Differentialen als beroepsgeheim

J. van de Craats
Algemene Wetenschappen, KMA, Breda

Inleiding

Iemand die wiskunde toe wil passen, hoeft niet alle theoretische finesses van het vak onder de knie te hebben. Bij een van de belangrijkste toepassingsgebieden van de wiskunde, de analyse, gaan de theoretische kanten van het vak de doorsnee-gebruiker ook ver boven de pet. Als je onderwijs in dat vak geeft, moet je daarom heel goed weten wat je wel, en wat je niet moet vertellen. We illustreren dat aan de hand van differentialen, een onderwerp dat in het wiskundeonderwijs op school nog steeds aanleiding geeft tot heftige controverses.

Differentialen

Wat betekenen regels als:

$$dy = f'(x)\,dx,$$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

of:

$$dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz\ ?$$

Vraag het een fysicus, en hij zal onmiddellijk beginnen over infinitesimale toenames en totale differentialen. En hij zal allerlei voorbeelden geven uit de natuurkundige praktijk. Maar stel je die vraag aan een wiskundige, dan heb je kans dat hij zich achter z'n oor krabt en zegt dat dit een ingewikkelde kwestie is waar hij niet zo een-twee-drie een antwoord op kan geven. Als je aanhoudt, begint hij waarschijnlijk over differentialen als lineaire functies of lineaire afbeeldingen. Daarbij vervangt hij dx, dy, dz eerst door Δx, Δy en Δz; enige tijd later worden het weer andere letters, bijvoorbeeld h, k, l, en als je erin geslaagd bent nog steeds bij de les te blijven volgt er tot slot nog iets over de 'beste' lineaire benadering van een functie.

Zo'n reactie is niet ongewoon in onze beroepsgroep. Ook als je vraagt naar de betekenis van limieten, continuïteit, oneindige reeksen, integralen, de e-macht of de natuurlijke logaritme, loop je de kans moeizame verhalen vol kwantoren, epsilons en delta's te horen te krijgen. Bij de wiskundestudie worden die zaken allemaal namelijk op zo'n manier gepresenteerd (terecht, natuurlijk), en de naïeve beginnende docent is geneigd net zo'n verhaal af te steken, welk publiek hij ook voor zich vindt. Meestal met desastreuze gevolgen!

Nooit zal ik vergeten hoe ik tijdens een van m'n eerste colleges voor eerstejaars biologiestudenten enthousiast de definitie van continuïteit op het bord zette, netjes met epsilons en delta's. Het onbegrip straalde van de gezichten, en op mijn vraag: 'Is dit duidelijk?' klonk als uit één mond een hartgrondig: 'Nee!!!' Wat werkte voor wiskundestudenten werkte absoluut niet voor dit gezelschap, en sindsdien ben ik met veel vallen en opstaan langzaam gaan beseffen wat je 'andersdenkenden' van wiskunde kunt leren, en ook een beetje hoe je het ze kunt leren.
Een van de dingen die ik daarbij heb opgestoken is dat je je publiek allerlei zaken beter *niet* kunt vertellen. Vertel niet wat precies een reëel getal is. Vertel niet dat er op dat terrein flinke begripsmatige en wiskundige problemen liggen en dat die zo-en-zo opgelost kunnen worden. Vertel niet precies wat continuïteit is. En probeer beginners ook niet precies te vertellen wat een limiet is. Houdt de finesses van de Riemann-integraal, met limieten van bovensommen en ondersommen, binnen de beslotenheid van je studeerkamer. Laat de middelwaardestelling en de stelling van Rolle in je collegedictaat: probeer niet te 'bewijzen' dat een continue functie die links positief en rechts negatief is onderweg ergens nul moet zijn. Kortom, maak van de wiskundeles geen analysecollege, want dat zal je slecht bekomen.

Beroepstrots

Ik denk dat zulke vermaningen tegenwoordig overbodig zijn, want thans zullen nog maar weinig leraren op zo'n manier tewerk gaan. Plausibele redeneringen, motiverende voorbeelden, vaak gepresenteerd in een toegepaste context en uitgewerkt met zakrekenmachine of computer, helpen de leerling technieken onder de knie te krijgen die in de natuurwetenschappen en elders dagelijks gebruikt worden. Men kan het betreuren dat hiermee het deductieve aspect (het leveren van bewijzen) uit dit deel van de wiskunde weggelaten wordt, maar de analyse is nu eenmaal te moeilijk voor zo'n opbouw op elementair niveau, en de doorsneegebruiker heeft daaraan ook helemaal geen boodschap. Het moet een kwestie van beroepstrots zijn dat we af en toe zinsneden in de mond nemen als: 'men kan bewijzen dat...', 'voor *nette* functies geldt dat...', 'via een limietovergang volgt nu dat...'.
Ons 'beroepsgeheim' is dan het feit dat wij weten hoe alle details ingevuld moeten worden en voor welke 'pathologische' uitzonderingsgevallen we op moeten

passen; ons wiskundige geweten blijft door die kennis zuiver.
Bij zaken als limieten, continuïteit, afgeleiden en integralen is mijn indruk dat de doorsneeleraar met zo'n houding weinig moeite heeft. In z'n opleiding heeft hij alle definities en stellingen compleet met epsilons en delta's leren kennen, en als het goed is zal hij ze ook tot in alle finesses begrepen hebben en nog steeds begrijpen. Het kost dan weinig moeite in de klas een intuïtieve behandeling te verzorgen waarbij de juiste zaken benadrukt, en andere facetten 'geheimgehouden' worden. Ook de schoolboeken weten meestal wel een goede middenweg te vinden.

Gekoppelde differentialen

Maar mijn ervaring is dat de kwestie bij differentialen gevoeliger ligt, en ik denk dat dit komt omdat hier enerzijds de wiskundige finesses vrij subtiel zijn, terwijl anderzijds de afstand tussen de wiskundige behandeling en de 'toepassingspraktijk' tamelijk groot is. In een artikel in Euclides [1] heb ik het gebruik van differentialen op school uitvoerig en met opzet ook een beetje provocerend aan de orde gesteld. Daarbij lag de nadruk op de didactische voordelen van het werken met differentialen en het verband tussen differentialen in de wiskundeles en differentialen in de natuurkunde. Gekoppelde kleine veranderingen van variabelen, daar ging het over. Ik stelde voor om bij een differentieerbare functie $y=f(x)$ de uitdrukking:

$$dy=f'(x)\,dx \tag{1}$$

op te vatten als een korte notatie voor:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x) \tag{2}$$

zodat de 'differentialen' dy en dx los van elkaar geen betekenis hebben, maar slechts als gekoppelde symbolen gebruikt mogen worden. De limietovergang zit in uitdrukking (1) opgesloten; begripsmatig en voor de toepassingen kun je dx en dy interpreteren als gekoppelde kleine toe- of afnames van de variabelen x en y die dan in eerste benadering via (1) met elkaar samenhangen. Het behoort tot ons beroepsgeheim dat we weten hoe we die opzettelijke vaagheid (wat zijn *kleine* gekoppelde veranderingen dx en dy; wat betekent het dat de benaderingen beter worden naarmate dx en dy kleiner genomen worden) zo nodig volledig tot klaarheid kunnen brengen.
Misschien moet ik nog eens benadrukken dat deze behandeling van differentialen wiskundig gezien inderdaad volledig consistent uitgewerkt kan worden. In grote lijnen heb ik dat in [1] geschetst. Alles komt neer op routinewerk met limieten via (2). Wezenlijk daarbij is dat de differentialen dx en dy nooit afzonderlijk ter sprake worden gebracht, maar altijd aan elkaar gekoppeld zijn. Voor de bewijzen moet je immers steeds weer terug naar (2).

Differentialen losgekoppeld

Totaal anders is echter het beeld van differentialen dat je meestal in de wiskundecolleges krijgt voorgeschoteld, en het is misschien goed om zo'n presentatie hier ook nog eens te memoreren en van commentaar te voorzien. Daarbij worden de differentialen wel van elkaar losgekoppeld en afzonderlijk bekeken. We zullen zien welke prijs daarvoor betaald moet worden. Met name bij functies van meer variabelen is dat instructief. Maar let wel, dit wordt een verhaal voor wiskundigen, geen verhaal dat in de klas op deze manier bruikbaar is. Het is een stukje beroepsgeheim.
Ik begin met een nette functie $w=f(x,y,z)$ van drie variabelen ('net' wil hier zeggen dat de drie partiële afgeleiden bestaan en continu zijn in het domein van f).
Bij zo'n functie $w=f(x,y,z)$ wordt de 'totale differentiaal' dw gedefinieerd door:

$$dw=f_x(x,y,z)dx+f_y(x,y,z)dy+f_z(x,y,z)dz\,. \tag{3}$$

Maar wat bedoelen we daarmee? Het rechterlid vatten we op als een functie, maar, schrik niet, een functie van niet minder dan zes variabelen! Die variabelen zijn x, y, z, dx, dy en dz. Ze spelen niet allemaal dezelfde rol; in feite zetten we de eerste drie, x, y en z, voorlopig vast, en kijken we alleen naar de drie overblijvende variabelen dx, dy en dz. Variabelen, inderdaad; op dit moment zijn dx, dy en dz nog gewone, reële variabelen en geen differentialen.
De eerste drie variabelen x, y en z, die we hebben vastgezet, vormen samen de coördinaten van een punt (x,y,z) in $\mathbb{R}^3$, en we spreken dan ook van de differentiaal dw in het punt (x,y,z). De drie partiële afgeleiden f_x, f_y en f_z worden in dat punt uitgerekend. Het zijn dan drie vaste getallen, en de differentiaal dw is daarmee dus een *lineaire* functie geworden van de drie overblijvende variabelen dx, dy en dz. In het algemeen hebben functies van x, y, z, dx, dy, dz die lineair zijn in de laatste drie variabelen en de gedaante:

$$a(x,y,z)dx+b(x,y,z)dy+c(x,y,z)dz\,.$$

Zulke functies kunnen bij elkaar opgeteld worden en met een constante of met een functie van x, y en z worden vermenigvuldigd; het resultaat is dan steeds weer een functie die lineair is in dx, dy en dz. De belangrijke vraag of zo'n uitdrukking de totale differentiaal is van een functie $f(x,y,z)$, en zo ja, hoe men dan die functie $f(x,y,z)$ vindt, is in het algemeen niet eenvoudig te beantwoorden. We gaan hier aan die vraag voorbij.

Rekenen met differentialen

Neem nu in het bijzonder de totale differentiaal van de functie $f(x,y,z)=x$. In elk punt (x,y,z) geldt:

$$f_x=1,\ f_y=f_z=0$$

dus volgens definitie (3) is:

$$df=1dx+0dy+0dz$$

hetgeen we natuurlijk gewoon noteren als dx. Hieruit blijkt dat dx niet alleen als een variabele, maar ook als een differentiaal opgevat kan worden, namelijk de differentiaal van de functie $f(x,y,z)=x$. Ook dy en dz kan men op die manier als differentialen opvatten, en dan kan men:

$$dw=f_x(x,y,z)dx+f_y(x,y,z)dy+f_z(x,y,z)dz$$

ook lezen als een betrekking tussen differentialen.
Voor differentialen gelden natuurlijk de rekenregels:

$$d(f+g)=df+dg$$
$$d(\lambda\cdot f)=\lambda\cdot df.$$

De regels van Leibniz:

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$$
$$d(f/g) = (g \cdot df - f \cdot dg)/(g^2)$$

verifieert men door de differentialen in linker- en rechterlid afzonderlijk in een punt (x, y, z) uit te rekenen (met behulp van de gewone regels van Leibniz voor het differentiëren) en te controleren dat de resultaten gelijk zijn.

Wat we hier gedaan hebben voor functies $w = f(x, y, z)$ van drie variabelen, kan natuurlijk net zo goed bij functies van elk ander aantal variabelen worden uitgevoerd. Bij een functie van één variabele $y = f(x)$ wordt de differentiaal dy gegeven door:

$$dy = f'(x)dx.$$

Dat is een functie van de variabelen x en dx die lineair is in dx.
Omdat lineaire functies van één variable zo weinig spectaculair zijn, komt de behandeling in dit geval niet zo erg uit de verf, vandaar dat ik gewerkt heb met functies van drie variabelen.

Zuiver geweten

Met het bovenstaande hebben we ons wiskundige geweten helemaal zuiver kunnen houden: we weten wat differentialen zijn, en we hebben daarbij gelukkig niets te maken gehad met 'infinitesimale' of 'oneindig kleine' grootheden waarvoor men ons in de wiskundecolleges zo kopschuw heeft gemaakt. Differentialen zijn gewoon bepaalde functies van twee soorten variabelen, die lineair zijn in de tweede soort. Heel mooi en heel bevredigend, maar waar zijn ze eigenlijk goed voor? Dat is een pijnlijke vraag waar we misschien het liefst hautain aan voorbij zouden gaan. Op school en in de rest van de boze wereld ontkom je er echter toch niet aan. En dan zul je moeten vertellen *waarom* je in zulke merkwaardige functies geïnteresseerd bent. De motivering is natuurlijk dat voor *kleine* waarden dx, dy, dz de uitdrukking:

$$f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz \qquad (4)$$

een goede benadering is van het functiewaardenverschil:

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z). \qquad (5)$$

In de wiskundecolleges wordt dat allemaal netjes met limieten uitgewerkt, maar dat vereist wel een flink stuk techniek dat we het beste maar als 'beroepsgeheim' voor onszelf kunnen bewaren.
Het komt erop neer dat het verschil (5) − (4) gedeeld door de lengte $|\underline{\mathrm{dx}}|$ van de vector $\underline{\mathrm{dx}} = (dx, dy, dz)$ naar nul gaat als de noemer naar nul gaat; de finesses laat ik hier maar rusten.
Trouwens, ik zinspeelde er al op: de hele bovenstaande behandeling van differentialen is voornamelijk een preek voor eigen parochie. Als je differentialen van functies van meer variabelen aan de niet-wiskundige beginner uitlegt, moet je, net als bij functies van één variabele, juist de nadruk leggen op *kleine* gekoppelde veranderingen van de variabelen. Dan vertel je dat de uitdrukking:

$$dw = f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz$$

voor kleine veranderingen dx, dy en dz van x, y en z *in eerste benadering* de verandering aangeeft in de waarde van de functie $w = f(x, y, z)$, en dat die benadering des te beter is naarmate dx, dy en dz kleiner zijn.
Wat we daarbij precies bedoelen met *in eerste benadering*, dat is ons beroepsgeheim!

Literatuur

[1] Craats, J. van de: *Een standbeeld voor Leibniz*, Euclides 64 (december 1988) p. 100-108.