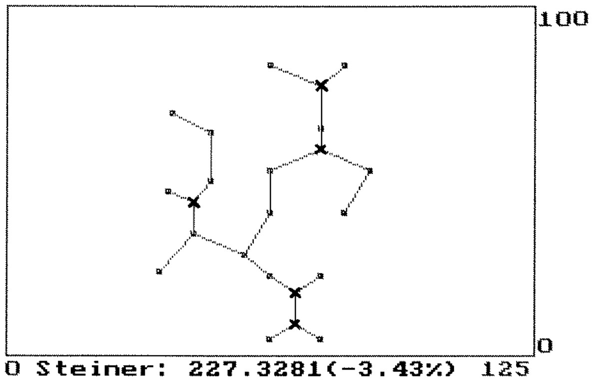

fig. 8

Slotopmerking

Aan de gebruikersvriendelijkheid van de software is ook veel aandacht besteed. De menu-gedreven software heeft geen handleiding nodig. De ervaring leert dat met de aanwijzingen op de diskette de leerling met de software direct werken kan. De meeste modules stellen de geïnteresseerde leerling in staat buiten de les zelfstandig met de wiskundige modellen te experimenteren zonder dat de aanwezigheid van de leraar nodig is. De software en de bijbehorende leswijzer zijn bedoeld voor het vwo.
Nadere informatie hoe het materiaal te bestellen is te verkrijgen bij het Instituut voor Econometrie, Vrije Universiteit, Amsterdam, tel. 020-5487063.