Alles kan in piekjaar 1991

De nieuwjaarspuzzel, en verder

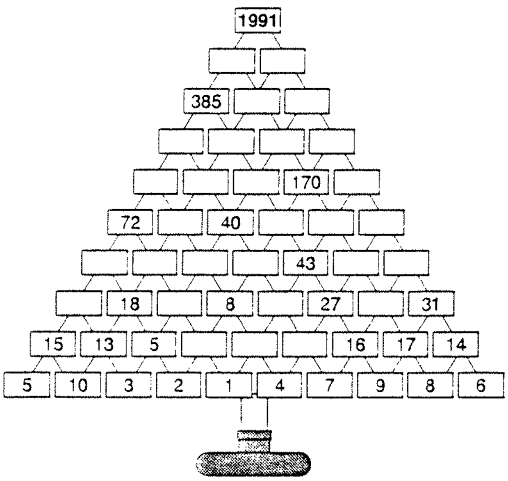
A.J. Goddijn/A. Treffers
OW&OC, RU Utrecht

Reacties van....

OW&OC stuurde u een nieuwjaarsgroet. Er kwamen reacties van onder andere: E.M. Bos, Willem-Derk Nijdam, Hessel Pot, T.J. van Welie, Henk Meijer, Gerrit van Brakel, Thijs Noteboom, Ben Scholten, H. Sleurink, A.J. van Alphen, Bert Nijdam, A. Guldemond, Carel Kuitenbrouwer, Jan van Mierlo, Corrie Oudhoff, Henny Weda, P.J. Jongma, J. Essers, J.M. de Geus, Gert Munters, Betsy Bohte, Joost van der Staak, Gertjan Laan, J.A. v.d. Oever Reijm, L.C. Spijkerboer, E. Vos c.s, A.J. van Vloten, Rien van Bruchem, Wim Gresnigt, Leo van Basten Batenburg, F.J. Osseweijer, M. Remmen, B.C. Krol, H. Schutjes, Ron Arts, Grada Fokkema, Johan Vermeer, Mechteld de Kort Florisse, E. Grootveld, Whee Ky Ma, Hans v.d. Mark, R.A. Ramnathsing, Alwin Huitema, F. Luijbe, Lydia Rigter, M.H.W.M. Schellekens, E.C. Buissant des Amorie, Jan de Ruiter, W.A.J. van der Kaaij, W.H. Taconis, W.J. Schurink, M. Woldinga, G.J. Anderweg, Theo van Dijk, Bastiaan Morshuis en A.C.L. Kole.
De reacties kwamen begin januari binnen; opvallend veel waren gedateerd 9-1-'91. Want

Met alleen 1, 9, 9 en 1

moesten de getallen van deze kerstboom gemaakt worden.



Van onderaf optellend op z'n driehoek-van-Pascal's ontstaan $1 * (9 - 1) * (\sqrt{9})!$ verschillende getallen, die gemaakt moeten worden met de vier cijfers 1, 9, 9 en 1, èn bewerkingstekens, worteltekens, haakjes, faculteittekens en machten.

De $\sqrt{9} * 19 - 1$ inzenders gaven zo'n $\sqrt{9} * 11 + \sqrt{9}$ oplossingen gemiddeld, zeker meer dan 1991 in totaal.

Om te beginnen maar eens $1 + 1 * \sqrt{\sqrt{9} * 9}$ citaten. E.M. Bos (Alphen a/d Rijn) schrijft:

De 'boom' bleek educatief zeer verantwoord te zijn. In huiselijke kring heeft hierdoor een moeilijk toegankelijk vak als wiskunde spelenderwijs ingang gevonden bij mijn echtgenoot, met slechts een ouderwetse HBS-A achtergrond, alsmede bij zoonlief van negen jaar, leerling in groep zes van de basisschool.
Na enige uitleg, gevolgd door oefening, wisten zij op een mijns inziens voldoende niveau te manipuleren met worteltekens, faculteittekens en machtsverheffen om gezamenlijk de 'boom' op te tuigen. Aan beide gezinsleden heb ik geen kind meer gehad tijdens de kerstvakantie.

Daar zijn overigens 54 van de 55 gemaakt, zij het met een lichte verruiming van de spelregels. Zo dadelijk daarover meer.
Door Willem-Derk Nijdam (Maarssen) is gebruik gemaakt van rekenbesparende middelen:

De oplossingen op de kaart zijn bedacht door Bert Nijdam. Hij heeft zijn rekenknobbel losgelaten en heeft de oplossingen gevonden die op de kaart zijn geschreven. Het mooie is dat van bijna al zijn oplossingen de cijfers in de volgorde 1-9-9-1 staan. Helaas kon Bert niet voor alle getallen een oplossing vinden. Voor de getallen 189, 196, 277, 397, 466, 674, 851 en 1140 kon hij geen oplossing bedenken. Na veel te veel tijd besteed te hebben aan het zoeken van de overige oplossingen, heeft Bert de moed opgegeven.

In de overtuiging dat er oplossingen zouden moeten zijn voor de niet gevonden getallen ben ik gaan zoeken met *een hulpmiddeltje, een computer. De computer bespaart een hoop rekenwerk. Helaas kostte het nog drie dagen programmeren en een nacht rekenen voordat de computer met zijn onthutsende antwoord kwam: voor de niet gevonden getallen bestaat geen oplossing.*

Het programma maakt gebruik van optellen, aftrekken, haakjes, vierkantswortel, faculteiten en machten. Om de rekentijd te beperken heb ik de maximale functie-nesting op 5 gezet. Bij een nesting van 6 worden evenveel antwoorden gevonden. De kans is daarom klein dat bij een nog grotere nesting meer getallen worden gevonden. Het programma vond het antwoord voor 362 getallen tussen 1 en 2000. Tenzij iemand nieuwe, slimme bewerkingstekens kan bedenken of een antwoord vindt met een grotere functie-nesting, denk ik dat ik alle mogelijke antwoorden gevonden heb.

Het programma èn uitvoer is opgestuurd.
(De $\sqrt{9} * 19 - 1$ van zoëven is daaruit gehaald.)
Vooral op mooie oplossingen letten, dat leverde van de hand van Gertjan Laan onder andere op:

Heel mooi vind ik de volgende:

$$9 = \frac{\sqrt{9} * \sqrt{9}}{1 * 1}$$

Aardig is hier dat de twee enen de wortel teniet doen:

$$27 = \sqrt{9^{1+1}} * \sqrt{9}$$

Maar het allermooiste blijft natuurlijk:
1991
dat hoop en wens ik in elk geval.

Het vierde citaat is uit werk van Hessel Pot.
Eerst zijn oplossing voor de getallen vanaf $91 - (\sqrt{9} + 1)!$ tot en met 1991, voor zover nodig:

$67 = (1+1)^{(\sqrt{9})!} + \sqrt{9}$

$67 = [(1+\sqrt{9})! + \sqrt{\sqrt{(9+1)!}}]$

$72 = -19 + 91$

$82 = -1 \times 9 + 91$

$103 = [\sqrt{\sqrt{1+(\sqrt{9})!}}^{\sqrt{91}}]$

$107 = [\sqrt{\sqrt{-1+9}}^{9 \times 1}]$

$114 = 19 \times (\sqrt{9})! \times 1$

$124 = 1 + \sqrt{9} + ((\sqrt{9})! - 1)!$

$170 = 19 \times 9 - 1$

$189 = [1 + \sqrt{\sqrt{9}}^{\sqrt{91}}]$

$196 = [-1 - \sqrt{9} + \sqrt{(9-1)!}]$

$227 = ((\sqrt{9})!)^{\sqrt{9}} + 11$

Mogen die blokhaken, bedoeld als entierfunctie?
Hier is Hessel Pot in zijn begeleidende brief:

Om alle 48 in de kerstboom voorkomende verschillende getallen te construeren, was het hier en daar nodig om de aangegeven regels met wat fantasie te interpreteren. Dat zal ook wel de bedoeling geweest zijn, alhoewel het dan moeilijk in te schatten is welke interpretaties van de regels wel en niet door de jury zullen worden aanvaard. Veiligheidshalve geef ik daarom voor een aantal gevallen meer dan één oplossing.

Basisregels: 37 oplossingen, waarvan 35 op volgorde
Met de regels in de meest beperkte interpretatie kon ik 37 verschillende uitkomsten vinden (onder 100, 114, 124, 170, 227, 1991). Met uitzondering van de gevallen 67 en 227 kon ik de volgende formules vinden waarin de vier jaartal-cijfers optreden in de volgorde: 1–9–9–1.

Uitbreidingen: alle 48 uitkomsten op volgorde

a. Als onder de genoemde 'haakjes' ook entierhaakjes *gerekend mogen worden, dan zijn àlle gaten te vullen. Zelfs allemaal met een cijfervolgorde 1-9-9-1. Alleen het geval 1140 blijft nog wat problematisch, met een rare wortelexponent of met een dùbbel stel entierhaakjes.*
Zie eveneens de bijgaande lijst.

b. Verder kunnen haakjes ook gebruikt worden om binomiaalcoëfficiënten (combinatie-aantallen) aan te geven:

$$31 = 11 + \binom{(\sqrt{9})!}{\sqrt{9}}$$

$$46 = \binom{11}{9} - 9$$

$$1140 = \binom{19+1}{\sqrt{9}}$$ *(met de juiste cijfervolgorde!)*

$227 = [\sqrt{\sqrt{\sqrt{19!}}} + 91]$

$277 = [1 + 9\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{((1+\sqrt{9})!)!}}}}]$

$385 = [\sqrt{1 + 9! : \sqrt{(\sqrt{9})!}} + 1]$

$397 = [\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{((1+\sqrt{9}) \times 9)!}}}} + 1]$

$466 = [19\sqrt{\sqrt{(9 \times 1)!}}]$

$674 = [\sqrt{(1 + (\sqrt{9})!)!} + \sqrt{9!} + 1]$

$851 = [1 + \sqrt{9! + 9!} - 1]$

$1140 = -[-\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-1+9)}}}}}}} / \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(((\sqrt{9})!-1)!)!}}}}}}]$

$1140 = [1 + \sqrt{\sqrt{\sqrt{[\sqrt{((\sqrt{9})!)!}]!}}} : \sqrt{\sqrt{(\sqrt{9})!}} + 1]$

$1140 = [\sqrt{\sqrt{\sqrt{[\sqrt{\sqrt{9!}}]!}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{(19+1)!}}}]$

$1140 = [(\sqrt{\sqrt{[\sqrt{(1+(\sqrt{9})!)!}]}} - 1)\sqrt{9!}]$

$1991 = 1991$

Daarna volgen nog méér toegevoegde bewerkingen.
Als laatste:

g. *De toetsknoppen-notatie voor het rekendoosje geeft daarentegen talloze mogelijkheden om de gevraagde getallen te schrijven 'met twee enen en twee negens' plus wat 'bewerkingstekens'.*
Op sommige doosjes geldt bijvoorbeeld:

$$1\ 9 + + = = + + = \times (9 + 1) = \boxed{1140}$$

Het zal na dit alles duidelijk zijn dat de jury moeiteloos, zonder discussie over al dan niet toegelaten bewerkingen, de winnaar kon aanwijzen: Hessel Pot.

Fantastische overtredingen

De regel die men zich vaak eigener beweging oplegde was: houd de cijfers 1, 9, 9, 1 in volgorde; dat maakt het vaak lastiger.
Maar verder is er, onder druk van de moeilijkheden, toch ook veel, zij het geïnspireerd, tegen de spelregels gezondigd.Dat is allemaal prachtig, maar eigenlijk ....:

$$33 = \{1 * (\sqrt{9})!\}!! - \{(\sqrt{9})! - 1\}!!$$

(De !! -bewerking betekent hier niet !!, als u begrijpt wat ik bedoel, maar: 7!! = 7 * 5 * 3 * 1 en
10!! = 10 * 8 * 6 * 4 * 2)

$$1140 = \binom{19+1}{\sqrt{9}}$$

(uit de driehoek van Pascal.)

$$103 = 9^2 + (\sqrt{9})! + (1 + 1)^4$$

(machten mochten, maar 2 en 4 niet ...)

$$1140 = 19 \cdot \sqrt{9}! \cdot \exp(1)$$

(exp? Zoals op de rekenmachine; exp (1) is 10.)

$$71 = \sqrt{((\sqrt{9})! + 1)! + 1}$$

(Er ontbreekt een 9, dat is op te lossen door $\sqrt{9 * 9}$ in plaats van de ene 9 in te vullen, maar véél erger: 71 komt in de boom niet voor. Toch is dit juist een van de zéér briljante inzendingen.

Toegelicht wordt 4! + 1, 5! + 1 en 7! + 1 zijn kwadraten, en verder komen die waarschijnlijk zo niet voor in de rij {n! + 1}. E.C. Buissant des Amorie uit Amstelveen wist het; het computerprogramma van Willem-Derk Nijdam niet!)

$$1140 = ((\sqrt{9}! - 1)! - \sqrt{9}!) / \cdot 1$$

(De decimale punt, strikt genomen, mag dat niet. Deze fraaie vondst is van Gerrit van Brakel, Enschede).
Nog maar eens, weer 1140:

$$1140 = [(\sqrt{9}! - .9)^{1.1}]$$

(Hoe vìndt iemand dat nou? Vraag het Hessel Pot).

Echt moeilijk

Zonder overtredingen zijn 189, 196, 277, 397, 466, 674, 851 en 1140 niet gevonden.
Lastig bleken 103, 107 en 227.
Sommige inzenders vonden:

$$103 = (1 + ((\sqrt{9})!)!) / ((\sqrt{9})! + 1)$$

(Bert Nijdam)

$$107 = \frac{11!}{9!} - \sqrt{9}$$

(Gerrit van Brakel)

$$227 = ((\sqrt{9})!)^{\sqrt{9}} + 11$$

(onder andere J.M. de Geus)

Mag je uit het ontbreken van oplossingen voor bijvoorbeeld 189 nu concluderen dat het niet kan?
Het wordt tijd dat we T.J. van Welie te hulp roepen. Die laat klip-en-klaar zien dat 189 kan, 188 ook en: elk getal dat je maar wilt. Er wordt één spelregel bij overtreden, dat is waar.

Een nieuwe puzzel

De oplossing van Van Welie drukken we pas volgende keer af. Het is veel te leuk die zelf te vinden.
De regelverruiming is: ook gebruikt mogen worden de functies sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan, log en ln.
Bij log moet wel het grondtal ingevuld worden.
Maar '${}^2\log$' mag niet, '${}^{(\sqrt{9}-1)}\log$' wel, ln mag gewoon.
Als u deze vrijheid neemt, dan is wel de verplichting een formule-patroon te vinden dat voor èlk natuurlijk getal op de juiste lengte uitgeschreven moet kunnen worden.
Denk bijvoorbeeld aan zo iets als:

$$n = \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\ldots\sqrt{1991}}}}}}}_{n \text{ wortels}}$$

Dit patroon klopt niet, maar zo iets is de bedoeling.
In de doorlopende nummering van deze puzzelrubriek zijn we nu toe aan:

Opgave $11 * (\sqrt{9})! + \sqrt{9}$

Vind zo'n patroon!

En volgend jaar weer?

Thijs Notenboom merkt op dat het een fraaie vondst is, zo die getallen van 1 tot en met 10 handig van volgorde verwisseld op de grond en dan bovenaan op 1991 uitkomen. Dat hebben we niet van onszelf, al is het met handig proberen wel te vinden.

Henk Meijer is er zeker van dat we volgend jaar géén kerstboom met 1992 aan de top hebben.
Laten we dat eens onderzoeken ...
De '5', helemaal linksonder, draagt in de volgende rij zijn waarde aan '15' bij. De '10' daarentegen draagt zijn waarde zowel aan de '15' als de '13' bij.

Daar komen de vragen:

Opgave $9 * 9 - 11$.

Hoeveel draagt de '1' bij aan 1991?

Opgave $\sqrt{((\sqrt{\sqrt{9*9}})!+1)!+1}$

In welke van de komende jaren kunnen we de puzzel herhalen?

Rest mij nog Ellen Hanepen succes te wensen al deze diep geneste wortels uit de tekstverwerker te krijgen. Als u weet dat ook de vorige Nieuwe Wiskrant geheel binnenshuis is gemaakt, dan weet u dat zulks in goede handen is.

(Advertentie)