

Zomaar twee lessen uit W12-16

H. B. Verhage

OW & OC, RU Utrecht

Inleiding

De titel van dit artikel 'Zomaar twee lessen uit W12-16' kan niet kloppen. Bij het W12-16 project, dat voorstellen voor een nieuw wiskundeprogramma voor 12 tot 16-jarigen ontwikkelt, zijn op dit moment vier experimenteerscholen betrokken. Dat betekent dat er op die scholen duizenden wiskundelessen per jaar gegeven worden. En dan zou dit artikel zomaar twee willekeurige lessen beschrijven? Nee, zo letterlijk moet de titel niet genomen worden. Maar wel: twee lessen die een voorbeeld zijn van wat we bedoelen met wiskundeonderwijs volgens het nieuwe programma en die ook in een doorsnee onderwijssituatie uitvoerbaar zijn. U zou ze zelf gegeven kunnen hebben.

De beschrijving die volgt gaat over statistiek. Geen nieuw onderwerp, want statistiek zit ook in het huidige programma. Het oude programma schrijft ons voor '(eenvoudige) beschrijvende statistiek'. Volgens ingewijden past dit 'op de achterkant van een postzegel'. Als het nodig is kan volstaan worden met een paar lesjes, waarin gauw de verschillende typen grafieken en het trio van de centrums (gemiddelde, modus, mediaan) gedaan worden. Meer is toch niet nodig voor het examen. Een blik in de verschillende methodes leert dat de boekenschrijvers er voor de tweede of derde klas wel iets meer van proberen te maken. Het moment der waarheid komt als je in het vierde klas-deel het hoofdstuk 'examentraining' bekijkt. Dan blijft er van de statistiek niet veel over. En wie, gedreven door tijdnoed, alléén de examentraining doet, zal inderdaad een redelijk eind komen met de achterkant van een postzegel.

In deze situatie moet verandering komen, daar is men het over eens. Statistiek moet een volwaardige plaats krijgen in het mavo C/D-examenprogramma. Argumenten hiervoor zijn:

- Statistiek is typisch een onderwerp met een belangrijke *algemeen vormende component*. In onze maatschappij worden voortdurend gegevens verzameld en bewerkt met het oogmerk iets te beschrijven, voorspellen of beslissen. Het dagelijks leven is doordrenkt met het gebruik van tabellen en grafieken die vaak statistisch van aard zijn. Leerlingen moeten leren deze tabellen en grafieken te lezen en er de relevante informatie uit te halen. Zo mogelijk

vanuit een kritische houding, maar in veel gevallen is begrijpen wat er eigenlijk staat al een heel ding.

- Statistiek is een belangrijk vak op veel *vervolgopleidingen*. Zowel in de richting van het mbo als havo/vwo (wiskunde A) wordt statistiek onderwezen en een goede voorbereiding daarop is wenselijk.

Statistiekpakket

Het pakketje *Statistiek* dat ontwikkeld is in het kader van W12-16 bestaat uit vier hoofdstukken: *Grafieken en tabellen in de statistiek*, *Het stambladdiagram*, *De boxplot* en *Beschrijven en voorspellen*.

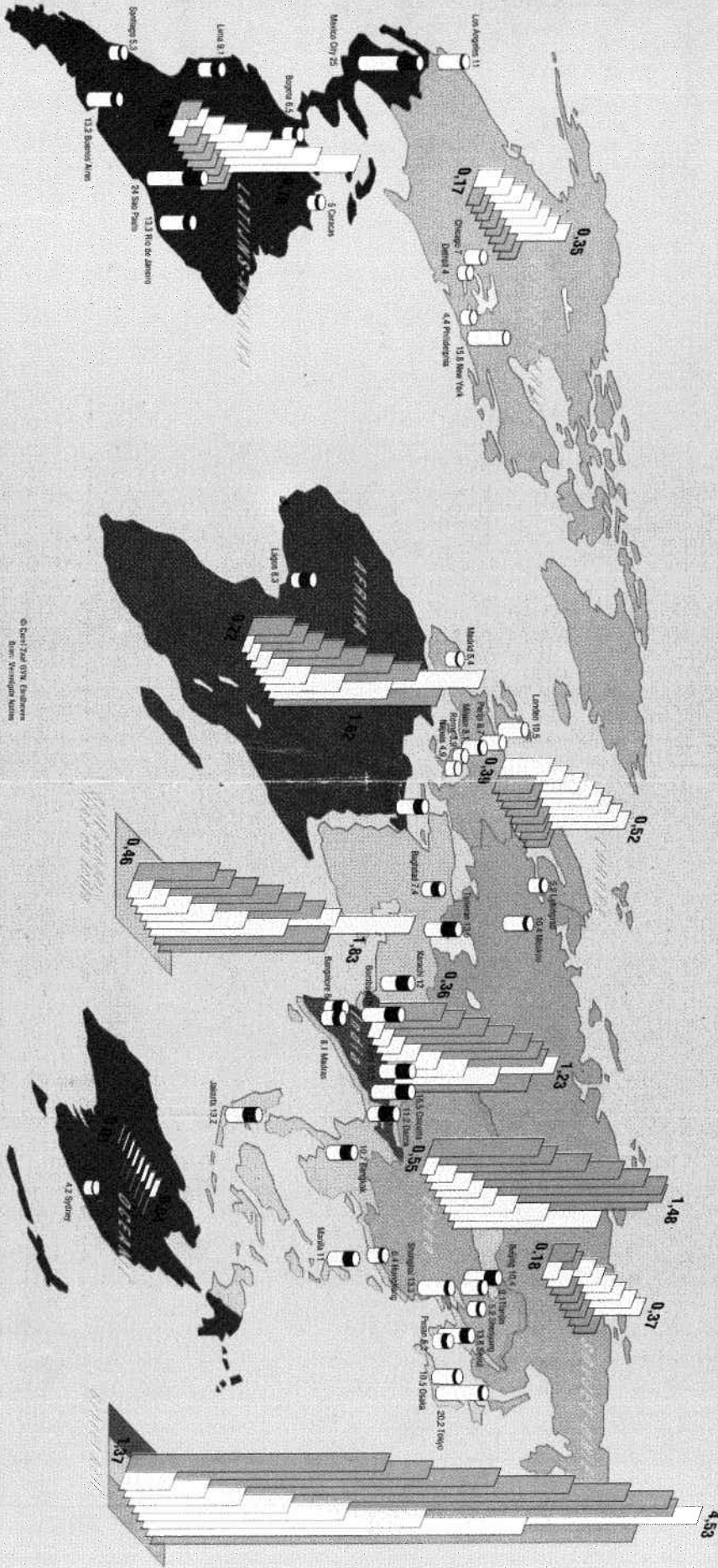
De hoofdstukken over Stambladdiagram en Boxplot zijn te vergelijken met de hoofdstukken over deze onderwerpen uit de statistiekpoot van de Hawex-wiskunde A (zie hiervoor [1] en [2]). Het stambladdiagram lijkt echter heel geschikt voor lbo/mavo, het vraagt geen voorkennis en spreekt makkelijk aan. Over de boxplot zou ik een dergelijke uitspraak nog niet durven doen.

De andere twee hoofdstukken uit het pakket gaan over het gebruik van tabellen en grafieken in het algemeen: welke informatie kan ik eruit halen, op welke wijze zijn de gegevens weergegeven, wat is benadrukt, wat is weggelaten, enzovoort. Echt nieuwe technieken komen er niet aan te pas. Kenmerkend voor deze hoofdstukken is dat er steeds gewerkt wordt vanuit een echte context. Het vierde hoofdstuk, *Beschrijven en voorspellen*, is zelfs helemaal opgehangen aan één context: de groei van de wereldbevolking. Centraal staat een wereldkaart met grafieken van de (verwachte) wereldbevolking. De leerlingen krijgen deze kaart op A3-formaat, zodat alles goed is af te lezen.

Eén van de W12-16 experimenteerscholen is de Radboud mavo in Oldenzaal. Het statistiekpakket is in januari van dit jaar op deze school in de vierde klas uitgeprobeerd. In verband met het naderend schoolonderzoek was er beperkte tijd, zodat men alleen de hoofdstukken 1, 2 en 4 (gedeeltelijk) heeft doorgevoerd. De nu volgende lesbeschrijvingen gaan over het begin van hoofdstuk 4, de groei van de wereldbevolking. De fragmenten zijn grotendeels ontleend aan de lessen van Theo Obdeijn, één van de wiskundecenten van de school en betrokken bij het project W12-16.

VERSTEDELIJKINGSKAART

Vanaf het jaar 2015 woont meer dan de helft van de wereldbevolking in de steden



De eerste les

De docent leidt de les in door wat te vertellen over de context van de wereldbevolking en aandacht te besteden aan grote getallen.

D: 'Een miljard is een één met hoeveel nullen?'

ll: 'Negen.'

D: '0,13 miljard, hoeveel miljoen is dat?'

lln: '13 miljoen; 130 miljoen.'

Dat op zo'n vraag verschillende antwoorden komen, is wel haast zeker.

(In een andere klas kwam op de vraag '0,39 miljard, kan dat ook in duizenden? of in miljoenen?' een veel groter scala aan antwoorden: 390 duizend, 39 duizend miljoen, 39 miljoen, 3,9 miljoen. Deze docent had de tussenvraag over het aantal nullen niet gesteld. Bovendien leek het erop dat de leerlingen er aardigheid in hadden om maar gewoon een groot getal met 39 erin te roepen.)

Als het probleem van de grote getallen is opgelost, krijgen de leerlingen opdracht de wereldkaart eens goed te bekijken (zie de pagina hiernaast).

D: 'Stel je voor, het is een grote wandkaart die aan de muur hangt. Je moet iemand rondleiden en er wat over vertellen. Wat zeg je dan?'

De leerlingen bekijken de kaart, en geleidelijk aan komt het overleg op gang.

In de klassikale bespreking die volgt noemen de leerlingen, aangemoedigd door de docent, de volgende zaken (in steekwoorden genoteerd):

- er staat alleen maar op hoeveel het groeit;
- er staan geen getallen bij;
- het is voor de stad en voor het platteland;
- er zijn twee verschillende dingen, rondjes en staven;
- het zwart in de rondjes is hoeveel ze denken dat erbij komt;
- de witte staven is de stedelijke bevolking, de grijze het platteland;
- in Azië groeit het heel erg, vooral in China en India;
- Europa neemt weinig toe;
- de landen hebben een andere kleur (bedoeld wordt de getekende werelddelen, niet de grafieken);
- de staven met grijs en wit staan de ene keer links en de andere keer rechts;
- de jaartallen, de staven lopen van 1950 tot 2025 en de busjes van 1985 tot 2000.

Tenslotte legt de docent de link met aardrijkskunde. Een leerling met dat vak in het pakket weet dat het een moeilijk woord voor verstedelijking urbanisatie is.

Commentaar:

Even oefenen met grote getallen ('wat is ook alweer een miljard') wordt in de context van de wereldbevolking vanzelfsprekend 'meegenomen'.

De wereldkaart is zo rijk dat je er een les (of meer) mee zou kunnen vullen zonder er verder het boek bij te gebruiken. Vrijwel alles wat de leerlingen noemen is relevant voor de informatie die uit de kaart te halen valt. De genoemde aspecten verdienen stuk voor stuk nadere aandacht. Een mogelijke doceerstijl is om dit helemaal te doen aan de hand van wat de leerlingen zelf aandragen. Het beantwoorden van de vragen die in het pakketje staan, komt dan eigenlijk neer op het

opschrijven van wat er allemaal al gezegd is. Ook niet onbelangrijk trouwens! Een andere docent, met een andere doceerstijl, zal de leerlingen misschien liever de vragen uit het boek eerst zelfstandig laten doorwerken en daarna een klassikale nabespreking houden.

Uitgangspunt bij het experimentele lesmateriaal uit W12-16 is dat al deze verschillende doceerstijlen moeten 'kunnen'. Naast ruimte voor verschillende leerstijlen, moet er ook ruimte voor verschillende doceerstijlen zijn.

Theo Obdeijn vertelde me na afloop van de les dat hij vroeger, toen hij nog onderwijzer was, veel les heeft gegeven aan de hand van wandkaarten. Hij zou, met zijn doceerstijl, vermoedelijk prima uit de voeten kunnen met één exemplaar van de kaart voor de hele klas, maar dan liefst in kleur en op A0 formaat.

Het idee om met grote kaarten of platen te werken waar veel op staat, zou vaker toegepast kunnen worden in het wiskundeonderwijs. Een originele gedachte is dit natuurlijk niet, want deze werkvorm is al zo oud als de wereld. Het is wel een idee dat verdient om opnieuw voor het voetlicht gehaald te worden. Overigens passen de 'wandkaarten' zoals hier bedoeld ook prima in het idee van het 'wiskundewerklokaal' dat we in het kader van het W12-16 project propageren.

Verder met de les:

Na het klassikale gedeelte, dat ongeveer een kwartier in beslag heeft genomen, gaan de leerlingen zelf aan het werk met de eerste opgave uit het boek:

Hieronder staat een tabel van de wereldbevolking in miljarden.

jaar	wereldbevolking in miljarden
± 1630	$\frac{1}{2}$
± 1820	1
± 1890	$1\frac{1}{2}$
1930	2
1950	$2\frac{1}{2}$
1960	3
1968	$3\frac{1}{2}$
1975	4
1981	$4\frac{1}{2}$
1987	5

- a. Zet de gegevens uit deze tabel in een grafiek.
- b. Probeer op grond van deze gegevens de wereldbevolking in het jaar 2000 te voorspellen.
- c. Kun je ook een voorspelling doen voor het jaar 2100? Waarom wel/niet?

Deze opgave staat los van de wereldkaart. Als de gevraagde grafiek getekend is en er een voorspelling voor het jaar 2000 is gedaan, kunnen de uitkomsten uiteraard wél vergeleken worden met de gegevens die op de wereldkaart staan.

D: 'We spreken af de tijd op de horizontale as te zetten. Ik zal letten op de verdeling op de assen. Verder moet het een duidelijk plaatje worden, want dat moet straks (de docent verwijst naar het examen) ook.'

De leerlingen gaan aan het werk. De grafieken die gemaakt worden zien er netjes uit:

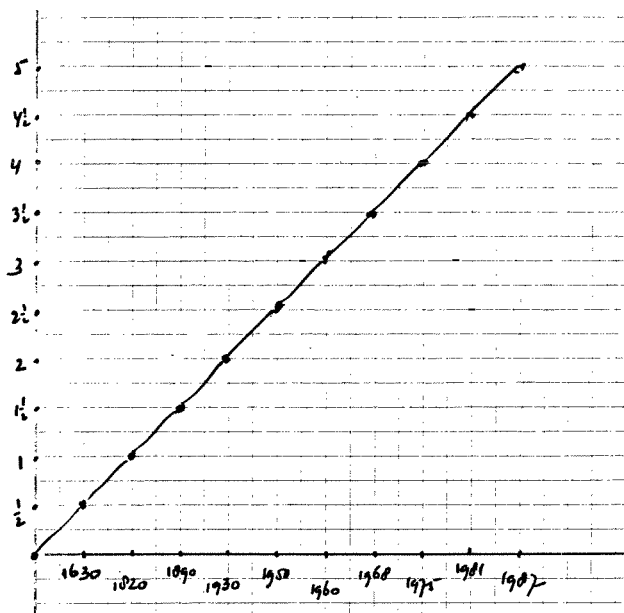


fig. 1

De meeste leerlingen tekenen zo iets als dit. Sommigen komen met een histogram aanzetten:

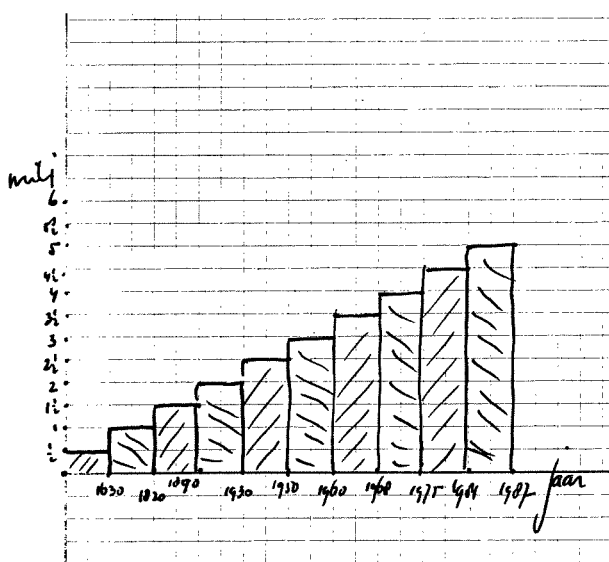


fig. 2

Er ontstaat een discussie of een histogram mag in dit geval.

De docent loopt rond en zegt hier en daar: 'Nul punten!' Verbazing onder de leerlingen, is het niet goed? Slechts een enkeling heeft een indeling op de tijdas gemaakt waarbij de jaartallen 'afstandsgetrouw' worden weergegeven. Er volgt een klassikale bespreking over hoe de tijdas ingedeeld moet worden om wel een goede grafiek te krijgen. Met die aanwijzing tekenen de leerlingen nogmaals een grafiek. Uiteraard krijgt nu iedereen het exponentiële groeiproces in beeld, zij het dat er op detailpunten nog wat varianten optreden (de meetpunten verbinden met rechte lijntjes, een vloeiende kromme door de punten trekken, allemaal staafjes oprichten op de jaartallen die meedoen). Uit één van de schriften:

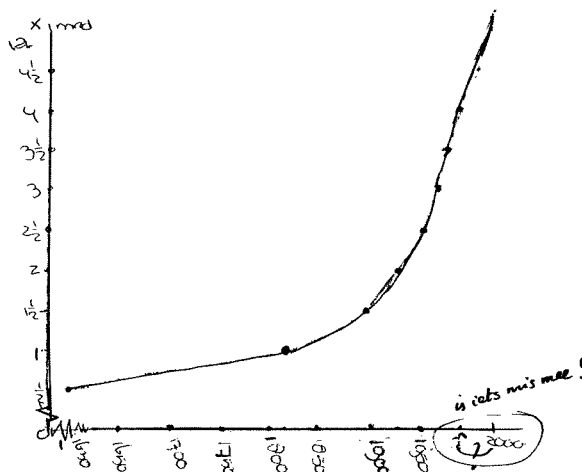


fig. 3

Commentaar:

Een voorbeeld van een opgave die niet zo recht-toe-recht-aan is als die op het eerste gezicht lijkt. De leerlingen gaan vlot aan de slag (op enkele na, het is vrijdagmiddag), want een grafiek tekenen, dat kunnen ze wel. Weliswaar vermeldt de opgave niet wat voor een grafiek ze precies moeten tekenen, maar van vierde klassers mag verwacht worden dat ze daar zelf iets voor kunnen bedenken. De regelmaat in de tabel, de toename met steeds een half miljard, zet de leerlingen echter volledig op het verkeerde been. Ze handelen rechtlijnig, letterlijk en figuurlijk. Ze zijn ook tevreden over de grafieken die ze tekenen. Opmerkelijk is, dat noch de lineaire, noch de exponentiële grafiek verbazing bij de leerlingen oproept. De terugkoppeling met de context of algemene kennis over de groei van de wereldbevolking, wordt niet gemaakt. De docenten deden dit wel, zij schrokken van de enorme bevolkingsgroei van de laatste decennia!

Deze opgave stipt een onderwerp aan waar in het nieuwe 12-16 programma meer aandacht aan besteed zal worden. Zonder teveel op de formeel wiskundige details in te gaan, zouden leerlingen toch enig besef moeten hebben van groeiprocessen, lineair en exponentieel. Ze zouden tabellen en grafieken moeten kunnen labelen in termen van 'het groeit met een vaste hoeveelheid per tijdseenheid' en 'het groeit steeds harder, de groeifactor is constant'.

De onderdelen b en c van de opgave hierboven gaan eigenlijk over de vraag in hoeverre extrapoleren is toegestaan. Leerlingen vinden het nogal wies dat je voor het jaar 2000 wél, en voor het jaar 2100 niet iets zinnigs kunt zeggen op grond van de gegevens uit de tabel. Het gezond verstand laat hen hier gelukkig niet in de steek.

Doordat bijna alle leerlingen de mist in zijn gegaan met het tekenen van de grafiek van de wereldbevolking, heeft deze opgave meer tijd genomen dan de docent van te voren heeft ingeschat. Om toch nog vóór de bel het verband met de wereldkaart terug te halen, laat de docent aan de hand van de kaart de verwachte wereldbevolking voor 2025 uitrekenen en vergelijken met de voorspelling op grond van de grafiek van opgave 1.

Overigens, een andere docent behandelde eerst klassikaal het probleem van de indeling van de tijd, en liet pas daarna de leerlingen de grafiek tekenen. Deze aanpak kost veel minder tijd, want de leerlingen hoeven maar één keer een grafiek te tekenen, in plaats van eerst een foute en daarna een goede. Aan de andere kant worden ze op deze manier minder geconfronteerd met de adder die onder het gras schuilt. Ze zullen de opgave misschien gemakkelijk vinden omdat ze het probleem waar het om gaat niet eens echt hebben opgemerkt.

De tweede les

Maandagochtend wordt de draad van de vrijdagmiddag weer opgepakt. De leerlingen werken zelfstandig aan de opgaven 3, 5, 6, 7 en 4 (in deze volgorde).

Op de verstedelijkingskaart staat in Europa de volgende grafiek getekend:

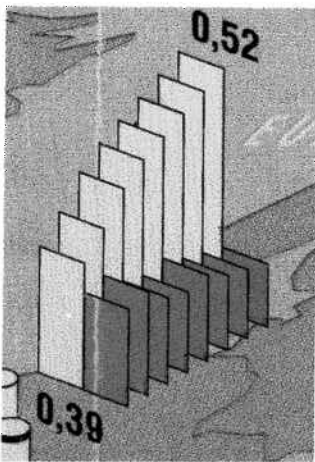


fig. 4

3. a. Wat stellen de witte staven voor? En de grijze?
b. Wat betekenen de getallen 0,39 en 0,52?
4. a. Hoeveel mensen woonden er in Europa in 1950 in de stad en hoeveel op het platteland?
b. Wat is de voorspelling voor 2025?
5. Hoe zal men aan de gegevens voor de jaren 1950-1980 gekomen zijn? En aan de gegevens voor de jaren daarna (van 1990 tot 2025)?
6. Vul met behulp van de kaart de volgende tabel in:

werelddeel	inwoners in 1950	inwoners in 2025 (verwachte aantal)
Noord-Amerika		
Latijns-Amerika		
Europa		
Afrika		
Azië		
Oceanië		
totaal		

7. In welk werelddeel neemt de bevolking het hardste toe?

Opgave 3 is bedoeld om in de stemming te komen, opgave 4 is de vraag waar het eigenlijk om gaat. De bespreking hiervan staat verderop.

De bedoeling van opgave 5 is om even aandacht te besteden aan het verschil tussen beschrijven en voorspellen. Typisch een opgave voor een klasgesprek. De docent maakt de vraag nog wat concreter voor de leerlingen:

‘Als je zou weten hoeveel mensen er in 1990 zijn geboren, kun je dan iets zeggen over 2020?’

II: ‘dan zijn die mensen dertig.’

Hieraan rekenen zou op deze plek en voor deze leerlingen te ver voeren (dat is bovenbouwstof wiskunde A), maar enig gevoel voor wat er zoal komt kijken bij voorspellen moet de leerlingen bij te brengen zijn.

Het invullen van de tabel van opgave 6 is een kwestie van de juiste gegevens overschrijven van de kaart.

Opgave 7 is interessanter.

De eerste reactie van de leerlingen op deze vraag is Azië, maar enkelen vertrouwen dit voor de hand liggende antwoord niet zo erg: ‘er steekt vast wat achter’. Een leerlinge breidt de tabel van opgave 6 uit met een extra kolom, waarin het quotiënt van het aantal inwoners in 2025 en het aantal in 1950 komt te staan. Dan springt Afrika eruit met meer dan een verzevenvoudiging van de bevolking, tegen Azië ruim een verdriedvoudiging. Het ligt er dus maar aan waar je naar kijkt, absolute of relatieve groei. Ook dit is een aandachtspunt voor een klasgesprek. Overigens had de docent de twee verschillende benaderingswijzen voor dit probleem ook niet opgemerkt. Maar hij moest het dan ook nog zonder docentenhandleiding stellen, waar de verschillende antwoordmogelijkheden die te verwachten zijn in horen te staan.

De docent heeft bij opgave 4 de aanwijzing gegeven om een verhoudingstabel te maken. Deze suggestie nemen de leerlingen grif over. In de schriften komt zo iets als:

mm	samen	stad	plat.	samen	stad	plat.
	21	12	9	28	23	15
miljard	0,39	0,17	0,17	0,52	0,42	0,09

fig. 5

Bij het invullen van deze tabel komt het één en ander kijken:

- bedenken dat de staafjes opgemeten moeten worden en dat millimeters volgens de juiste verhouding omgerekend moeten worden naar miljarden;
- inzien dat de getallen bij de grafiek op totalen voor stad en platteland betrekking hebben, zodat de staafjes afzonderlijk gemeten en vervolgens opgeteld moeten worden;
- een oplossing verzinnen voor het meten van het achterste witte staafje, dat gedeeltelijk verscholen gaat achter andere staven.

Voor wat dit laatste probleem betreft: de leerlingen meten het zichtbare deel van het witte staafje en tellen daar de lengte van het grijze staafje bij op om de totale lengte van het witte staafje te vinden.

Commentaar:

Je zou opgave 4 een 'samengestelde afleesvraag' kunnen noemen, dit in tegenstelling tot een 'enkelvoudige afleesvraag', zoals opgave 3 bijvoorbeeld. Bij een enkelvoudige afleesvraag kan het gevraagde rechtstreeks uit de gepresenteerde tabel of grafiek afgelezen worden. Dergelijke vragen dienen ervoor om actief lezen te bewerkstelligen. Bij een 'samengestelde afleesvraag' moeten er gegevens uit een tabel of grafiek gehaald worden waar nog iets mee gedaan moet worden. Gegevens met elkaar combineren of juist splitsen, interpoleren, omrekenen naar een andere eenheid (bijvoorbeeld normeren op procenten), aan dit soort activiteiten moet u denken. De enkelvoudige afleesvragen zijn meestal makkelijk, de samengestelde vragen zijn moeilijk. Als ontwerper heb je weleens de neiging om alleen maar samengestelde vragen in een tekst op te nemen. Die zijn leuker om te bedenken en qua leerlingenactiviteit van een veel hoger niveau. Echter, ik denk dat zowel leerlingen als docenten prijs stellen op een goed evenwicht tussen enkelvoudige en samengestelde vragen. Altijd op je tenen lopen dat houdt niemand vol, zo nu en dan iets gemakkelijks of wat routinewerk tussendoor maakt het leven een stuk aangenamer. Wie teveel gemakkelijke vragen aantreft slaat er maar wat van over, wie flink tempo wil maken kan van de moeilijke vragen wat overslaan. Voor de zwakkere leerling zal de juiste 'mix' er uiteraard anders uitzien dan voor de leerling van vier mavo met wiskunde in het pakket.

Bij opgave 4 wordt met recht een 'meetkundige activiteit' bedreven. Mede door de komst van de computer worden er tegenwoordig steeds vaker 'fantasie'grafieken geproduceerd. Vooral de dynamisch ogende 3D-grafieken lijken erg populair te zijn. Meestal zijn die grafieken wel terug te voeren op een of ander bekend standaardtype (staafdiagram, lijngrafiek, e.d.). Een doel van statistiek in W12-16 is dat leerlingen leren de essentie te halen uit al die fraai vormgegeven grafieken

en door de franje heen te kijken. Daar is soms wel enige meetkunst voor nodig.

De verhoudingstabel is een uitstekend hulpmiddel bij deze opgave. Binnen de rekenlijn die in het kader van W12-16 ontwikkeld wordt, is de keus gemaakt om de verhoudingstabel als stuk gereedschap voor rekenproblemen een belangrijke plaats te geven. Waar mogelijk kan daar binnen de andere leerstoflijnen gebruik van gemaakt worden, zoals hier bij statistiek.

Tenslotte

Als het goed is, geven bovenstaande observaties een indruk van hoe lessen met experimenteel lesmateriaal in het kader van het W12-16 project verlopen. Daarbij moet wel opgemerkt worden dat statistiek een onderwerp is dat al redelijk ver is uitgekristalliseerd en waarbij, althans op dit niveau, ook geen al te grote didactische beren op de weg liggen. Bij andere onderwerpen ligt dat soms anders. Wat voor statistiek nog wel een belangrijke taak is, is het bewerken van het materiaal dat al voorhanden is voor de zwakkere leerlingen. Statistiek is ook voor hen een aantrekkelijk onderwerp, maar de leerroute zal hier en daar wat anders uitgezet moeten worden.

Overigens, in het eerste nummer van de volgende jaargang van de Nieuwe Wiskrant kunt u uitvoeriger berichtgeving uit het W12-16 project tegemoet zien.

Met dank aan docenten en leerlingen van de Radboud mavo te Oldenzaal.

Literatuur

- [1] Zee, L. van der: *Statistiek bij Hawex (1)*, Nieuwe Wiskrant, jrg 8, nr 2, 1989.
- [2] Zee, L. van der: *Statistiek bij Hawex (2)*, Nieuwe Wiskrant, jrg 9, nr 1, 1989.