

Perspectief in het havo B-programma

A. Roodhardt

OW&OC, RU Utrecht

In het nieuwe wiskundeprogramma voor de havo wordt sterk de nadruk gelegd op het kunnen toepassen van de leerstof in praktijksituaties. Dat voegt een nieuwe dimensie aan een probleemstelling toe: welke bekende leerstof biedt in dit geval mogelijkheden?

Dit vraagt van de leerling dat hij of zij zich min of meer vrij kan bewegen binnen de stof. En dat kan hij alleen maar als hij zich de stof op inzichtelijke wijze heeft eigengemaakt. Het is logisch dat het programma dat dan ook vraagt.

Wanneer het aantal toepassingen beperkt is, ontstaat na enkele jaren een vaste collectie van routinematig oplosbare problemen. Met deze jurisprudentie en het programma als wetboek, zijn de problemen dan eenvoudig in te delen in wel en niet toelaatbare.

Om dit te voorkomen is er een meer open programma nodig. De stof kan dan ook een beetje meegroeien. We weten immers niet welke toepassingsmogelijkheden er allemaal zijn en er nog zullen komen.

De opening is gevonden door het stellen van de voorwaarde dat de kandidaten moeten leren nieuwe begrippen te hanteren die vanuit de (standaard-)leerstof na een korte omschrijving bereikbaar zijn. Het kunnen inpassen van nieuwe informatie in een bestaand kennisgeheel, is in het algemeen voor mensen die nog niet aan het einde van hun studielevens zijn, een zeer belangrijke vaardigheid.

De redelijkheid moet dan beslissen of een probleem er mee door kan: moeten er niet te veel stappen gezet worden, of is er geen al te geraffineerd ideeetje nodig? Hierbij zijn de grenzen op het examen natuurlijk strikter dan tijdens de opleiding.

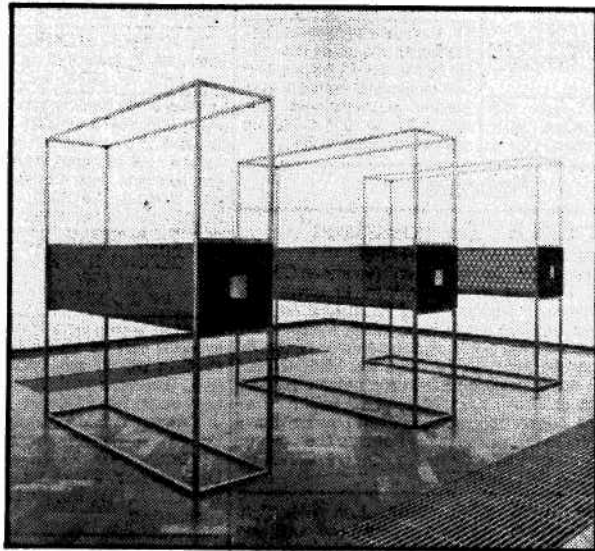
In het volgende willen we onderzoeken hoe het onderwerp 'perspectief' bij deze ideeën aansluit.

Ruimtelijke objecten vervullen een dubbele functie. Ze zijn voorwerp van toepassing van meetkunde en ze dienen als materiaal om een meetkundige theorie aan te ontwikkelen. In beide gevallen gaat het om een studie van de werkelijkheid. Die objecten worden bekeken, bewogen, nagemaakt, beschreven en getekend. Vaak is zo'n object indirect gegeven door een foto, beschrijving of te-

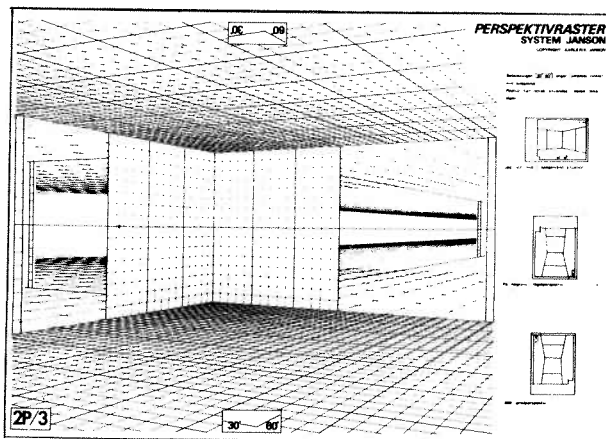
kening. Ook het redeneren moet enig houvast hebben. Tekeningen van objecten zijn dan eveneens te beschouwen als bijzondere taalelementen in een betoog.

Nu doen zich meteen al twee vragen voor:

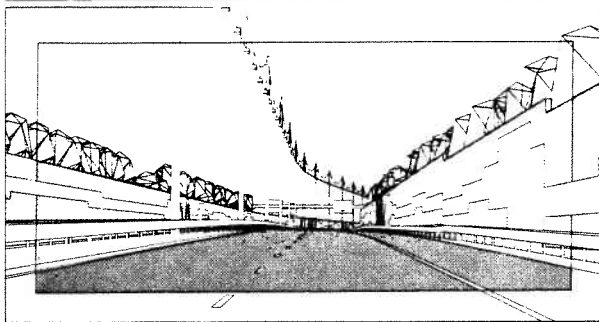
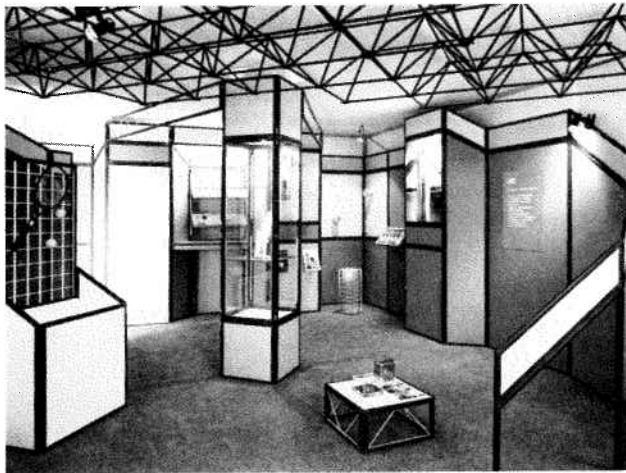
- Hoe geef je de werkelijkheid weer in een tekening?
- Welke eigenschappen van de werkelijkheid kun je uit de tekening terugvinden?



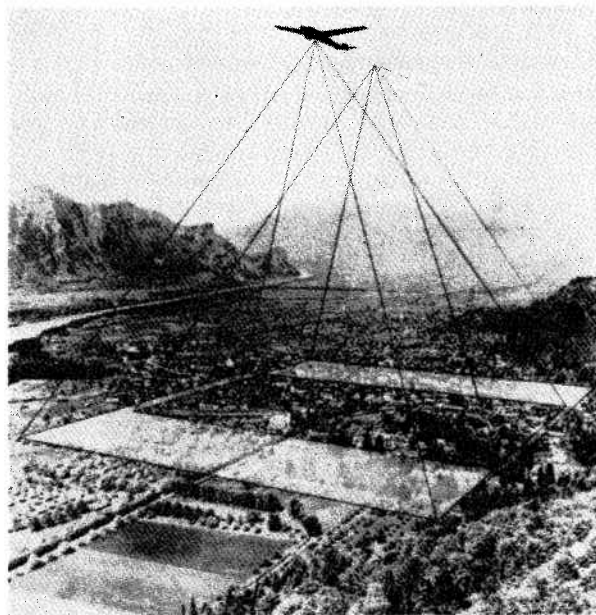
'Fragments of Breathing' van Rini Hurkmans



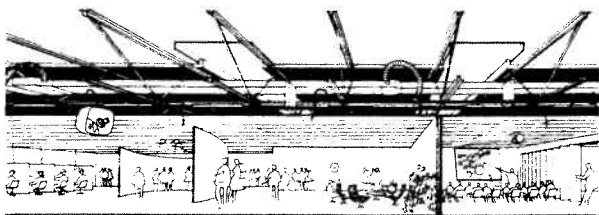
Ontwerppapier



Onderzoek naar de belevingsverandering van het wegbeeld onder invloed van geluidschermen met behulp van computerperspectieven



Fotogrammetrische opname



Deze werkelijkheid kan naast het object in engere zin ook de omgeving daarvan bevatten. Deze overwegingen vragen van de leerling kennis van verschillende projectiemethoden. Niet elke methode is voor elk doel geschikt. Naast fragmenttekeningen als aanzichten, doorsneden, uitslagen en scheve en loodrechte projectie, is de centrale projectie met de perspectiefleer als bijzonder geval een heel natuurlijke keuze.

Aan toepassingsmogelijkheden ontbreekt het ook niet: architectuur, reclame, design, illustratie, animatie, decorbouw, fotografie, woninginrichting, tentoonstellingsbouw, kunst, zichtbaarheids- en verlichtingsproblematiek, kartering, automatische herkenning, om maar eens een begin te maken. (Zie illustraties.)

Het onderdeel perspectief is jarenlang weggeweest in de wiskundeprogramma's. Alleen bij het vwo is enkele jaren geleden een nieuwe start gemaakt. Maar met name door de vele computertoepassingen is het weer actueel geworden.

De grote complexiteit die het onderwerp vroeger had is door de moderne reken- en tekenapparatuur opgevangen. Daarom kan men zich in het havo-programma beperken tot de essentie.

Er is nog een reden van beperking: perspectief is een onderdeel van de ruimtemeetkunde en geen zelfstandig vak. Het streven is dus weinig leerstof te kiezen, maar wel zó dat daar toch betrekkelijk veel mee gedaan kan worden.

Tot welke leerstof heeft dit tenslotte geleid?

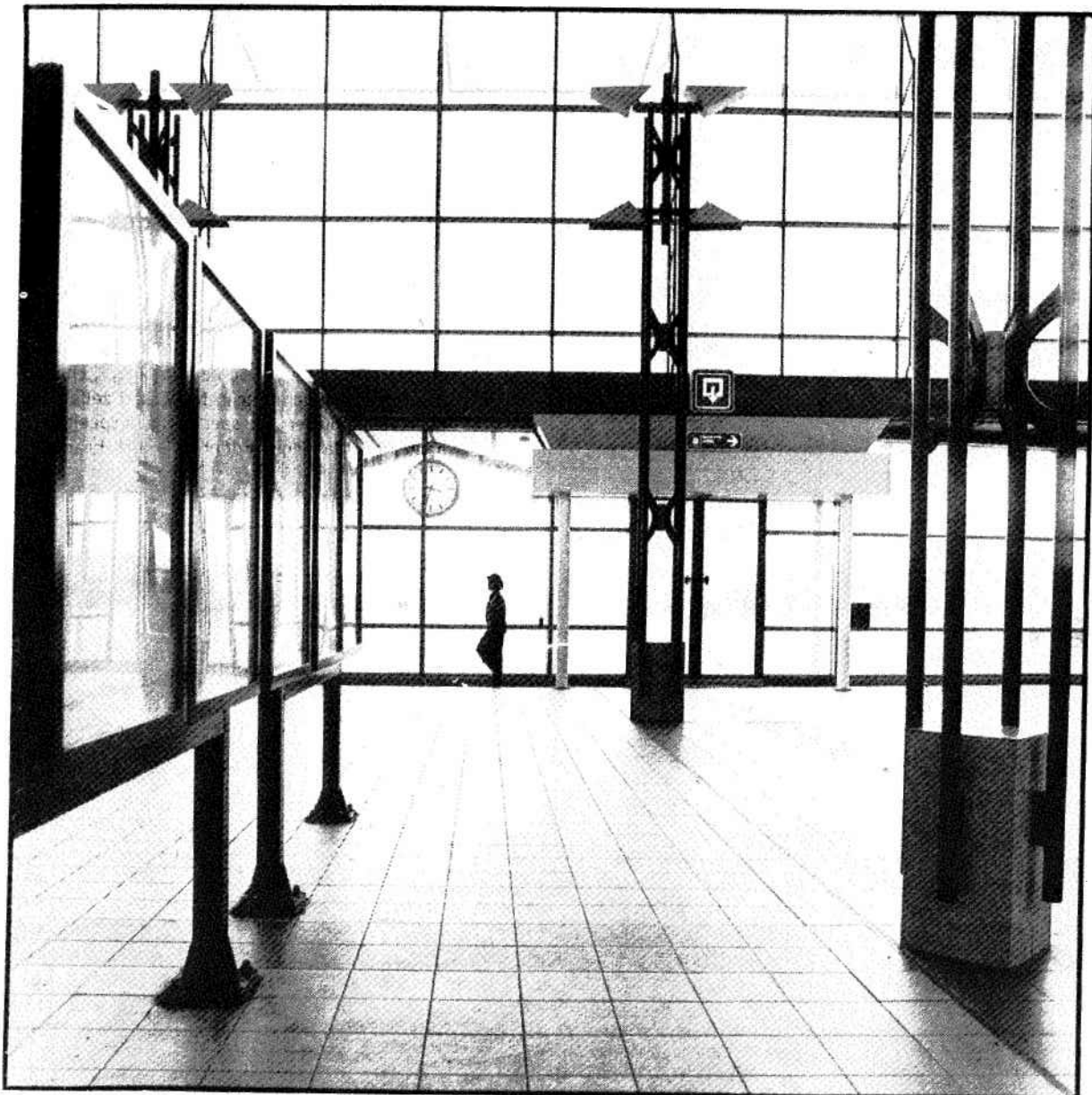
Het programma noemt 'interpreteren van een perspectieftekening'.

Een beschouwing van de foto van de stationshal (zie volgende pagina) levert onder meer op:

- rechte lijnen (in de werkelijkheid) blijven recht (in de tekening);
- de vrouw is het centrale vluchtpunt (ook wel verdwijnpunt genoemd) van een groot aantal parallelle lijnen;
- andere bundels parallelle lijnen, bijvoorbeeld diagonalen van groepen tegels hebben weer een ander verdwijnpunt;
- alle wijkende lijnen die parallel met het grondvlak verlopen hebben hun verdwijnpunt op één lijn, de horizon;
- wat parallel is met het tafereel, zoals de glazen wand, blijft de ware vorm behouden;
- evengrote voorwerpen op verschillende afstanden worden niet evengroot getekend.

Het programma somt niet al deze details op, maar geeft daarvoor *kristallisatiekernen*: horizon en verdwijnpunt.

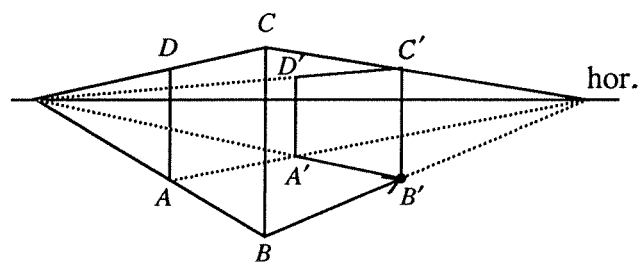
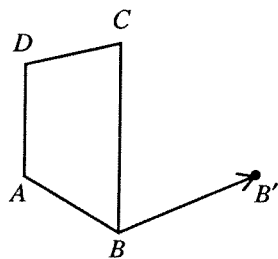
Met de laatste twee punten van de opsomming zijn we in de metriek beland. In vlakken evenwijdig met het tafereel zijn er geen problemen met hoeken en ook niet met



Station Sloterdijk, Amsterdam

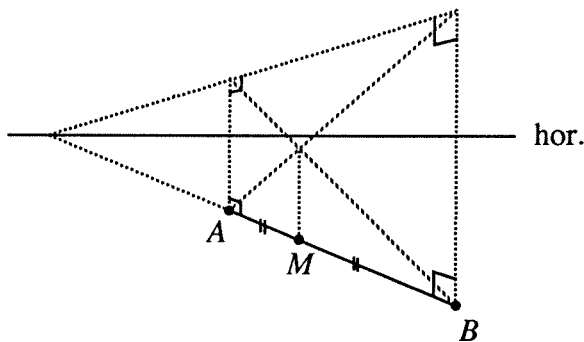
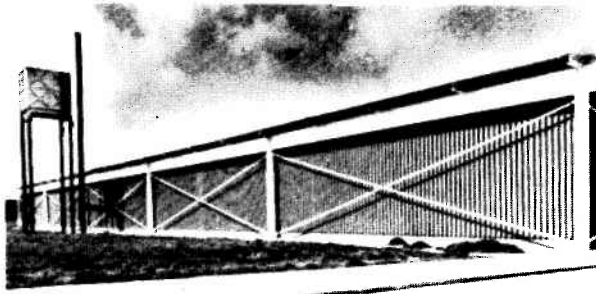
lengten, als we tenminste een begin hebben.
De invloed van de verschillende afstanden van de objec-

ten op de grootte in de tekening is met het kernstuk van
het perspectief, de paralleliteit, vast te stellen.



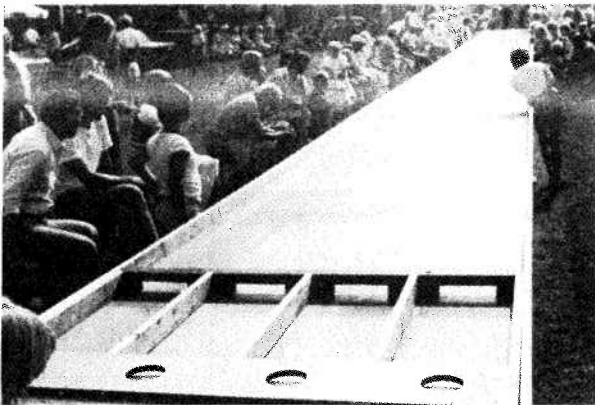
De verticale plaat ABCD verplaatsen tot A'B'C'D'

Het volgende plaatje suggereert een eenvoudige constructie voor het midden van een lijnstuk dat in een horizontaal vlak ligt met behulp van de diagonalen van een rechthoek.



Algemeener loopt deze theorie uit in het tekenen van een hulpparallelogram in het grondvlak.

De grenzen van het toelaatbare zijn op het examen eerder bereikt dan tijdens de les, zoals al is opgemerkt. Hierbij een voorbeeld van zo'n diagonaalopgave die tijdens de les nog net kan.



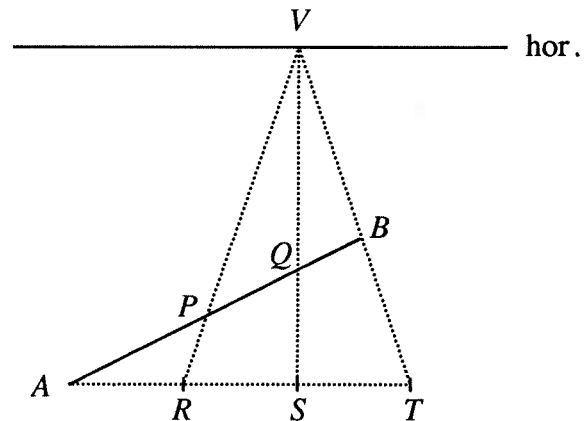
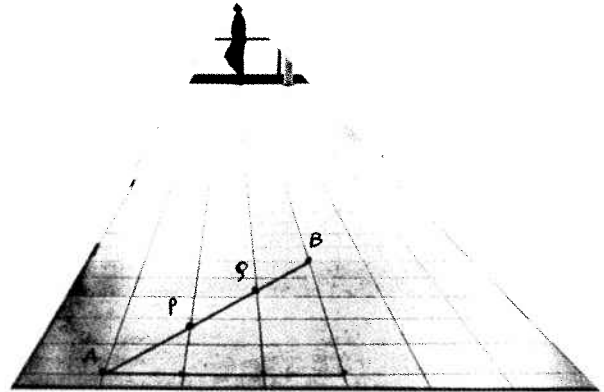
De langste sjoelbak ter wereld in Ee

Reuzensjoelbak

Als bijzonderheid op de braderie en als publiekstrekker staat een sjoelbak opgesteld door muziekvereniging 'Melodia Oranje' welke officieel staat vermeld in de nieuwste uitgave van het Guinness Book of Records. De afmetingen zijn formidabel, namelijk de bak heeft een lengte van 40 meter 52 centimeter en 1 millimeter. De schijven zijn ook van indrukwekkende afmetingen, namelijk met een diameter van 16 centimeter die bepaald niet geruisloos over de lange baan rollen.

Zonder de inwoners van Ee nu meteen met de Kretenzers te vergelijken, mag je toch wel de vraag stellen: Lijkt die veertig meter er een beetje op?

De volgende stap is natuurlijk een lijnstuk in een voorgeschreven aantal gelijke delen te verdelen. De tegelvloer kan voor een oplossing zorgen.



AB in drie gelijke stukken verdelen:

- Pas drie gelijke stukken af op de lijn door A parallel met de horizon. ($AR = RS = ST$);
- TB bepaalt verdwijnpunt V;
- VR en VS snijden AB in de gevraagde punten P en Q.

De leerling kan deze constructie begrijpen als een in perspectief vertaalde evenwijdigheidsconstructie uit de gewone vlakke meetkunde. Daarom is het ook niet onredelijk te vragen naar de verdubbeling van een lijnstuk en de verdeling van een lijnstuk in een willekeurige verhouding.

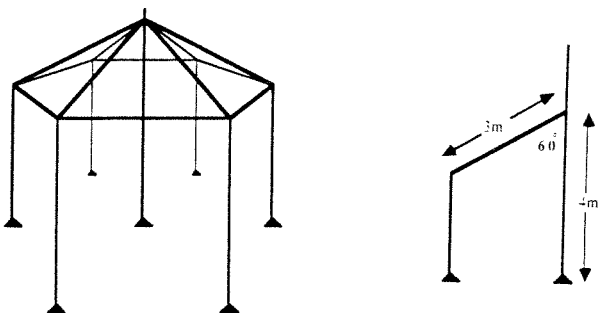
Juist bij de metriek dreigt het gevaar van een te grote uitbreiding van de stof. Maar met deze beperkte theorie zijn al zeer veel vragen over het weergeven en het terugvinden van de werkelijkheid te beantwoorden. Het programma laat het dan ook bij de kristallisatiekem *in een perspectieftekening een lijnstuk verdelen in stukken die in werkelijkheid gelijk zijn in het geval dat dit lijnstuk parallel is met het horizontale vlak.*

Er wordt geen standaardmethode vereist voor perspectiefconstructies vanuit ware groottekening of schaalte-

keningen. Doordat vaak een weg gezocht moet worden via het doordringen in de structuur van een object, is het perspectieftekenen tevens een belangrijk terrein voor het toepassen van het meetkundig redeneren. Hierbij een voorbeeld van een in het programma genoemde voltooiingsopgave die met deze beperkte middelen is te maken.

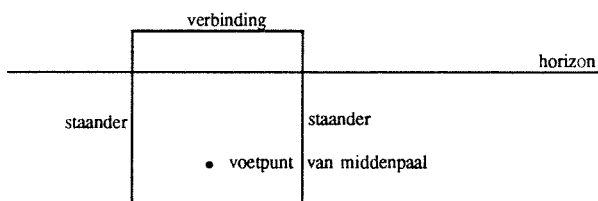
Het prieeltje

In een park wordt om een paal een prieeltje gebouwd met zes geknikte buizen en zes horizontale verbindingen. De bovenste stukken van de geknikte buizen maken hoeken van 60° met de middenpaal en hebben een lengte van drie meter. De bevestiging bovenin bevindt zich vier meter boven de grond.



Voor de berekeningen idealiseren we alles tot lijnstukken zonder dikte.

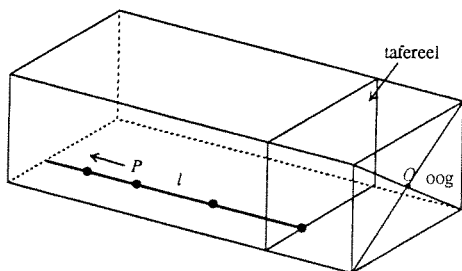
Voltooi de perspectivische tekening van het prieeltje. Is dit een vrij normale kijk op het prieeltje?



De hiervoor genoemde constructies zijn als pure tekenconventie op te vatten. De leerling hoort meer over de achtergrond te weten.

Om de posities van punten, lijnen en vlakken duidelijk te kunnen aangeven, kan bijvoorbeeld het model van de 'kijkdoos' gebruikt worden.

Als illustratie dit vraagstuk:



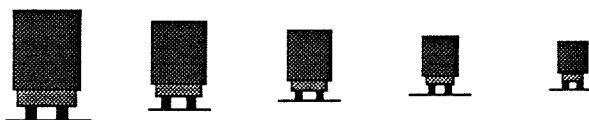
l staat loodrecht op het tafereel.

- Teken in deze figuur het beeld van l met de beelden van de vier aangegeven punten.
- Het punt P wordt langs l verschoven. Wat gebeurt er met het beeldpunt P' ?
- Door P steeds verder te verschuiven buiten de balk gaat P' naar een grenspunt. Waar ligt in het tafereel dat grenspunt?
- Dit grenspunt heet het verdwijnpunt van l (en ook van l').
Beredeneer dat elke lijn die parallel is met l hetzelfde verdwijnpunt heeft.
- Hoe kun je in het tafereel de horizon krijgen?

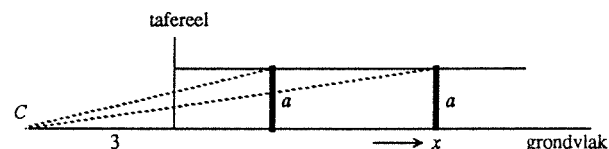
Het programma noemt de beperking tot een verticaal tafereel. Maar in deze context zou wel gevraagd kunnen worden naar het beeld van een verticale rechthoek bij een hellend tafereel.

Tot slot nog een voorbeeld hoe het perspectief een rol kan spelen in het dwarsverband tussen meetkunde en analyse.

Het in de verte verdwijnen van een auto



We bestuderen dit verschijnsel met een principerekening.



Het lijnstuk a met lengte l wordt naar rechts verplaatst. Daardoor wordt het beeld steeds kleiner. De afstand van a tot C noemen we x .

a verplaatst zich met een snelheid van vijf lengte-eenheden per tijdseenheid. Dus we kunnen stellen $x = 5t + 3$, als we bij het tafereel $t = 0$ nemen.

- Druk de hoogte h van het beeld uit in t .
- Met welke snelheid 'krimpt' het beeld in?
- Verklaar algebraïsch dat de auto op grote afstand stil lijkt te staan.

Al met al lijkt het perspectief me een onderwerp waarin we op zinvolle wijze bezig kunnen zijn met aan de werkelijkheid ontleende problemen. En het biedt de mogelijkheid de waarde van een theoretische verdieping te illustreren.