En de variabelen, hoe staat het daarmee?

Algebragroep W12-16 [1]
OW & OC, RU Utrecht/SLO, Enschede

Inleiding

'Wiskunde is pas echt met een x erbij.'
'Het is prachtig hoor, al die meetkunde met kijken naar bootjes op de horizon en oogschaduw. Met die mooie plaatjes bij statistiek, met dat praktische rekenen en dat GWA (Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten). Maar leren ze zo nog wel letterrekenen? En dat je wortel acht niet mag laten staan en hoe je de top van de parabool vindt? Want dáár gaat het toch om als je verder wilt of moet met wiskunde.'

Zo klinkt het soms in gesprekken rond het W12-16 project. En het geeft een groot probleem prima weer, dat je wat zwaarder op de hand ook zo kan formuleren:

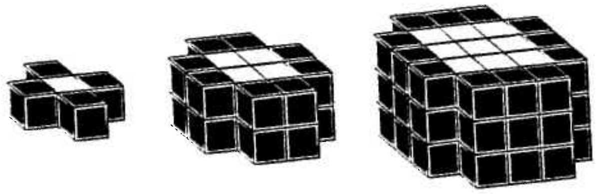
> biedt de gekozen lijn, die van binnen contexten opgebouwde wiskunde, wel voldoende steun voor het opbouwen van geformaliseerde vaardigheden zoals letterrekenen? Zo ja, wat doet W12-16 er dan aan?

Dit artikel gaat op deze vraag in en biedt tevens een ruwe schets van de ideeën die in het team leven over de koers in de algebra. De schets is ruw, de ideeën hebben ongetwijfeld nog scherpe randjes, en volledig is het zeker niet.
In 1992 ligt er een veel gedetailleerder plan als 'voorstel algebra' op tafel, dat deels onderbouwd is met experimenten deels nog invulling behoeft. Daarin komen ook – hopen we – veel meer concrete voorbeelden voor dan in dit artikel.
We hebben er in het team voor gekozen de algebra grondig aan te pakken. Dat wil zeggen dat we eerst willen vaststellen 'welke algebra' we eigenlijk willen, wat we er mee willen en hoe we dat willen realiseren. Daardoor is dit artikel wat beschouwender dan de artikelen over de andere leerstofgebieden. Maar we theoretiseren niet alleen maar; onderdelen van de algebralijn die we proberen uit te zetten zijn al uitgeprobeerd in de klas. En dáár beginnen we dan ook om straks meer algemeen te kunnen beschrijven.

Winnende formules

Nu – in mei – wordt door een 3 mavo klas gewerkt met het pakket *Winnende formules*.

Aanvankelijk wordt daar gekeken naar bouwsels van witte en zwarte blokken. Er zijn rijen van zulke bouwsels, rijen met een duidelijk patroon erin:



rangnummer 1 2 3

Er wordt gerekend aan bouwsels 5 en 7. En – omdat er regelmaat is – ligt het voor de hand formules op te stellen voor de aantallen witte en zwarte blokjes. Vóór dat dat gebeurt, is deze vraag aan de orde geweest:

a. *Is er een bouwsel met precies 200 zwarte kubussen?*

b. *Welke getallen zijn het aantal zwarte kubussen van een bouwsel?*
100, 1, 40, 27, 512, 16, 0, 1000, 25.

c. *Weet je er nog meer?*

d. *Hoe bereken je hier die getallen?*

Vraag b lokt veel uit. De meeste leerlingen deden: deel door vier en dan de wortel. Dat wil zeggen bij 100 ga je eerst zoeken hoeveel op één kant zitten. Dat wordt 25. Dan was het dus 5 bij 5. Eén leerling deed het anders: neem de wortel en deel dan door 2. Bij 100 dus eerst naar 10, en dan naar 5. Het klopte steeds! Op het bord kwam nog dit:

$$\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{2}$$

Dat ging te ver; het klopte, maar of het als verklaring voor de rest van de gevallen goed was, dat leek er niet op.
Later worden formules opgesteld voor wit en zwart, uitgedrukt in het rangnummer. De leerlingen zijn vrij in het kiezen van de naam van die variabele.
Het computerprogramma dat de leerlingen erbij gebruiken accepteert die namen en de formules, zolang ze enigszins redelijk zijn. Het programma heet TABEL en

we zien bijvoorbeeld op een van de schermen deze tabel:

TABEL

	blokje	witte	zwarte	witte+zwarte
r1 :	0	0	0	0
r2 :	1	1	4	5
r3 :	2	8	16	24
r4 :	3	27	36	63
r5 :	4	64	64	128
r6 :	5	125	100	225
r7 :	6	216	144	360
r8 :	7	343	196	539
r9 :	8	512	256	768
r10 :	9	729	324	1053
r11 :	10	1000	400	1400
r12 :	11	1331	484	1815
r13 :	12	1728	576	2304
r14 :	13	2197	676	2873
r15 :	14	2744	784	3528

```
witte   = blokje * blokje * blokje
zwarte  = blokje * blokje * 4
```

Deze leerling heeft ingetoetst:

blokje (boven de 'lopende' kolom)
witte (boven kolom 2)

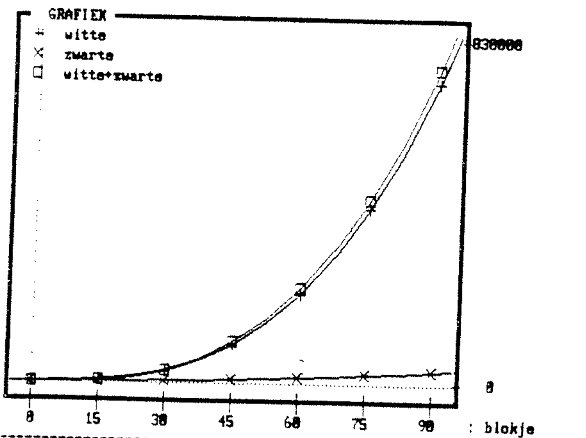
De computer vroeg toen:

<< witte >> is onbekend.
Tik in hoe witte met blokje samenhangt.
witte = ▮

Het antwoord is geweest:

blokje ∗ *blokje* ∗ *blokje*

Net zo kwam *'zwarte = ...'* tot stand.
De computer leidt je steeds naar de plekken waar je zulke dingen kunt intoetsen, ook naar waar de 0 en 1 onder *blokjes* staat. Aanvullen tot 0 – 14 en doorrekenen wordt voor je gedaan.
Er is al vastgesteld dat bij rangnummer 4 wit evenveel als zwart is. Immers: vier plakken zwart maken juist een kubus in dit geval. Maar dat wit zo sterk overheerst als je dóórgaat, dat wordt echt duidelijk als je de grafiek van zwart, wit en zwart en wit in één plaatje ziet.



0	3375	27000	91125	216000	421875	729000	: witte
0	900	3600	8100	14400	22500	32400	: zwarte
0	4275	30600	99225	230400	444375	761400	: witte+zwarte

Er is een keuze-menu naast de tabel op het scherm (hier niet afgebeeld om verwarring te voorkomen). Je kunt GRAFIEK kiezen; als je de range uitgebreid hebt tot 0 ~ 90 krijg je nu zonder verdere moeite de grafiek.
Een leerling zei, na enig doorvragen:
'Die zwarte, dat is niks vergeleken met wit. Dan zie je haast geen verschil tussen *witte* en *totaal.*'
Ik twijfel er aan of hij dit zonder grafiek had gezien, per slot van rekening is er maar één cijfer verschil, 32400 en 729000 zijn allebei gróót.

In het pakket *Winnende formules* moet je je redeneringen ook formaliseren.
De formules voor wit en zwart staan vaak onder elkaar en dat lokt iets uit.

$$wit = r * r * r$$
$$zwart = r * r * 4$$

In *wit* zit een *r* méér. Die wint van de '4'. En boven de 4 worden wit en zwart nooit gelijk.

Later worden de formules veranderd, losgemaakt van de bouwsels. Nu blijven de formule-redeneringen gelden. Zo komt er de volgende opgave:

>>*Kun jij je bij deze formules een kubus-, een tegelpatroon, of een andere situatie voorstellen?*

$$120 * r * r * r = w$$
$$6 * r * r * r * r = z$$

De meetkundige ondersteuning is weg, alleen met de pure formules wordt nog gewerkt. De 4-plakken redenering slaat nergens meer op, het is zuiver algebra geworden.

Het ziet er niet vreselijk spectaculair uit: het gaat om eenvoudige formules en niet al te moeilijke vragen erover.
Wel zijn er een paar accenten aan te geven die om allerlei redenen tot nog toe naar onze zin te weinig aan bod zijn gekomen. Het zijn zaken die ook te maken hebben met de vraag: wat voor onderwerpen vinden we nu eigenlijk belangrijk om in het leergebied algebra al in de twaalf-zestien periode op te nemen.
Vier van die accenten halen we nu eerst naar voren:

a. grootte-orde van formules;
b. formules vormen in actieve taal: opschrijven wat je denkt;
c. variabelen die bewegen;
d. woordformules.

Grootte-orde, andere functies

Het hoofdthema van het pakket is het verloop van een functie, in vergelijking met een andere. Dat derde machten bijvoorbeeld altijd sneller groeien dan tweede machten, wat de factor ervóór ook is.
Vaak gaat het in de algebra om precies oplossen: voor welke *x* is ..., waar ligt de top van ..., enzovoort. In winnende formules komen vragen van die soort ook voor,

maar dan meer in het kader van het sneller – of langzamer – toenemen van functies.
Eigenlijk worden de details hier bekeken vanuit het geheel. De grafiek, vooral het globaal kijken ernaar, speelt een grote rol. Voorbereidingen daartoe zien we al in de pakketten *Grafiekentaal* en *Regelrecht*, die door de SLO zijn uitgebracht. Hier komt er bij dat we de formule in dit globaal kijken betrekken.

Het steeds-weer-verdubbelen, de functie 2^r, die nog sneller gaat dan r^3, kan op zo'n zelfde manier verkend worden. Het is duidelijk: we willen ons niet meer beperken tot enkele typen functies (lineaire en kwadratische), die dan op allerlei details worden onderzocht. Bij die uitbreiding van het assortiment functies kijken we dan naar heel andere zaken als gewoonlijk, bijvoorbeeld naar de grootte-orde.
In een kwadratische functie, bijvoorbeeld $x^2 + 3x + 5$ speelt rond $x = 0$ de term x^2 nauwelijks een rol, terwijl ver van nul $3x + 5$ slechts een klein deeltje aan het geheel bijdraagt. Dergelijke overwegingen, vaak ook van kwalitatieve aard, zijn belangrijk in toepassingen. Denk daarbij aan bijvoorbeeld oppervlakte/inhoud-verhouding en aan de exponentiële groei van bijvoorbeeld virussen in epidemieën. Zonder met moeilijke (e-) machten te werken, valt daar al heel veel te exploreren rond herhaald verdubbelen. Denk ook aan het verkennen van de E-notatie voor grote getallen, die op de rekenmachine al snel spontaan opduikt.

Formules formuleren

'De witte blokjes groeien harder, dat is inhoud. Die zwarte is alleen lengte keer breedte, dat gaat niet zo hard.' Zo formuleerde een leerling het.
Er werd niet gezegd: deel zowel in $n * n * n$ en $4 * n * n$ twee n-en eruit. Dat is ook héél iets anders: het is een formalisme dat niet direct uit de context voortkomt. Opmerkelijk is ook dat vaak $n * n * 4$ werd genoteerd: de zwarte kanten is $n * n$ en dat vier keer. Blijkbaar kan de context steunen bij:
- het opstellen van de formule;
- het redeneren met de formules.

We willen – analoog aan dit voorbeeld – veel situaties geven waarin een dergelijke 'natuurlijke' formalisatie tot stand kan komen. Daarbij geldt de overweging dat formalismen in de algebra die meer 'van boven worden opgelegd' eerder tot ontsporingen leiden dan de zelf bedachte en zelf ontdekte regels. Het voorbeeld laat zien dat de twee soorten essentieel kunnen verschillen.

Een goede ingang lijkt: eerst met getallen werken, pas met formules als dat nodig is.
In *Winnende formules* wordt de situatie bijvoorbeeld eerst via rekenen verkend. Je kunt daarna in:

$400 * 400 * 4$

voor de zwarte blokjes echter ook 'algebra' zien. Die 400? Nou ja, bedoeld is natuurlijk het rangnummer waar je mee bezig bent. 400 is het getal zelf, bij als het ware zijn voornaam genoemd, 'rangnummer' is zijn 'beroepsrol'.
Via functioneel gebruik van getallen en beschrijving in zulke 'rollen' tot eenvoudige formules komen, het lijkt een natuurlijke gang van context naar formule. Straks komen we op twee essentiële stappen in dit proces – de stap van context naar rekenrecept en van rekenrecept naar formule – nog even terug.

Er lijken hier goede mogelijkheden te zijn voor begripsondersteunend computergebruik. In een toekomstig artikel gaan we uitvoeriger in op het gebruik van de computer bij algebra. Lukt het je, je beschrijving aan de computer door te brieven, dan heb je wat bereikt: getalsresultaten krijg je dan zonder moeite.

Variabelen bewegen

Eén van de rollen van variabelen is dat ze variëren. Vaak manipuleren we met letters als waren het even starre zaken als 1 en 2. In het voorbeeld is de variabele n of r of *blokje* of *rangnummer* eerst gebruikt als algemene beschrijver. Het blijkt dat we, denkend aan n als bewegend van klein naar groot (en terug), makkelijker komen tot conclusies over de formules. Bij $n * n * n$ en $n * n * 4$ wint de eerste véruit, omdat de laatste n van de drie veel groter wordt dan 4. Zulke 'dynamische' benaderingen van variabelen bereiden het ontwikkelen van rekenformalisme met de uitdrukkingen op zich prachtig voor.

We nemen nog een voorbeeld uit de natuurkunde bij de kop ter illustratie: de lenzenformule. Daarin is b de 'beeldafstand', v de 'voorwerpafstand' en f de 'brandpuntafstand'. In natuurkundeboeken hangen ze zo samen:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

Geen lens houdt zich daar tegenwoordig precies aan; de formule geldt alleen voor dunne lenzen. Maar als benadering is het oké, en kan er leuke wiskunde mee worden gedaan. f is vast, we zoomen niet. Hoe hangen b en v nu eigenlijk samen?

Als b stijgt dan daalt $\frac{1}{b}$
en omdat $\frac{1}{b} + \frac{1}{v}$ constant is (namelijk $\frac{1}{f}$)
moet dan $\frac{1}{v}$ stijgen
en dus daalt v.

Een kwalitatieve redenering. We willen dergelijke vormen van kwalitatief redeneren met variabelen meer aandacht geven. Het dynamische aspect van variabelen is daarbij van groot belang. De verschillende stappen in dit voorbeeld zijn in feite van twee typen, te weten:

als x (positief) stijgt, daalt $\frac{1}{x}$ en andersom

en

als $x + y$ constant is, dan stijgt x als y daalt en andersom.

Zo iets als dat laatste geldt natuurlijk ook voor $x * y$. Algemeen: het moet uit de lengte of de breedte komen.

Woorden in formules

Een speciaal aspect van 'formules formuleren' willen we nog even benadrukken: het gebruik van hele woorden in formules. Zeker aanvankelijk is dat een steun. Je kunt aan:

*prijs = vastrecht + aantal * stuksprijs*

direct zien wat er bedoeld wordt. De formule bevat nog woorden uit de context waar het over gaat. Zou zo'n formule ooit aanleiding geven *vastrecht* en *aantal* bij elkaar optellen?

Je kunt er zelfs een hoop andere 'moeilijkheden' duidelijker mee krijgen dan met letters. Neem parameters in formules. Onze prijs-formule bevatte er twee.
Je kunt namelijk *prijs* en *aantal* bij een bepaald *vastrecht* en *stuksprijs* in een tabel of grafiek bekijken. Dan lóópt *aantal*. Je kunt daarna hetzelfde doen met een ander *vastrecht*. Weer lóópt *aantal*.
Nu bekijk je het geheel. Als *vastrecht* stijgt, verschuift de grafiek, kun je dan vaststellen. Er is hierachie in de variabiliteit: Op de bodem heb je steeds 'lopend' *aantal*. Van een verdieping hoger zie je het geheel veranderen als *vastrecht* of *stuksprijs* wijzigt, bij verschillende prijsstellingen als het ware. Steun zijn hier de 'rollen' van de getallen. Je bekijkt niet zo direct *prijs* als afhankelijk van *stuksprijs*, bij vast aantal. (Tenzij je daar een reden voor hebt). De context steunt hier weer de inzichten in de formele structuur.

Zo valt het gebruik van woorden (in tegenstelling tot letters) voor variabelen onder nog een uitgangspunt: wees zo duidelijk mogelijk. Formules en letterrekenen, het is niet bedoeld als een magisch gebeuren op zich, maar als een middel om kort en duidelijk te zeggen wat anders lomp en vaag zou blijven. Wie algebra 'leert' dient dat ook zo te ervaren. Als het er meer op lijkt dat formules en letterrekenen juist een extra-probleem zijn, dan is er iets mis....

Actietaal

In het voorgaande spelen didactische en wiskundig-inhoudelijke argumenten steeds door elkaar. Dat lijkt verwarrend, maar het hoort tot het wezen van de wiskunde. Wat is bewijzen bijvoorbeeld anders dan een georganiseerde manier om anderen (en jezelf!) duidelijk te maken dat iets waar is? Didactiek dus in feite!
Bij het volgende hoofdthema is dat allemaal nog meer verweven. We gaan nog even terug naar de wortels in *Winnende formules*. Daar kwam een handelingsrecept uit het klassegesprek boven drijven:

deel door 4, neem dan de wortel.

Het is een recept, het vertelt in stappen wat je moet doen om het bedoelde resultaat te vinden.
Het is veel eenvoudiger dan:

$$\sqrt{\frac{x}{4}}$$

Zo'n formule is eigenlijk een vertaling van de actietaal naar iets anders: een ding waarin je voor x iets kan invullen. Na dat invullen moet je dan tóch vertalen naar:

delen door 4 en dan wortel nemen

als je écht een uitkomst wilt krijgen.
Zo in 'actietaal' omgaan met rekenen zien we in praktisch alle wiskundemethodes. Het heet werken met machientjes, rekendoosjes, pijlentaal, noem maar op. Daarbij gaat het in hoofdzaak om twee aspecten:

a. Het vertalen van een 'context' naar een reken-recept.
b. Voorbereiden van het functie-begrip. Een pijl of rekendoosje is dan een denkmodel voor wat een functie is.

Wij willen in de uit te zetten algebralijn actietaal doelgericht gebruiken en serieus nemen als wiskundig gereedschap. Als 'gereedschap', en daarbij vooral het omkeren van een keten van acties. Neem de prijs-aantal vergelijking als voorbeeld. In actietaal is de formule:

$$\textit{aantal} \xrightarrow{*\textit{stuksprijs}} \quad \xrightarrow{+\textit{vastrecht}} \textit{prijs}$$

Nu gaan we 'achteruit' werken, vanuit prijs naar aantal. Dat wordt vanaf *prijs* werken en alles omkeren:

$$\textit{aantal} \xleftarrow{:\textit{stuksprijs}} \quad \xleftarrow{-\textit{vastrecht}} \textit{prijs}$$

De terugwerk-techniek is breed van toepassing. Je kunt met hetzelfde idee:

$y = 10\,x^2$
$y = 15 \sin(3x)$
$y = 900 - 18*x$

aanpakken.

Er zijn ook problemen. Het derde van deze voorbeelden blijkt het lastigst in een 'ketting' te vertalen. En sommige formules kunnen helemaal niet, soms is er ook geen éénduidig bepaalde omkering, zoals bij kwadrateren of sinus nemen. Als zulke situaties zich voordoen is het dus tijd om ook andere wiskundige technieken ter sprake te brengen!
Een paar aspecten van ketens zijn hiervan belang, en het leren waard:

- Het ombouwen van formules in actietaal. En andersom. Hier spelen allerlei zaken als volgorde van bewerkingen, haakjes, indelen in deelstukken een rol.
- Het leren werken met het 'ketting-idee' van bewerkingen.
- Kennis over welke bewerkingen elkaars omgekeerde zijn:
  - kwadrateren en wortelen;
  - optellen en aftrekken;
  - delen en vermenigvuldigen.

Is er ook een omgekeerde-macht-toets op de rekenmachine? Zie: het leidt vanzelf tot interessante wiskundige vragen.

Een klassiek probleem in het gebruik van de algebra is het herleiden van formules. De wet van Ohm bijvoorbeeld,

$\boxed{V = I * R}$

moet je vaak als $I = V/R$ of $R = V/I$ gebruiken. Zonder tot ezelsbruggetjes te vervallen, kan 'actietaal' hier helpen. Neem de vraag hoe I van V en R afhangt.

Je formule vertelt hoe je van I naar V gaat; ontleed in actie(s) is de formule:

$I \xrightarrow{*R} V$

En dus van V naar I zo:

$I \xleftarrow{:R} V$

ofwel (omdat we dat gewend zijn):

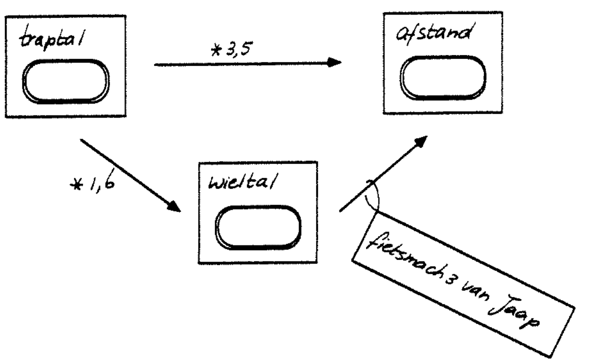
$V \xrightarrow{:R} I$

Kortweg $I = V/R$. Dat is dan weer de vertaling van actietaal naar formule. Er is niet mechanisch door R gedeeld 'aan twee kanten'. De werking van $V = I * R$, de acties die de formule in zich draagt zijn aangewend.

Er kan ook nog samenhang gelegd worden met variabelen die bewegen. Als $V = I * R$, dan moet het voor V uit de lengte of de breedte komen: als V vast blijft (220 volt bijvoorbeeld in Nederland) en R wordt groter, dan daalt I. Als je niet meer wist wat het was, V/R of R/V, dan heb je het nu teruggevonden.
Actietaal dus, ook in samenhang met dynamiek, met globaal kijken, met grafieken, en met gewone formules. We werken aan een verzameling opgaven die illustreert – in allerlei vormen – hoe actietaal te gebruiken is in de hele leerlijn algebra 12 t/m 16.

Trappers

In het experimentele pakket *Trappers* staat bijvoorbeeld het volgende schema voor het berekenen van *afstand* bij het fietsen door het tellen van hoeveel keer je de pedalen ronddraait.



Fietsmach 3 is hier wat uit de context van het pakket gehaald, maar het is duidelijk wat bedoeld wordt. Twee denkvragen koppelen terug naar de context:

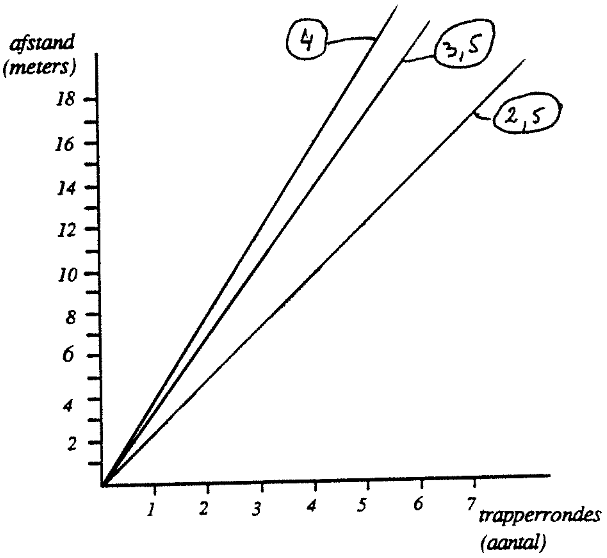
a. *Wat doet het ontbrekend machientje met* wieltal? *Vul het machientje in.*

b. *Kun jij een beschrijving geven van wat dat machientje betekent, als je denkt aan de fiets? Wat berekent het machientje van die fiets?*

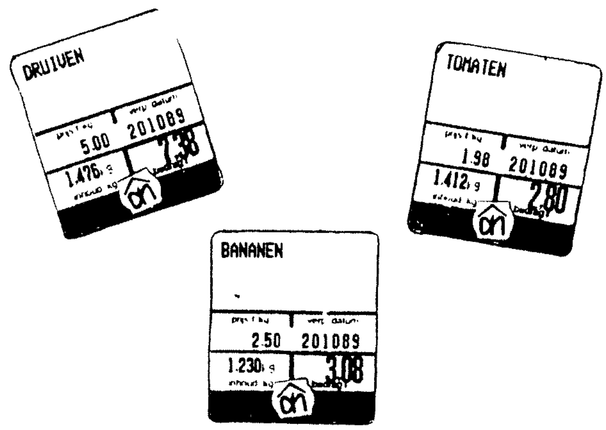
Gevaar is natuurlijk dat de metafoor 'machientje' interfereert met al het draaiende ijzer op de echte fiets. Van de andere kant: de fiets met al zijn verschillende overbreng-, tandwiel- en wielverhoudingen biedt ruim gelegenheid voor dit soort reken-algebra.

In dit pakket wordt ook naar een hoger niveau gestapt, waarop je twee of meer machientjes met elkaar vergelijkt.
Er is één plaatje waarin de grafieken van verschillende fietsen staan; dat wil zeggen fietsen met verschillende trap/afstand-verhoudingen. Die worden verbonden met de verschillende steiltes van de grafieken.

e. *Teken jouw grafiek in hetzelfde plaatje.*



Dat is al voorbereid met een andere context: de Supermarkt, met de weegschaal die zelf zijn bonnetjes afdrukt. Per groentesoort is er één 'machientje', je kunt ook zeggen 'vermenigvuldiger' of zó.



Op elke sticker staat: naam van het machientje (bijvoorbeeld TOMATEN), zijn factor (1,98), invoergetal (1.412) en resultaat (2,80).

Samenvatting, voorlopig

We hebben gekeken naar voorbeelden in mavo 3 en 1. We merkten bepaalde zaken op die we als essentieel voor de algebra-leerlijn zien.
In het kort:
- meer aandacht voor een gevarieerd aanbod van verbanden en functies;
- aandacht voor 'globale' kanten van zulke functies: groei, grootte-orde;
- context gebruik als steun voor natuurlijke formalisatie in formules;
- het gebruik van actietaal en machientjes;
- het dynamische aspect van variabelen en het kwalitatief redeneren dat er mee samenhangt.

Al die elementen zijn geen doel op zichzelf, ze horen tot het samenhangend geheel, dat algebra zou moeten zijn. Vooral in het voorbeeld over *Winnende formules* komt de integratie van formeel, dus precies, en globaal kijken mooi naar voren.

Er is echter nog veel niet aan de orde geweest; onder andere:

a. De samenhang met niet-formeel, maar experimenteel vastgelegde grafieken. Bijvoorbeeld de temperatuur op één dag, uitgezet tegen de tijd. Zelfs De Bilt doet dat zonder formule. We gaan er nog op in.

b. De voor de algebra zo typische voortdurende uitbreiding van je getallensysteem:
   - van natuurlijk naar geheel (kun je ook $4 = 7 + x$ oplossen!)
   - van geheel naar rationaal (kun je ook $4 = 7 * x$ oplossen!)
   - van rationaal naar irrationaal (kun je ook $x^2 = 7$ oplossen!)
   - van reëel naar complex (kun je ook $x^4 = -1$ oplossen!).

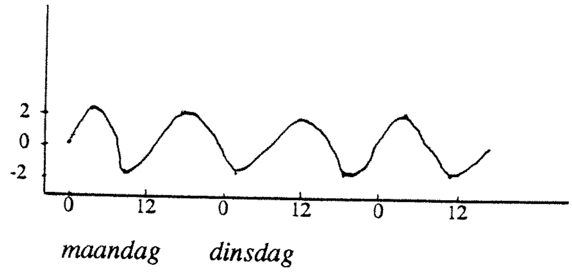
c. Het eigenlijke werken met omvormen en manipuleren met formules en letters.

Op het eerste punt gaan we nu in.

Werken met Grafieken

Grafieken zijn niet om punt-voor-punt y bij x te vinden. Ze zijn juist ijzersterk om tussen de oogharen door het geheel te overzien. Op dit globale aspect van grafieken is in het pakket *Grafiekentaal* uitvoerig ingegaan. We willen vanuit de idee 'globale grafiek' ook een brug slaan naar meer algebraïsch werken. Daarbij kan gedacht worden aan het in een formule pakken van een gegeven grafiek, maar dat is in veel gevallen niet zinvol. Er zijn andere zaken die geschikter zijn. Neem bijvoorbeeld dit:

Deze grafiek geeft de waterstand in Vlissingen aan, zoals die verwacht wordt.



>>*In Den Helder is het ongeveer vier uur later hoog water. Schets de grafiek voor Den Helder in hetzelfde figuurtje.*

>>*Waarschuwing: één meter verhoging bij harde NW-wind in Vlissingen. Schets de bijbehorende grafiek.*

>>*In Harlingen loopt het tij zes uur achter bij Vlissingen; ook is de schommeling slechts de helft. Teken nog een grafiek.*

De grafiek is weliswaar grof geschetst, maar er wordt toch rekenend mee omgegaan. Andere mogelijke transformaties zijn: het opzwellen (de eb en vloedgolf wordt niet in zijn geheel verschoven, maar wordt hoger én lager), het vertragen (gesteld dat je de aarde en maan kon tegenwerken).

Vooral grafieken zoals deze, met een golvend karakter, lenen zich hiervoor. Er is een samenhang met rekenen met periodes, resten en ... uiteindelijk de sinus. We zijn er voor een dergelijke ondersteuning te geven voor de sinus als functie. [2]

Er zijn soms negatieve getallen die veel geniepiger binnensluipen dan de -2 op de as bij eb en vloed.
Neem $x^2 - 4x + 8$. Gewoon met x groter dan 0. Dat is altijd groter dan 3, dan 3.9 zelfs. Hoe komt dat?
Je kunt urenlang invullen, maar zeker weet je het pas, als je kunt nagaan dat:

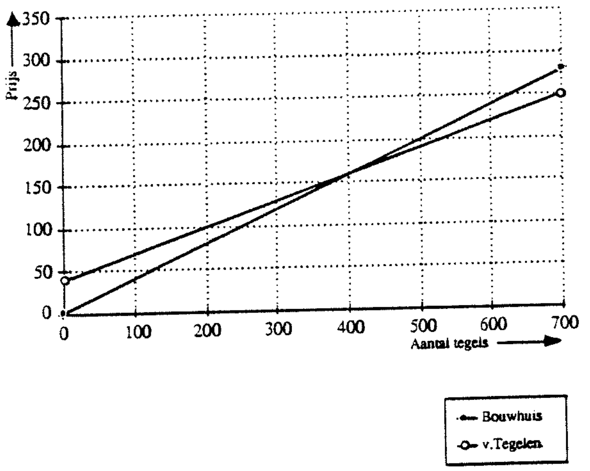
$$(x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

en dat, wat x ook is, dit zo is. Met het feit dat kwadraten nooit onder nul zitten, ben je er nu uit. Twee donkere bossen hier:
- het omwerken (gaan we elders op in);
- het min-keer-min gebeuren.

De negatieve getallen en hun zonderlinge vermenigvuldig-eigenschap zijn hier gebruikt om iets puur positiefs over getallen te begrijpen.
Je kunt zoeken naar situaties waarin negatieve getallen in de werkelijkheid opduiken. Nu duiken 'getallen' al nooit zomaar op, ze worden pas geboren als wij mensen over de dingen in de wereld gaan praten en denken. Met negatieve getallen is het nog een stapje verder. Je denkt wel aan 12 graden vorst, aan 6 meter onder N.A.P., aan 300 gulden schuld, 100 km westelijk. Het zijn allemaal

gewone getallen met een richting erbij. Pas als we ze samen met 5 graden dooi, of met 3 meter boven N.A.P., 50 meter oostelijk op één getallenlijn zetten, ontstaat er een doorloop van de ene richting in de andere.
Daarop, op die naar links en rechts lopende getallenlijn, kun je met winst en verlies, stijgen en dalen van het water en temperatuurschommelingen rekenen. Je kunt dan nog niet zomaar met gerichte getallen vermenigvuldigen. De vermenigvuldiging van zulke getallen onderling (met onder andere de min-maal-min-regel) is zodanig geconstrueerd dat allerlei regelmaten in het gewone vermenigvuldigen dóór blijven gaan. Dat is een niet op contexten, maar op zuiver wiskundige grondslag gemaakte constructie.

Pogingen de vermenigvuldigingen ook in een 'wereldje' op te bouwen doen geforceerd aan.
Als je – met een rekentuigje erbij – naar prijsverschillen tussen Bouwhuis en Van Tegelen kijkt:



kom je vanzelf negatieve (gerichte) getallen tegen.
Het prijsverschil heeft richting: voor of tegen Bouwhuis en Van Tegelen.

We willen in het programma 12-16 zeker werken met gerichte getallen van allerlei soort. We laten die optreden in groter verband, bijvoorbeeld bij het kijken naar temperatuurverloop op een dag waarop het dooit én vriest. We laten het rekenen met zulke getallen eerst impliciet, en komen pas later, op grond van grafieken mét formules, op grond van – ook meetkundige – voorbeelden tot een formalisatie.
Negatieve getallen is dan geen 'hoofdstuk' waarin alles bij elkaar staat. Het wordt een 'lijn' die met simpele stappen begint en later steeds opgepakt wordt. Dat brengt ons op ideeën die we nu hebben over de totaalorganisatie van het algebradeel in het project.

Een draai van 90 graden

Je kunt je de school-algebra grof voorstellen als een stapel 'hoofdstukken'. De hoofdstukken hebben wiskundige namen:

wortels
tweedegraads functies
vergelijkingen
eerstegraads functies
hele getallen

tijd

Het is een grof schetsje, maar de bedoeling is duidelijk: de hoofdstukken zijn in zekere mate afgeronde wiskundige delen, de tijdsvolgorde wordt door hun wiskundige inhoud bepaald. De 'graad' van een functie vertelt in welk hoofdstuk hij hoort. Wat we nu voorstaan is in eerste instantie de richting van de tijd draaien. Zo:

wortels
tweedegraads functies
vergelijkingen
eerstegraads functies
hele getallen

tijd

In het eerste plaatje kies je voor één functietype tegelijk en doe je er allerlei wiskundigs mee.
In het tweede plaatje kies je voor een breder kader functies tegelijk en doe je er eerst iets wiskundig eenvoudigs mee en pas later iets abstracters.

Het gaat er natuurlijk niet om dat we met álles tegelijk beginnen. De bedoeling is wel: begin met eenvoudige wiskundige technieken, pas die toe in een breed kader. In de loop van de tijd komen andere, soms abstractere, soms lastigere wiskundige technieken naar voren, die weer worden toegepast op hetzelfde brede kader. Bij het onderdeel 'Negatieve getallen' gaven we al een ruwe lijn voor een deelgebied aan, een lijn die lang is: van twaalf tot en met zestien.

Denk bij toenemende complexiteit van de technieken bijvoorbeeld ook aan vergelijkingen. Vanuit gemakvan-handelen is het zeker niet zo dat:

*Zoek een getal zó, dat getal * getal = 16*

veel lastiger is dan:

Wanneer ('voor welke x') is $2x - 7 > -x + 12$.

Als het gaat om vergelijkingen oplossen, is het omkeren van actie-ketens veruit het evidentst. Dan kan het wel eens zijn dat niet alle lineaire toestanden vóór de kwadratische komen!

Een volgende stap (fase, hoofdstuk, leerjaar) zou kunnen zijn: *problemen waar je twee processen moet vergelijken*. Methodes hier zijn dan:
- tabellen; met differenties, of met interpolatie, of met inzoomen;
- grafieken om overzicht te krijgen.

Als laatste fase (leerjaar, hoofdstuk) kunnen dan problemen komen die via 'manipulatie' in formules kunnen worden opgelost. Daar zou bijvoorbeeld naar-links-iksen of kwadraat afsplitsen bijhoren.
De fases zijn nu gekarakteriseerd door de wiskundige technieken, niet door het feit dat een vorm lineair of kwadratisch is. Zo zou in de tabel-techniek even goed met $n * n * n * n - n$ als met $3 * n + 1$ gewerkt kunnen worden, of ook zelfs met machten. Juist ook omdat het in toepassingen vaak zo essentiëel is verschillende typen functies te vergelijken. Zie *Winnende formules*!

Slot

Werk voor het algebra-team in W12-16: deze opzet tot in detail uit te werken, niet alleen voor 'vergelijkingen', maar voor allerlei onderwerpen.
Deze algemene opzet sluit aan bij de koers die in de meetkundelijn is uitgezet. Daar is ook een brede oriëntatiefase uitgezet voor de eerste twee leerjaren. Daarna wordt gestuurd in de richting van meer precisie en 'officiëlere' technieken. In de oriëntatiefase staat het uitgaan van zeer concrete situaties voorop, in de volgende fases treedt meer explicitering van het formulegebeuren op en kan ook meer op 'de wiskunde zelf' gereflecteerd worden.

De zojuist geschetste opzet heeft nog een voordeel, een voordeel vooral voor de leerlingen die al vroeg willen ophouden met hun wiskundeloopbaan. Die moeten in de twaalf tot veertien periode niet opgezadeld worden met onderwerpen die pas betekenis krijgen als je vérder gaat met wiskunde. In de schets past heel goed het op eenvoudig niveau werken aan zinvolle problemen. Je kunt de diagonaal van een tafel meten, zonder Pythagoras. Je kunt van twee grafieken het snijpunt aflezen, met simpele middelen berekenen of benaderen, zonder dat je iets letter-manipuleert. Gewoon met middelen en woorden die de context aanbiedt.
We kiezen er voor de algebralijn eerst in globale termen te schetsen en geleidelijk in details uit te werken. Maar kun je vérder met de bedoelde algebra? Verder kunnen hangt niet van de top van de parabool alleen af. Het hangt ervan af of de dingen die geleerd zijn een gezond functionerend geheel vormen. En daar zijn – ruw en onvolledig – de omtrekken van een poging voor geschetst.

Noten

[1] De Algebragroep bestaat uit: A.J. Goddijn; K. Gravemeijer; J. ten Hove en P. van der Zwaart.
[2] In de Nieuwe Wiskrant van december 1989 wijdden H. Freudenthal en S. Kemme er een artikel aan.