

Meetkunde: Ervaringen van leerlingen centraal

Meetkundegroep W12-16 [1]

OW & OC, RU Utrecht/SLO, Enschede

Uitgangspunt

Wij proberen meetkunde op een praktische manier aan de orde te stellen. Als belangrijk startpunt voor het meetkundeonderwijs gelden steeds de ervaringen die leerlingen al hebben. Die ervaringen willen we serieus nemen en benutten bij het leren van meetkunde.

Wij menen dat leerlingen de kans moeten krijgen om hun eigen ideeën, fantasieën en voorstellingen te gebruiken in de meetkundeles. Daarvan uitgaande kunnen leerlingen komen tot een meestal noodzakelijke bijstelling van hun voorstellingen. In de klas zullen ze ontdekken dat het nodig is afspraken te maken over sommige begrippen of kunnen ze in gesprekken met elkaar er achter komen waar verschillen bestaan in de voorstellingen waar ze van uit gaan, maar ook tot nieuwe inzichten en tot de beheersing van nieuwe technieken komen.

Vergelijking met vroeger

Het vak meetkunde is op school nogal eens van gedaante veranderd. Nog niet zo lang geleden hadden we Euclides bijna in eigen persoon op school. De leerboeken volgden precies de koers die de grote meester meer dan 2000 jaar geleden had aangegeven. Meetkunde was vooral veel bewijzen en redeneren vanuit heel nauwkeurig beschreven beginselen, zoals: 'door twee punten gaat precies één lijn'. Er werd wel met tekeningen gewerkt, maar dat was slechts toegeven aan menselijke zwakte. De eigenlijke waarheid kon je nooit zien, alleen via juist redeneren bereiken. De zaken waar deze meetkunde zich over uitsprak kwamen in de werkelijkheid niet voor: oneindig kleine punten, zuiver rechte lijnen, rimpelloze vlakken. De meetkunde die wij in het nieuwe programma willen, erkent het zelf kijken naar de materiële dingen, ziet dat als dé bron. Door deze keuze hebben we de deductieve opbouw van de meetkunde, vanuit eenvoudige beginnellen toewerken naar complexiteit, verlaten.

Na de meetkunde van Euclides vormde de transformatiemeetkunde de basis voor de schoolmeetkunde. Hier stonden bewegingen als spiegelen, draaien, vergroten en verschuiven centraal. Die transformaties werden geïllustreerd met voorwerpen die spiegel- of draaisymmetrisch waren, maar die dienden daarbij vooral om de wiskunde

van de transformatiemeetkunde te verduidelijken. Transformatiemeetkunde was ook nauw verbonden met werken in coördinaten en vectoren.

Wij vinden dat de meetkunde de 'dienaar' is en dat de objecten uit de realiteit, waarop deze meetkunde toepasbaar is, 'de baas' zijn. Bij meetkunde wordt het accent dus verlegd van wiskunde als doel op zich naar wiskunde als bruikbaar vak in diverse situaties. Coördinaten en vectoren komen zeker nog voor in het nieuwe programma, zij het minder formeel, maar daarom niet minder duidelijk, bruikbaar en leerzaam.

De meetkunde zoals we die nu in wiskundemethodes aantreffen is een mengsel van allerlei uit de opzet van Euclides en uit de transformatiemeetkunde stammende elementen. Er wordt ook regelmatig van contexten gebruik gemaakt, maar de indruk blijft dat het daarbij om de meetkunde zelf gaat, niet om het gebruik ervan in toepassingsituaties. De huidige mavo/lbo-examens weerspiegelen ook dat beeld.

Ons standpunt is dat het voor leerlingen van twaalf tot zestien gaat om het gebruik van meetkunde. Zuivere wiskunde is mooi, maar ook vervolgopleidingen vragen meer om bruikbaarheid dan om abstractie.

Consequenties van onze keuze

De keuze om de ervaringen van leerlingen als startpunt te nemen van het meetkundeonderwijs voor twaalf- tot zestienjarige heeft consequenties voor de inhoud van het programma.

Verschillen in ervaring

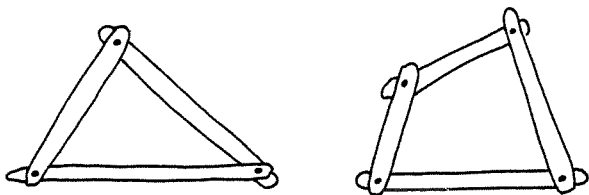
Alle leerlingen komen op twaalfjarige leeftijd met een schat aan ervaringen het voortgezet onderwijs binnen. Maar er bestaan grote verschillen in die ervaringen.

Eenzijds gaat het om verschillen die ontstaan zijn doordat in sommige basisschoolmethoden al heel wat aandacht aan meetkunde wordt besteed. Maar belangrijker zijn de verschillen die samenhangen met buitenschoolse ervaringen. Dingen die leerlingen meemaken en activiteiten die leerlingen binnenshuis en buitenshuis verrichten, kunnen een niet te onderschatten bijdrage leveren aan voor de meetkunde essentiële ervaringen. Het gaat ook niet alleen om de ervaringen zelf, maar vooral ook

om de manier waarop deze ervaringen verwerkt zijn. De achtergrond van leerlingen, het milieu waaruit ze afkomstig zijn, speelt door de keuze die wij maken een grotere rol. Het zal dan ook nodig zijn sommige leerlingen de mogelijkheid te bieden belangrijke ervaringen als nog op te doen. Er zijn er, waarvan we vinden dat iedere leerling ze een keer moet hebben meegemaakt. Een voorbeeld:

Star of bewegend?

Als je een constructie maakt van drie latten krijg je een starre figuur, maar een constructie van vier latten kan nog bewegen.



Zo'n ervaring is essentieel om bijvoorbeeld de volgende opgaven te kunnen maken uit het experimentele examen mavo/lbo 1990.

>> *Stel je voor: je hebt twee stokjes van 10 cm en twee van 7 cm. Je moet ze alle vier gebruiken om er vierkanten mee te leggen. Een vierkant kun je er níet mee leggen.*

Wat voor soorten vierhoeken kunnen er wél mee gelegd worden?

>> *In een klas zitten achtentwintig leerlingen. Ze hebben allemaal een vierhoek gelegd zoals in de vorige opgave was gevraagd. Nu moeten ze van hun figuur de oppervlakte berekenen.*

Zijn er achtentwintig verschillende antwoorden mogelijk?

Ja, want, of nee, want

Leerlingen die geknutseld hebben met één of andere vorm van constructie-speelgoed (Fischer, Lego, Meccano), kennen de niet-starre vierhoek allang. Er is natuurlijk veel meer dat zulke leerlingen in het voordeel brengt. Vaak zullen dat jongens zijn. Een reden te meer zulke ervaringen opnieuw aan de orde te laten komen voor alle leerlingen.

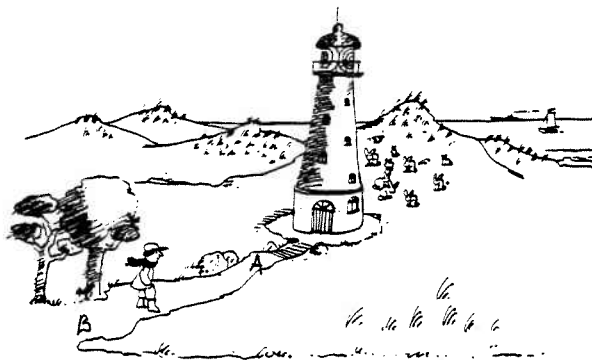
Beginnen met ruimtemeetkunde

Zowel de Euclidische meetkunde als de transformatie-meetkunde zijn vanuit de logica opgebouwd. En dan is het beter met het vlak te beginnen en daarna naar de ruimte te gaan. Dat ligt voor het nieuwe programma niet meer voor de hand. Ervaringen van leerlingen komen uit een 'complexe werkelijkheid'. De wereld waarin we leven is niet het platte vlak, maar de ruimte. Vandaar dat ruimtemeetkunde al vroeg in het nieuwe programma aan bod zal komen. Echter niet op een traditionele manier, maar gekoppeld aan kijken in de ruimte.

Denken over kijken

Het kijken zelf kan nader onderzocht worden. Bestaande misvattingen zullen vervangen moeten worden door betere voorstellingen. Een belangrijke vaardigheid waaraan in de meetkundelessen nieuwe stijl aandacht moet worden besteed, is het verwoorden van wat je ziet en hoe het komt dat je iets op een bepaalde manier ziet. Leerlingen zullen nieuwe meetkundige middelen moeten leren gebruiken om verklaringen te kunnen geven voor wat ze zien. Een voorbeeld:

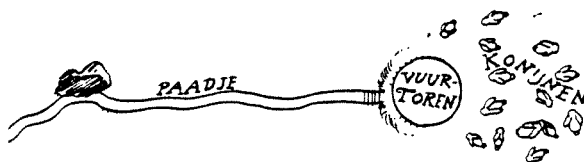
Vuurtoren



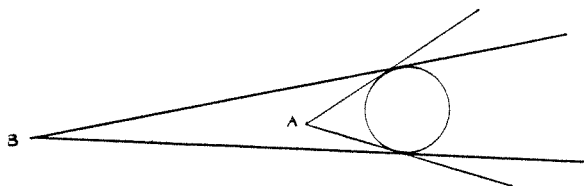
De vuurtorenwachter loopt naar de vuurtoren. Achter de toren spelen konijnen in het gras. Ze lopen niet meer weg voor de vuurtorenwachter. Thuis vertelt de vuurtorenwachter aan zijn kinderen: 'Als ik naar de toren loop, kom ik steeds dichterbij de konijnen. Ze lopen niet weg en toch zie ik er steeds minder. Hoe kan dat?'

Iedereen weet dat je vanaf B meer konijnen ziet dan vanaf A. We verscherpen die kennis met meetkundige middelen.

a. een bovenaanzicht:



b. gebruik van raaklijnen:



Zodra leerlingen de raaklijnen 'bedacht' hebben, kennen ze de verklaring.

Hiervoor is het niet nodig dat het bovenaanzicht als or-

thogonale projectie is gedefinieerd of dat de raaklijnen aan de cirkel met exacte middelen (discriminant, passer) geconstrueerd worden. De schetsjes waren nodig om bestaande ervaringen bij leerlingen op te roepen. Het komen tot de tekening met de raaklijnen was de uitbreiding van bestaande kennis naar een verdere abstractie.

In zo'n proces komen vaak twee belangrijke meetkundige activiteiten aan bod: je iets in gedachten kunnen voorstellen en dan het kunnen verschralen van de werkelijkheid. De meetkunde biedt de instrumenten voor een verklaring; met behulp van 'gewone' taal kunnen leerlingen nu in eigen woorden een antwoord geven op de vraag van de vuurtorenwachter 'Hoe kan dat?'.

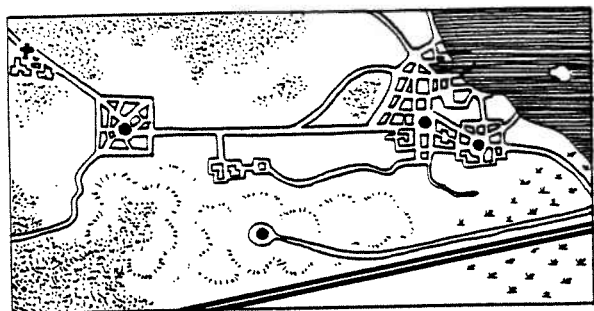
Het verhaal over de vuurtoren lijkt zo simpel. Dat is bedriegelijk. Vragen we leerlingen een verklaring zonder het bovenaanzicht aan te bieden, dan komt er in het algemeen niet veel meer dan de herhaling van tekening of tekst. Zelden komen leerlingen zelf met zo'n verklarend-tekening vanuit een ander standpunt.

Ook het gebruik van de raaklijnen is niet zo voor de hand liggend. In vergelijkbare opdrachten gaan de kijklijnen die getekend worden soms ruim naast het object. Dat de raaklijn precies de grens is tussen wel en niet kunnen zien, moet echt ondervonden worden.

Het werken met lijnen voor het kijken komt regelmatig terug. Om dit toe te lichten nemen we een volle bladzijde op uit het pakket *de Watertoren*.

De Watertoren

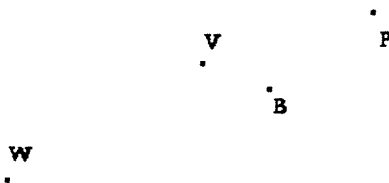
Als je op de watertoren van Hoogheide staat, kun je de Vitus-toren en de Dom-toren in één lijn zien. De toren van Bunt zie je een klein stukje rechts van de toren van Vestingstad. Precies midden tussen de torens van Vestingstad en Bunt zie je het eilandje Pol.



1. Zet op het kaartje van je losse werkblad de namen Vitus, Dom, Vestingstad, Bunt en Pol. Teken de lijn van de watertoren naar Vestingstad, de lijn van de watertoren naar Bunt en de lijn van de watertoren naar Pol.
2. Er staat dat je vanaf de watertoren het eilandje Pol precies tussen de beide torens ziet. Betekent dat dat Pol even ver van de beide torens aflight?

We gaan dat nog wat verder onderzoeken.

We bekijken dit soort tekeningen, bestaande uit vier punten:



W en P houden we hetzelfde.

B en V mag je op een andere plek zetten.

Je moet ervoor zorgen dat je vanuit W gezien het punt P precies midden tussen V en B ziet.

3. Teken een voorbeeld met vier punten waarin WP het lijnstuk VB halveert. Zorg dat je in jouw voorbeeld vanuit W het punt P precies midden tussen V en B ziet.
4. Teken een voorbeeld met vier punten waarmee je duidelijk kunt maken dat het lijnstuk WP het lijnstuk VB niet hoeft te halveren. Zorg dat je in jouw voorbeeld vanuit W het punt P precies midden tussen V en B ziet.
5. In al deze voorbeelden zie je vanaf W het punt P precies midden tussen V en B liggen. Als je nu vanaf P naar W kijkt, zie je dan W precies midden tussen V en B? Leg dat uit met een duidelijke tekening.

Het werken op de landkaart is nu veel preciezer dan bij de *Vuurtoren*. In deze vragen komt een lastig meetkundig probleem als vanzelf naar voren: de vraag of de deel-lijn van een hoek ook de overstaande zijde middendoor deelt. Omdat Vestingstad en Bunt niet zo ver uit elkaar liggen is het hier niet zó gek te denken dat de lijn Watertoren-Pol midden tussen Bunt en Vestingstad door gaat. De kijklijnen-meetkunde roept hier de vraag op, die in een meer traditionele opzet voorkomen wordt door naast deellijnen ook zwaartelijnen in de leerstof te introduceren. Wij kiezen liever voor het uitlokken van dit conflict dan voor het van te voren geven van de oplossing.

Niet alleen kubussen

De logische opbouw van de traditionele meetkunde leidde ook tot veel bezig zijn met betrekkelijk weinig objecten. In het onderbouwprogramma leek 'de ruimte' vooral te bestaan uit kubussen, balken en piramides. En dat is toch wel erg mager als je even om je heen kijkt! Heel andere objecten zullen in het nieuwe programma het bekijken waard blijken te zijn.

Iedereen kijkt, maar het gaat ons er om dat leerlingen bewust leren kijken. Zo leren kijken dat ze zien hoe iets in elkaar zit. Op een intuïtieve wijze ontdekken leerlingen in het volgende voorbeeld dat kruisende lijnen geen snijpunt kunnen hebben.

Koffiepot

Als je kinderen vraagt in een pot de hoeveelheid koffie te tekenen voor zes kopjes, dan tekenen velen een ellips met zes kopjes als de hoogste stand, alsof de 6 op de achterkant staat.



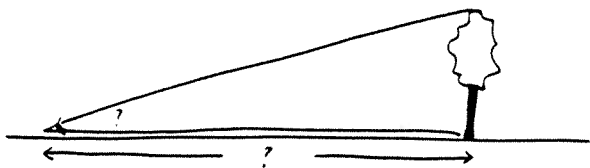
We gebruiken deze vergissing tussen snijpunten en nep-snijpunten in het volgende probleem:

Hoeveel kopjes koffie zitten er in de pot?



Zelf dingen maken en doen

Onze keuze om bij de meetkunde uit te gaan van de ervaringen van leerlingen, betekent ook dat aan leerlingen een ruime gelegenheid geboden moet worden om zelf dingen te maken. Voor sommigen zal dat betekenen het inhalen van ervaringen die medeleerlingen al hebben opgedaan; voor velen zal het nuttig en nodig zijn om hun voorstellingsvermogen te ondersteunen. Meetkundig inzicht kan ontwikkeld worden door concreet en actief bezig zijn. Het moet niet gek gevonden worden als leerlingen nog lange tijd willen blijven steunen op concrete materialen. Een belangrijk voorbeeld is het hele gebied van het meten. Neem bijvoorbeeld het meten van de hoogte van een boom. Dat kan gedaan worden door op een afstand een hoek te meten:



In het algemeen laten wiskundemethodes de leerlingen wél de daarna nodige schaaltekening maken, maar vullen de vraagtekens, de eigenlijke metingen, zelf in. In plaats van een oogje wordt er een leerling getekend in de illustratie, maar hoe de hoogtehoek gemeten moet worden komt niet ter sprake. Wij kiezen ervoor ook de meetervaring zelf in de les op te nemen.

Een paar voorbeelden: plaatsbepalen en doorsneden

De hiervoor genoemde uitgangspunten lichten we toe met twee series voorbeelden, één rond het thema plaatsbepalen, een andere rond het thema doorsneden. We beginnen in beide gevallen met voorbeelden die bij tamelijk elementaire ervaringen aansluiten. Daarvan uitgaande kan je komen tot verdergaande meetkundige inzichten. Ook die inzichten dienen ondersteund te zijn met ervaringen.

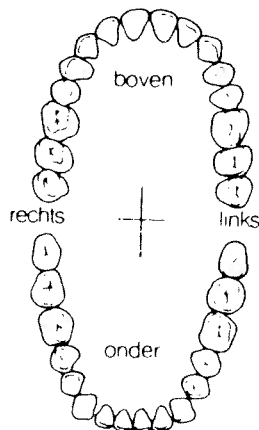
Om te beginnen één van de eerste werkbladen uit het pakket *Plaatsbepalen*.

Bij de tandarts

Pieter zit in de stoel bij de tandarts. Hij hoort de tandarts tegen haar assistente zeggen: 'Anja, schrijf even op de kaart van Pieter: twee-zes een m.o.d. en de vier zeven is gewisseld.'

'Nou, daar snap ik dus niets van', denkt Pieter.

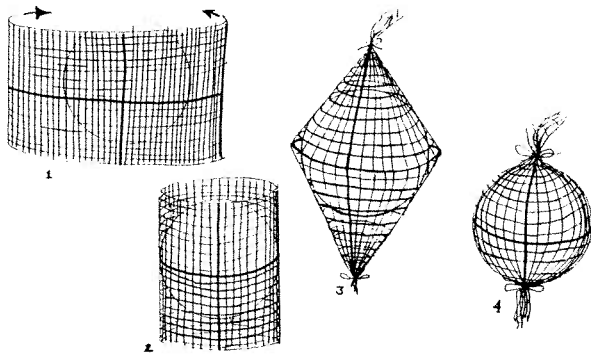
Hieronder zie je een tekening van alle tanden en kiezen. De tekening is gemaakt zoals de tandarts er ongeveer tegenaan kijkt.



- Waarom kun je dat zien?*
- Hoe kun jij je tanden en kiezen zo zien?*
- Welke tanden en kiezen heb jij nu? Geef dit in de tekening aan.*

De tandarts geeft elke tand en kies een cijfercombinatie als naam. Je ziet er vier in de tekening op de volgende pagina.

- Als je telt één-twee, één-drie, ..., waar begin je dan te tellen in de tekening? Welke kant ga je dan op?*



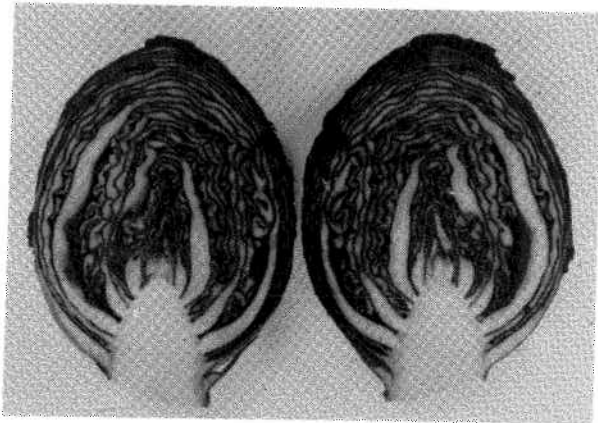
>> Schrijf bij de plaatjes een kort verhaaltje over wat je ziet.

Het transformeren van het ene netwerk in het andere is visueel gemaakt. Dat er daarna nog met hoeken gewerkt kan worden zal duidelijk zijn. Die hoeken, oosterlengte en noorderbreedte, zitten eigenlijk in het binnenste van de aarde. Het is lastig voor leerlingen om zich dat voor te stellen!

Plaatsbepalen via twee hoeken komt ook nog op een andere manier voor. Uit de richtingen waarin je de vuurtorens van IJmuiden en Katwijk ziet, kun je heel precies je plaats in de Noordzee bepalen. Richtingen horen met draaiingen bij het onderwerp 'hoeken'. Daarop willen we in een volgende Wiskrant uitvoeriger terugkomen.

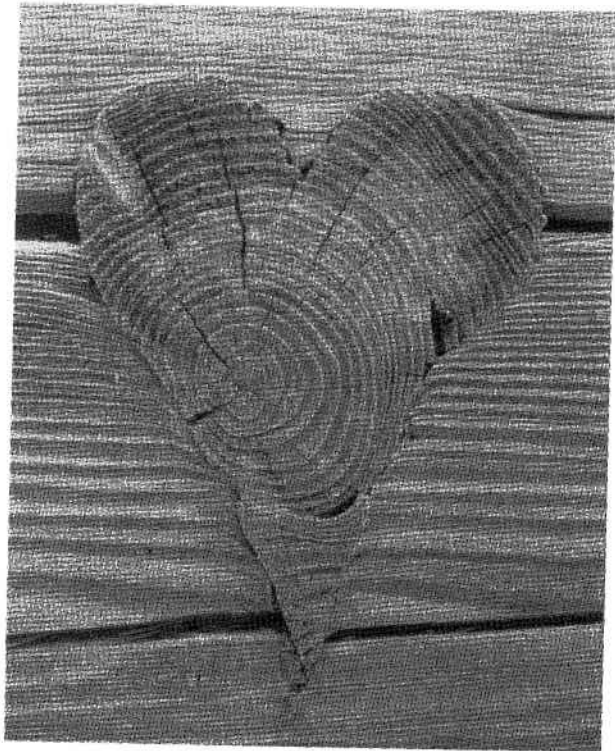
Doorsneden

We keken zojuist al even in het binnenste der aarde. Met 'doorsneden' beginnen we echter veel dichterbij huis. Als je een rode kool doorsnijdt zie je dit:



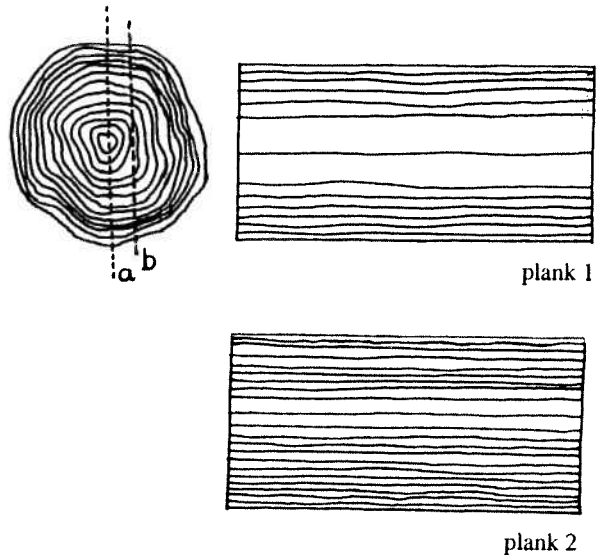
Beginnen met eenvoudige ervaringen, dan iets verder gaan met wat door het veelvuldig voor komen al nauwelijks meer als doorsnede herkend wordt.

In het volgende werkblad komt een gedeeltelijke verklaring van houtvlam aan de orde. Het gaat erom dat de jaarringen in de stam eigenlijk laagjes zijn om de boom, en dus om elkaar. Als de boom onregelmatig is gegroeid en je snijdt hem door, kan er een knap ingewikkeld patroon ontstaan.



Bomen

Het omzagen van een boom laat je een dwarsdoorsnede door de boom, of beter gezegd door de boomstam zien. Bomen worden meestal ook in de lengte doorgezaagd. Je krijgt dan planken. Hier worden vooral dikke bomen voor gebruikt. Je kent vast wel de uitdrukking: 'Van dik hout zaagt men planken.' Hieronder zie je twee planken en een tekening van de boom met twee lijnen.



>> Welke plank is op de plaats van lijn a gezaagd, welke bij b? Waarom?

Aan bomen zitten vaak allerlei knobbels. We gaan bekijken hoe een plank, die gezaagd is door zo'n knobbel, eruit komt te zien. We zagen zó:

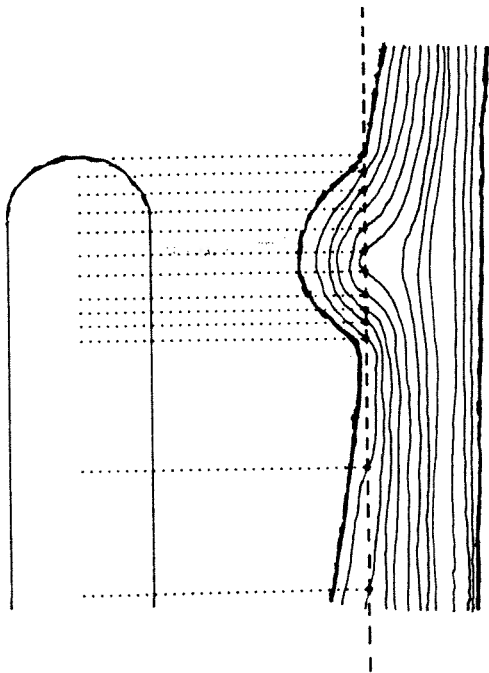


Als we de boom eerst doormidden zagen, zodat we de binnenkant met groeilaagjes kunnen zien, krijg je het volgende plaatje:



Deze tekening staat ook op je werkblad. Daarnaast staat de voorkant van de plank die je zaagt volgens de stippelijjn.

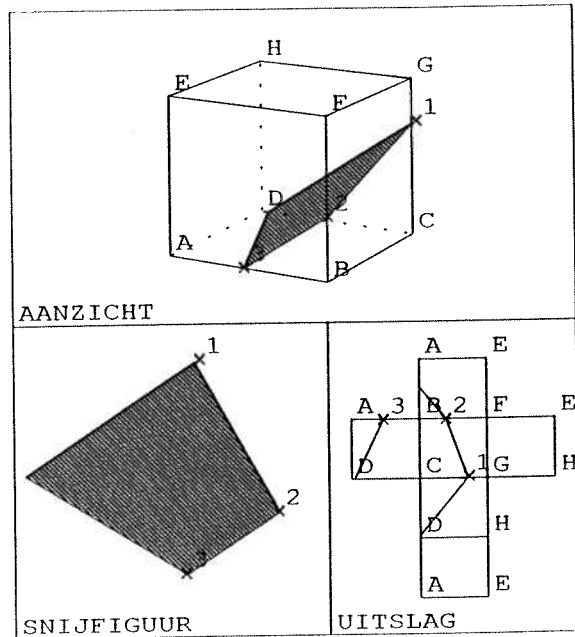
>>Teken op die plank het patroon.



Behalve dat het een nieuwe kijk op hout geeft, geeft het werkblad nog iets. Het is een oefening voor het voorstellingsvermogen; het je voorstellen van een vlak ergens

in, met een patroon erop dat samenhangt met de ruimte erom heen. We denken dat zulke oefeningen op zich waardevol zijn, maar ook hun vruchten afwerpen als we een diagonaalvlak in een kubus nodig hebben, of noorderbreedte als hoek willen beschouwen.

Rond het thema 'doorsnijding' is méér in ontwikkeling: leerlingmateriaal waarin hoogtelijnen op een kaart als horizontale doorsnijdingen voorkomen en een computerprogramma dat bij allerlei voorwerpen doorsnijdingsvlakken aan kan geven: op het getekende voorwerp zelf, maar ook op ware grootte en in de juiste vorm.



Tot slot

Hierboven hebben we een indruk willen geven van de richting waarin de verandering van het meetkundeonderwijs zal gaan. Het is goed hier te zeggen dat er ook veel hetzelfde zal blijven. Veel onderwerpen die nu behandeld worden, zullen zeker ook in het nieuwe programma nog aan bod komen, alleen niet altijd op dezelfde manier. In het meetkundeprogramma dat wij ontwikkelen zullen onderwerpen als hoeken, oppervlakte, inhoud, de stelling van Pythagoras zeker gehandhaafd blijven. In de voorbeelden hierboven heeft u wellicht al een aantal vertrouwde onderwerpen herkend: hoeken, coördinaten, deellijn. Ook de tangens en de sinus zullen een onderdeel blijven vormen van het mavo/lbo-D-programma.

Het zwaartepunt van de meetkunde zal naar ons idee in klas 1 en 2 moeten liggen. Er zijn aanwijzingen dat leerlingen op die leeftijd nog gevoelig zijn voor het inzicht dat je bij meetkunde wilt ontwikkelen. Bovendien kan meetkunde vaak ondersteunend werken bij andere leerstofonderdelen in de wiskunde. In de meetkunde komen veel zaken aan de orde die voor iedereen nuttig zijn om

te leren en in de eerste twee klassen is wiskunde immers nog een verplicht vak voor alle leerlingen.

In klas 3 en 4 komt meetkunde ook voor vervlochten met algebra, rekenen of combinatoriek. De ene bladzijde uit het pakket *de Watertoren* liet dat niet zien, maar in dat pakket worden naast de kijklijnen ook heel andere zaken behandeld, zoals de inhoud van de toren en gebruik van

water in de loop van een dag, waardoor ook andere wiskundige middelen aan de orde komen.

Noot

- [1] De meetkundegroep W12-16 bestaat uit:
M. Abels; J. van den Brink; A.J. Goddijn; M. Meeder en G. Schoemaker.
-