De reis van de Yatzy

D. de Bock/M. Roelens
Vliebergh-Sencie Wiskunde, KU Leuven

Inleiding

Dit artikel is het verslag van één van de werksessies uit een navormingcursus voor Vlaamse wiskundeleraren, georganiseerd door het Centrum voor Beroepsvervolmaking Vliebergh-Sencie (KU Leuven) in november 1989. De cursus had als thema: *Wiskunde vanuit toepassingen – functies als modellen.*
Het doel was deelnemers in een groepswerk modellen te laten opstellen en evalueren binnen een echte en (dus) vrij complexe context.
Een context waarin we dit konden realiseren was de reis van 'Yatzy' op de Schelde. Yatzy is een boorplatvorm, door z'n ontwerpers genoemd naar een Oosters kansspel. Vooral de doorvaart van Yatzy onder een hoogspanningskabel zorgde voor de nodige spanning aan boord en onder de deelnemende leraren.

Introductie in de context

Het exploratie-boorplatvorm Yatzy werd gebouwd door de Boelwerf in Temse en is speciaal ontworpen om onderzeese aardolielagen te verkennen. Op 11 januari 1989 maakte dit honderd meter hoge gevaarte een eerste tocht op een mistige Schelde, met bestemming Rotterdam. Rond 13.30 uur ontmoette Yatzy z'n eerste hindernis: een hoogspanningskabel dwars over de Schelde. De Boelwerf-ingenieurs hadden aan de voorbereiding van deze doorvaart een stevige kluif; het wiskundige deel van hun analyse wordt hieronder nog eens overgedaan, weliswaar in een didactisch aangepaste vorm.

In een eerste fase wordt de doorvaart onder de hoogspanningskabel globaal ontleed aan de hand van de volgende vragen:

- Zit het 'probleem' bij de doorvaart bovenaan (de kabel) of onderaan (de diepte van de Schelde)?
- Als Yatzy kan passeren, waar (linkeroever, midden, rechteroever) is dat dan, en wanneer (in termen van getijden)?

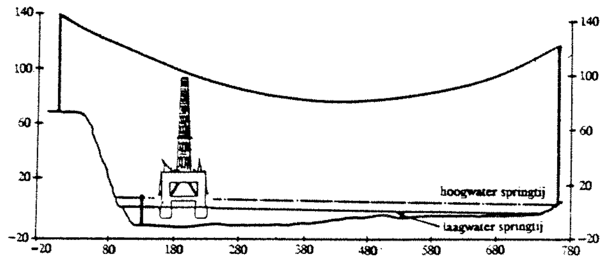
Om deze vragen te beantwoorden, beschikken we over de nodige informatie: afmetingen en diepgangen van Yatzy (fig. 1), afmetingen van de (doorhangende!) kabel (fig. 2), een dieptekaart van de Schelde in de omgeving van de kabel (fig. 3), en getijgegevens (tabel 1). De figuren vindt u op de pagina hiernaast.

	laagwater	hoogwater	periode
gemiddeld springtij	0,25m	6,00m	12.10u
gemiddeld tij	0,46m	5,60m	12.15u
gemiddeld doodtij	0,74m	5,09m	12.40u

Tabel 1: Getijden te Antwerpen t.o.v. GLLWS

Eerst worden de relevante gegevens in één figuur samengebracht: een dwarsdoorsnede van de Schelde onder de kabel. Enkele elementen zijn hier vooraf al op aangebracht: de elektriciteitspalen op linker- en rechteroever, een aanlegsteiger langs de linkeroever en een horizontale lijn corresponderend met nul meter GLLWS, een horizontaal vlak vanaf waar alle hoogten en dieptenzijn gemeten.
GLLWS is het plaatselijke *gemiddeld laaglaagwaterspring* en wordt berekend als het meerjarig gemiddelde van de laagste laagwaterstand bij springtij van elke maansmaand. Dit horizontaal referentievlak is vergelijkbaar met het in Nederland gebruikelijke NAP (Normaal Amsterdams Peil). Het profiel van de Schelde onder de kabel kan worden getekend door een aantal snijpunten van de dieptelijnen en de kabel in figuur 3 uit te zetten en te verbinden.
De verschillende schalen zorgen voor wat extra reken- en meetwerk. Ook het laagste punt van de kabel (fig. 2) kun je op de dwarsdoorsnede aanduiden.
Tenslotte worden horizontale lijnen aangebracht voor de (maximale en minimale) waterhoogte (tabel 1). Om het geheel overzichtelijk te houden, beperken we ons hierbij tot de uitersten: hoogwater en laagwater bij springtij. Het resultaat wordt een dwarsdoorsnede waarop je een schaalmodel van de Yatzy, afgedrukt op doorschijnend plastic, kunt laten dobberen (fig. 4).
Dit levert dan 'experimenteel' de volgende bevindingen op:

- Het probleem zit bovenaan (bij de kabel).
- Als Yatzy kan passeren dan is het langs de linkeroe-



Dwarsdoorsnede van de Schelde onder de kabel

fig. 4

ver (bijvoorbeeld bij x = 180). De Schelde is daar voldoende diep en de elektriciteitsdraden bieden er de grootste doorvaarthoogte.
- Omdat het probleem bovenaan zit, kiezen we het best voor laagwater bij springtij.

Tot daar de eerste analyse van het probleem en de keuze van een oplossingsstrategie. De ingenieurs van de Boelwerf hebben er precies zo over beslist: op 11 januari 1989 was het inderdaad springtij en laagwater was voorspeld rond 13.30 uur.

Op zich heeft deze introductie weinig te maken met het thema 'functies als modellen', maar ze is wel noodzakelijk voor de inleving in de context. De beschikbare informatie wordt op een actieve manier verwerkt en je hebt je het probleem voldoende eigen gemaakt om verderop onmiddellijk na te gaan of de rekenresultaten plausibel zijn. Op de navormingscursus werd de inleving nog visueel ondersteund door een video-opname van een spectaculaire BRT-uitzending over Yatzy.

Kan hij er door? Met welke speling?

Eerste poging: het cosh-model

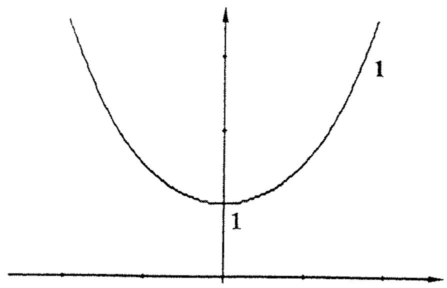
Het probleem zit bij de kabel. Om na te gaan of Yatzy er inderdaad onderdoor kan op een bepaalde plaats (bijvoorbeeld x = 180) en ogenblik (bijvoorbeeld laagwater springtij), moeten we de hoogte van de kabel op die plaats kennen. Daartoe stellen we een wiskundig model op voor de vorm van de kabel. Een vrij opgehangen, homogene kabel heeft, zo leert ons de fysica, de vorm van een kettinglijn. Een kettinglijn is de grafiek van een functie van de vorm:

$$x \longrightarrow a(\cosh \frac{x-c}{a} - 1) + d \qquad (a > 0)$$

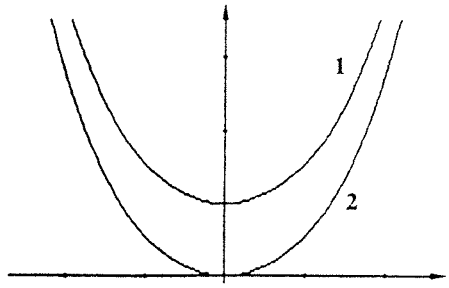
In figuur 5 is te zien hoe je in drie stappen de grafiek van:

$$x \longrightarrow \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

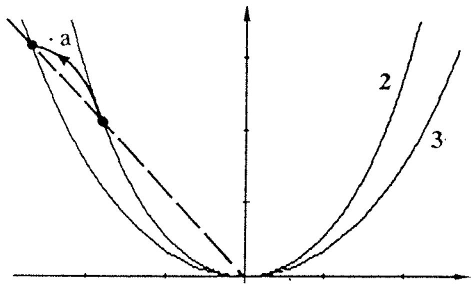
(een speciale kettinglijn) kunt transformeren in een 'algemene' kettinglijn: naar de oorsprong verschuiven, 'vergroten' met een factor a (a > 0) en tenslotte verschuiven over een vector (c, d). Bij elke grafiek wordt het passende voorschrift gezocht.



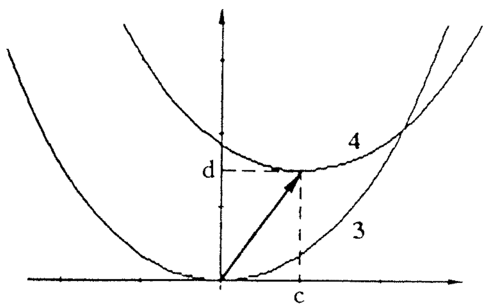
1 : $y = \cosh x$



2 : $y = \cosh x - 1$



3 : $y = a(\cosh \frac{x}{a} - 1)$



4 : $y = a(\cosh \frac{x-c}{a} - 1) + d$

Transformaties op de cosh-grafiek

fig. 5

In ons voorbeeld zijn de coördinaten van het laagste punt van de kabel (422,92; 79,80) (fig.2). De vergelijking wordt dan:

$$y = a\,(\cosh \frac{x - 422{,}92}{a} - 1) + 79{,}80$$

Blijft nog te bepalen: de 'openingsparameter' a. We beschikken daartoe nog over twee gegevens: de bevestigingspunten aan beide palen (fig. 2). Het ligt voor de hand om het punt (0; 140,18), de plaats waar de kabel is vastgehecht aan de linker paal, in te vullen. Dit geeft dan de vergelijking:

$$140{,}18 = a\,(\cosh \frac{-422{,}92}{a} - 1) + 79{,}80$$

waaruit we a moeten oplossen.

Na enig zoekwerk (onder meer met de inverse van cosh, namelijk $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ kom je tot de conclusie dat dit met algebraïsche middelen onmogelijk is. De vergelijking is 'transcendent' (a zit 'binnen' en 'buiten' de transcendente functie cosh) en bijgevolg alleen numeriek op te lossen. Tussen haakjes: de kennis van de *lengte* van de kabel zou ons wel de exacte a opleveren; het is een mooie oefening om dit te verifiëren. Numerieke methoden (iteratie, Newton-Raphson,..) geven voor a de waarde 1491,139617. De ingenieurs van de Boelwerf hebben in dit cosh-model verder gerekend. De transcendente vergelijking kan echter ook gemakkelijk omzeild worden...

Tweede poging: de paraboolbenadering

De kabel vormt een nogal plat stuk kettinglijn. Terug getransformeerd naar de 'gewone' cosh, komt hij overeen met een klein stukje grafiek rond de top (0, 1). Volgens de Mac Laurin-ontwikkeling is de functie cosh in een omgeving van de top te benaderen door een tweedegraadsfunctie:

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

Dit brengt ons op het idee om de kabel te benaderen door een *parabool*: de parabool met de gegeven top (het laagste punt van de kabel) en door een extra punt, bijvoorbeeld het punt aan de linker paal.

De vergelijking van een parabool met verticale symmetrie-as en top (c, d) is:

$$y = a(x - c)^2 + d \qquad (a \neq 0)$$

Deze vergelijking kan, net als bij de kettinglijn, worden verkregen uit $y = x^2$ door eerst te 'vergroten' met factor $\frac{1}{a}$ (!) en daarna te verschuiven over de vector (c, d). De kabel heeft als top (422,92; 79,80). Dit geeft de vergelijking:

$$y = a(x - 422{,}92)^2 + 79{,}80$$

waarin we a bepalen door het extra punt (0; 140,18) in te vullen. We vinden: $a = 0{,}00033758$.

Hierbij kan de vraag gesteld worden: *is dit de Taylor-benadering van de tweede graad in x = 422,92 van het cosh-model?* Het antwoord luidt: neen! Taylor-veeltermen van de tweede graad hebben in het beschouwde punt dezelfde functiewaarde, eerste èn tweede afgeleide als de functie die ze benaderen. 'Onze' tweedegraadsfunctie heeft in de x-coördinaat van de top enkel de functiewaarde en de eerste afgeleide gemeenschappelijk met het cosh-model; de tweede afgeleide werd 'vervangen' door een bijkomend punt.

Speling volgens de paraboolbenadering

Voor $x = 180$ geeft het paraboolmodel als hoogte van de kabel: $y = 99{,}72$. Om de *verticale speling* te bepalen, moeten we hier nog vanaf trekken: 92,97 m voor het stuk van Yatzy dat boven water zit (fig.1), 0,25 m voor de waterhoogte bij laagwater springtij (tabel 1) en nog 4,5 m veiligheidsmarge (fig.1). Dit geeft als verticale speling: 2 m. Als Yatzy bij $x = 180$ passeert, blijft er dus, bovenop de 4,5 m veiligheidsmarge, nog 2 m speling tussen het topje van de derrick (boortoren) en de kabel. Is de voorwaarde om Yatzy bij $x = 180$ onder de kabel te loodsen, wel realistisch? Enkele scheepvaartdeskundigen die de operaties vanaf de oever gadesloegen, beschreven het boorplatvorm als 'een grote onhandelbare wastobbe'. Een dergelijk gevaarte via sleepboten op een vooraf bepaalde plaats onder een kabel trekken, is allesbehalve eenvoudig. Daarom is het zeker zinvol om ook de *speling in de breedte* te berekenen. De vraag is dan: *hoever* mag Yatzy zich *horizontaal* van de steiger verwijderen? Als men de veiligheidsmarge respecteert, moet de hoogte van de kabel dan minstens 97,72 m bedragen. Dit leidt tot de volgende ongelijkheid van de tweede graad:

$$0{,}00033758\,(x - 422{,}92)^2 + 79{,}80 \geq 92{,}72$$

(x is de eerste coördinaat van het topje van de derrick). De 'wiskundige' oplossingsverzameling:

$$< -\infty; 192{,}59] \cup [653{,}33; +\infty >$$

moet hier natuurlijk juist geïnterpreteerd worden. Voor Yatzy heeft $[653{,}33; +\infty>$ geen betekenis omdat het water langs de rechteroever te ondiep is. De 'realistische oplossing' luidt dus: van de steiger tot $x = 192{,}59$. Er is dus ongeveer 15 m horizontale speling wat, gezien de slechte bestuurbaarheid, nog niet erg veel is.

Tot slot kunnen we het paraboolmodel even *evalueren*. Zoals blijkt uit tabel 2 (zie volgende pagina) is het inderdaad een goed idee geweest om de kabel te benaderen door een parabool: het cosh-model en de paraboolbenadering verschillen maximaal 0,1 m!

Hoeveel tijd heeft hij om er door te varen?

Op 11 januari 1989, de dag van de geplande doorvaart van Yatzy onder de hoogspanningskabel Zwijndrecht-Scheldelaan, was op die plaats laagwater voorzien om precies 13.24 uur. Ideaal zou men de Yatzy juist op dat moment onder de kabel loodsen. Bij dichte mist op de Schelde is het volgen van een stipte timing evenwel makkelijker gezegd dan gedaan! Voor de scheepsleiding

x (= horizontale afstand in m tot de elektriciteits-paal op linker-oever)	hoogte kabel volgens de para-boolbenadering (in m t.o.v. GLLWS)	hoogte kabel inl het cosh-model met a = 1491,139617 (in m t.o.v. GLLWS)	verschil tussen de parabool-benade-ring en het cosh-model
0	140,18	140,18	0,00
122,92	110,18	110,08	0,10
135,42	107,70	107,60	0,10
147,92	105,33	105,23	0,10
160,42	103,06	102,96	0,10
172,92	100,90	100,81	0,09
222,92	93,30	93,23	0,07
272,92	87,40	87,35	0,05
322,92	83,18	83,15	0,03
372,92	80,64	80,63	0,01
422,92	79,80	79,80	0,00
772,99	121,17	121,08	0,09

Tabel 2: Evaluatie paraboolbenadering

is het daarom interessant te weten in welk tijds*interval* de doorvaart moet plaatsvinden.

Een sinusmodel

Veranderlijk is nu de hoogte van het water. Om daar vat op te krijgen, moeten we een wiskundig model opstellen voor de getijden. Dit kan gebeuren door middel van een (algemene) sinusfunctie:

$$h = a \sin [b(t - c)] + d$$

waarbij h de waterhoogte (in meters) en t de tijd (in uren) voorstelt. Wil men ook het effect springtij-doodtij in rekening brengen, dan kan dit door als modelfunctie een *som* van twee sinussen te nemen. De cyclus van spring- en doodtij is immers ook te beschrijven met een sinusfunctie waarop men de sinus van eb en vloed kan superponeren. Voor de berekening van het tijdsinterval waarin Yatzy kan passeren, volstaat één sinus voor de waterhoogte *bij springtij.*

De getijgegevens (tabel 1) plus het tijdstip waarop laagwater werd voorspeld, verzameld in figuur 6, stellen ons in staat de parameters a, b, c, en d te bepalen:

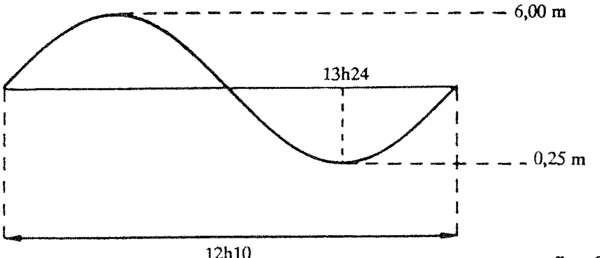


fig. 6

$a = \dfrac{6,00 - 0,25}{2} = 2,875$ (de amplitude)

$b = \dfrac{2\pi}{12,17} = 0,516$ (2π gedeeld door de periode)

$c = 13,4 - \dfrac{3}{4} \cdot 12,17 = 4,275$ (de eerste coördinaat van het 'eerste' snijpunt van de sinus met zijn 'evenwichtslijn')

$d = \dfrac{6,00 + 0,25}{2} = 3,125$ (de 'hoogte' van de evenwichtslijn boven de horizontale as).

Dit geeft als sinusmodel:

$$h = 2,875 \sin [0,516 (t - 4,275)] + 3,125.$$

Hoeveel tijd heeft Yatzy?

Voor de berekening van het tijdsinterval kiezen we een vaste plaats onder de kabel, bijvoorbeeld opnieuw x = 180 waar hij volgens het paraboolmodel 99,72 m hoog is. De waterhoogte, het stuk van Yatzy dat boven water zit (92,97 m) en de veiligheidsmarge (4,5 m) mogen dus samen niet groter worden dan 99,72 m. Dit geeft aanleiding tot een goniometrische ongelijkheid:

$$h + 92,97 + 4,5 \leq 99,92$$

of nog:

$$h \leq 2,25$$

$$\sin [0,516 (t - 4,275)] \leq - 0,30435.$$

Met behulp van een goniometrische cirkel (fig. 7) vinden we:

$$2\pi + (-\pi - \text{bgsin}\,(-0,30435)) \leq 0,516\,(t - 4,275) \leq 2\pi + \text{bgsin}\,(- 0,30435),$$

of uitgewerkt naar t:

$$10,96 \leq t \leq 15,85.$$

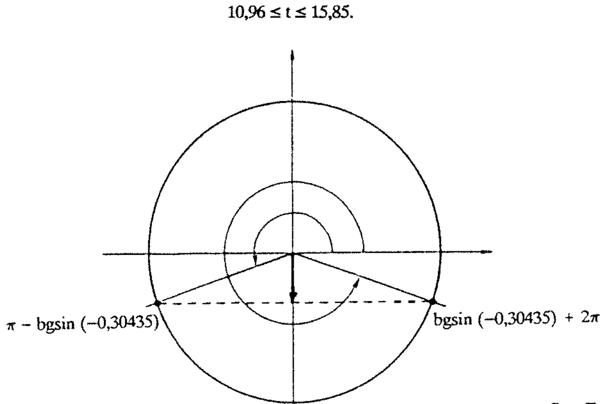


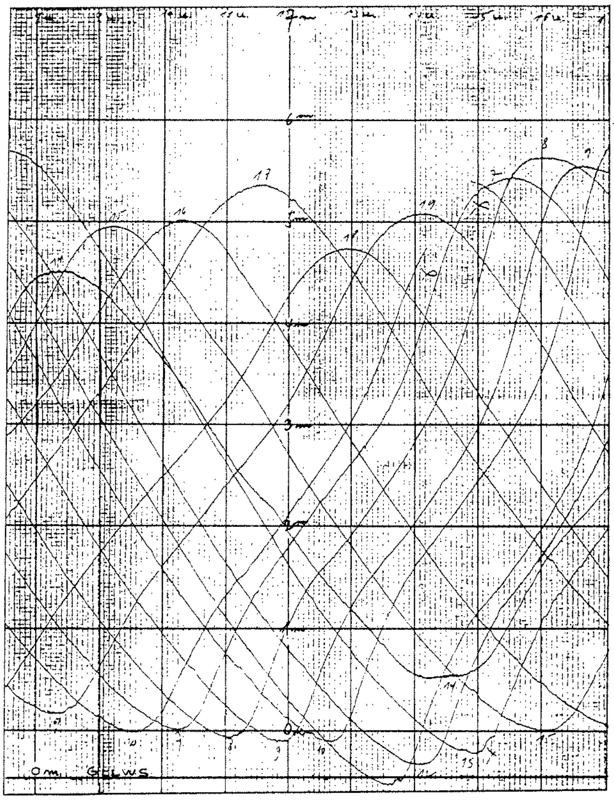
fig. 7

Geen haast dus: er is bijna vijf uur tijd (van 10.58 uur tot 15.51 uur).

Het oplossen van goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden gebeurt traditioneel binnen het kader van de driehoeksmeting. De onbekenden zijn dus altijd *hoeken* (meestal uitgedrukt in graden) en geen *getallen*. De oplossingen worden ook zelden geïnterpreteerd als de nulpunten (of het tekenverloop) van een goniometrische *functie*. De gebruikelijke toevoeging '+ k 360^0 ($k \in \mathbf{Z}$)' of ' + $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)' lijkt voor veel leerlingen dan ook een overbodige gewoonte. Bij de berekening van het tijdsinterval voor het boorplatform is de onbekende een *tijd*. Bovendien zoekt men niet *alle* oplossingen maar enkel diegene die in de gegeven context betekenis hebben. Vandaar ook dat de oplossing 'bgsin (– 0,30435)' verkregen met de zakrekenmachine, werd vermeerderd met 2π.

Blijft nog de *evaluatie* van het sinusmodel, die een stuk ongunstiger uitvalt dan bij het model voor de kabel. Op de *waargenomen* getijkromme van 11 januari 1989 (fig.8) is het tijdsinterval waarvoor $h \leq 2{,}25$ dadelijk af te lezen:

10.10 uur $\leq t \leq$ 15.50 uur.



Waargenomen getijkrommen: op een rol die in 24 uur ronddraait, registreert een schrijfstift continu de waterstand

fig. 8

In werkelijkheid had Yatzy nog ongeveer drie kwartier meer tijd voor z'n doorvaart onder de kabel. *Vanwaar dit verschil tussen realiteit en model?* Dat komt omdat bij getijden de daling langer duurt dan de stijging (fig.9).

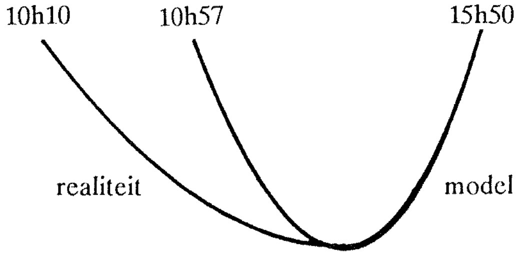
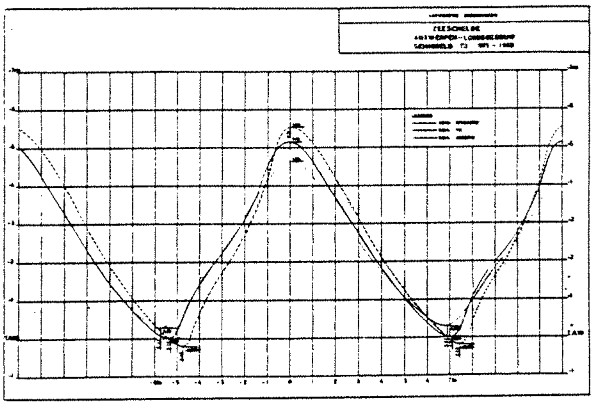


fig. 9

Voor een nauwkeuriger voorspelling zou men gebruik kunnen maken van ingewikkelder periodieke functies (combinaties van sinussen) of simpelweg van een *gemiddelde* getijkromme (fig. 10).



Gemiddelde getijkrommen

fig. 10

De getijkromme van fig. 8 was natuurlijk niet op voorhand beschikbaar.

Nawoord

De werksessie richtte zich tot *leraren*. Om de opeenvolgende vragen te beantwoorden, hoefden zij zich niet te beperken tot de wiskundige kennis van hun leerlingen. Belangrijk was de *ervaring* die ze opdeden: het in groepjes zoeken op een 'echt' probleem en de vaststelling dat wiskundige functies inderdaad in de realiteit als modellen worden gebruikt. Onze hoop is dat ze hun leerlingen deze ervaring niet onthouden.
De sessie is voor de leraren bedoeld, maar toch kan het Yatzy-vraagstuk, eventueel in een aangepaste vorm, perfect door *leerlingen* worden aangepakt. Afhankelijk van de voorkennis en de beschikbare tijd kunnen bepaalde stukken natuurlijk achterwege blijven; leerlingen die bijvoorbeeld nog nooit over een kettinglijn gehoord hebben, zullen vanzelfsprekend geen cosh-model voorstellen... Het is ook denkbaar om de sessie te beperken tot een kortere toepassing op de 'algemene sinus' en op goniometrische ongelijkheden: na een introductie in de context (via video of kranteknipsel) wordt een model voor getijden opgesteld en wordt de vraag over het tijdsinterval opgelost (op één vaste plaats, bijvoorbeeld $x = 180$, waar de hoogte van de kabel *gegeven* is).

Functies als modellen is de titel van de cursus waarin deze sessie kadert. Het *model*aspect betekent een hele didactische verrijking voor de studie van de functieklassen die zich hiertoe lenen (dit zijn vooral de veeltermfuncties, de goniometrische en de exponentiële en logaritmische functies):

- Om een geschikt model op te stellen, moet eerst de nodige informatie worden verzameld en verwerkt. In deze werksessie toonden we aan dat dit ook heel anders kan gebeuren dan in de klassieke 'vraagstuk'-vorm.
- Vaak kun je louter op basis van gezond verstand al

een ruw idee hebben van de oplossing (of van wat zeker niet mogelijk is). Dankzij de 'experimenteerfase' met het plastic Yatzymodel op de dwarsdoorsnede, werden de deelnemers voldoende vertrouwd gemaakt met de context om ook bij de verdere berekeningen 'op twee fronten' na te denken, wiskundig èn in de werkelijkheid.

- Het model opstellen vraagt een goed inzicht in de grafieken van de betrokken functies en hun transformaties.
- Opgaven zoals 'los de volgende vergelijkingen op', die nog vaak 'kaal' worden geserveerd, krijgen binnen het model een reële interpretatie en een zin. Het 'oplossen ' is gekaderd tussen een vraag waar je het antwoord op wilt kennen ('Kan Yatzy er door?') en een concreet antwoord, waarvoor het rekenresultaat moet worden geïnterpreteerd.
- Tenslotte mag ook het model zelf kritisch geëvalueerd worden. Getijden zijn niet zomaar sinussen; de werkelijkheid laat zich niet altijd even goed 'vangen' door de wiskunde.

Literatuur

[1] Bock, D. de, H. Eggermont en R. op de Beeck: *Goniometrische functies als modellen voor periodieke verschijnselen*, Uitwiskeling 3/4 (1987), 13-44.

[2] Lange, J. de en M. Kindt: *Periodieke functies*, Hewet Wiskunde, Educaboek, Culemborg 1985.

[3] Roels, J. (ed.): *Wiskunde vanuit toepassingen*, Aggregatie HSO Wiskunde KU Leuven 1990.

Het grote moment van 11 januari 1989: Yatzy gaat onder de kabel Zwijndrecht-Scheldelaan door

fig. 11

Met dank aan Boelwerf, de Antwerpse Zeediensten en de BRT.
Deze tekst verscheen in een licht gewijzigde versie ook in [3].

Oproep

Bij de Vakgroep OW&OC van de RUU is op 1 september 1990 het project 'Computeralgebra in de bovenbouw van het VO' van start gegaan.

Doel van dit project is om de invloed te onderzoeken die computeralgebrapakketten als DERIVE en MAPLE zouden kunnen hebben op de didactiek en het curriculum van het wiskundeonderwijs in de bovenbouw VO.
In dit verband zou ik graag in contact komen met docenten die enige ervaring hebben opgedaan met dergelijke software in de klas, of die over materiaal (practica en dergelijke) rond dit onderwerp beschikken.
Schriftelijke of telefonische reacties zie ik met belangstelling tegemoet.

Paul Drijvers, Vakgroep OW&OC, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, tel. 030 - 611611 (donderdag), of 080 - 786923 (maandag en vrijdag).