

Een zakcomputer voor iedere leerling

M. van Reeuwijk

OW&OC, RU Utrecht

Wiskundeonderwijs is nooit af. Dat is al meerdere malen gezegd. Toch lijkt het er soms wel op. Wiskunde A en B zijn nu ingevoerd op het havo en het vwo, en over een paar jaar zullen ook de onderbouw-, mavo- en lbo-wiskundeprogramma's zijn herzien.

Bij al deze vernieuwingen is geprobeerd om ook de technologie (rekenmachine en computer) te integreren. Waar echter nog niet naar is gekeken, zijn de mogelijkheden van een grafische rekenmachine. Als de grafische rekenmachine over een paar jaar gemeengoed is, moet misschien het hele wiskundeonderwijs daar weer op aangepast worden.

In een eerder artikel in de Nieuwe Wiskrant [1] heb ik de mogelijke gevolgen van dergelijke rekenmachines voor het wiskundeonderwijs getracht te schetsen. Op de WIT-conferentie in september 1989 (Wiskunde en Informatie Technologie) werd in een van de werkgroepen de mogelijkheid geboden om met een grafische rekenmachine van Hewlett Packard (de HP 28S) te experimenteren. In de klas was er ook op heel kleine schaal iets uitgetoond met deze machine.

De ervaringen met de HP 28S gaven een idee van de mogelijkheden van grafische rekenmachines. Een nadeel van de HP 28S was de onvriendelijke bediening en het LCD schermje was ook vrij klein. De grafische rekenmachine die Casio vorig jaar op de markt had (de Casio 7000 G) was al een stuk makkelijker te bedienen.

Vorig jaar dacht ik dat het nog wel een jaar of vijf zou duren voordat er een goedkopere en vriendelijkere versie zou verschijnen.

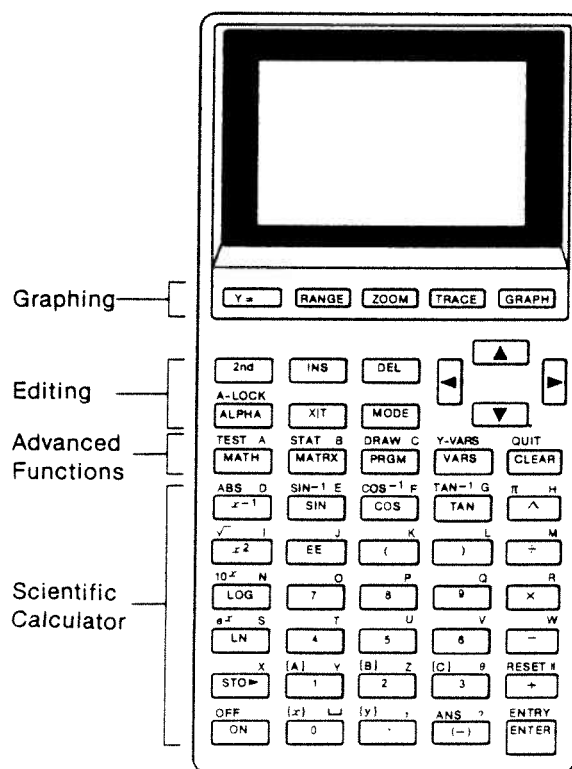
De ontwikkelingen gaan echter sneller dan ik een jaar geleden had kunnen voorzien. Casio heeft een nieuwe rekenmachine op de markt gebracht (de 7500 G) en ook Texas Instruments heeft diep geïnvesteerd in een grafische rekenmachine (de TI 81). Deze nieuwe machines zijn veel gebruikersvriendelijker en kosten al een stuk minder dan de machines die vorig jaar op de markt waren.

De TI 81 is helaas nog niet in Europa verkrijgbaar. In de Verenigde Staten is het echter al een zeer populair apparaat

en op sommige High Schools wordt van de leerlingen zelfs verwacht dat ze de TI 81 aanschaffen. In oktober en november 1990 heb ik een bezoek gebracht aan de VS en heb daar met eigen ogen kunnen zien hoe er in de klas met deze grafische rekenmachine wordt gewerkt. Ook heb ik een conferentie bezocht waar de TI 81 centraal stond. En natuurlijk heb ik er ook een aangeschaft.

De TI 81 van Texas Instruments

De TI 81 is niet enkel door een paar technici van het bedrijf, geïsoleerd van elke praktijksituatie, ontwikkeld. Bij de ontwikkeling zijn Frank Demana en Bert Waits [2] zeer nauw betrokken geweest. Een zorgvuldige inventarisatie van eisen en wensen waaraan een grafische rekenmachine moest voldoen, vond onder hun leiding plaats.



Speciale bijeenkomsten voor wiskundeleraars uit het voortgezet onderwijs (de high school) en het universitaire onderwijs werden georganiseerd. De filosofie was dat juist de docent die met een grafische rekenmachine te maken zal krijgen, bij de ontwikkeling betrokken moest worden. Dankzij hun commentaar over wat een grafische rekenmachine wel en niet moet kunnen, is de TI 81 een goed bruikbaar apparaat geworden.

De doelgroep voor deze machine wordt gevormd door leerlingen uit de hoogste klassen van het voortgezet onderwijs en studenten uit de eerste jaren universitaire onderwijs.

De bediening van de TI 81 is logisch en zoals je als gebruiker verwacht. Expressies kun je intoetsen zoals je gewend bent en zo verschijnen ze ook op het scherm. Je hoeft bijvoorbeeld geen maalteken in te toetsen bij vermenigvuldiging, maar het mag wel.

$\sin X$ mag, maar ook $\sin (X)$
 $3\sin X$ mag maar ook $3*\sin X$

matrixvermenigvuldiging

$[A] * [B]$ mag, maar ook $[A] [B]$

X^2 kan, maar ook $X^{\wedge}2$

Naast alle functies die ook op een wetenschappelijke rekenmachine zitten, biedt de TI 81 de mogelijkheid om via menu's nog meer wiskundige operaties uit te voeren. Het prettige van dit apparaat is dat elk menu op dezelfde manier is opgebouwd en dat je maar weinig commando's hoeft te onthouden. Een ander voordeel van de machine is dat zowel invoer als uitvoer er op het scherm nauwelijks hetzelfde uitzien als op papier.

Ik vergelijk het bedieningsgemak wel met een Apple Macintosh. Weliswaar heeft de TI 81 geen muis, maar de bediening is consequent en je hoeft geen ingewikkelde commando's te onthouden.

Op de vorige bladzijde is te zien dat de TI 81 ondanks de vele mogelijkheden toch een vrij overzichtelijk apparaat is gebleven. Het aantal knoppen is zo beperkt mogelijk gehouden. Het toetsenbord is in vier zones ingedeeld die samenhangen met de verschillende manieren om de rekenmachine te gebruiken

Het plaatje geeft al een globaal beeld van de mogelijkheden van deze rekenmachine. Samengevat komt het op het volgende neer:

- Hij kan grafieken tekenen (maximaal vier grafieken tegelijkertijd) en manipuleren, zowel van functies als van parametervoorstellingen, met allerlei mogelijkheden van in- en uitzoomen en arceren.
- Hij kan statistische berekeningen uitvoeren, ook voor twee variabelen met de mogelijkheid van regressie (lineair, logaritmisch, exponentieel, en machtsfuncties). Bovendien is de uitvoer grafisch weer te geven.

- Hij kan matrixrekenen (maximaal 6 bij 6 matrices) met de mogelijkheid om determinant, getransponeerde en inverse te bepalen.
- Hij bezit alle functies die ook op een wetenschappelijke rekenmachine zitten.
- Hij is programmeerbaar. Zevenendertig programma's kunnen in het geheugen worden opgeslagen. Het programmeren gaat via een soort BASIC commando's.

Menu	Meaning
CALC DRAW DATA	
1: 1-Var	Calculates one-variable results
2: LinReg	Calculates linear regression model
3: LnReg	Calculates logarithmic regression model
4: ExpReg	Calculates exponential regression model
5: PwrReg	Calculates power regression model
CALC DRAW DATA	
1: Hist	Draws a histogram
2: Scatter	Draws a scatter plot of the data points
3: xyLine	Plots and connects data points with a line
CALC DRAW DATA	
1: Edit	Enters or edits data values
2: ClrStat	Clears data values
3: xSort	Orders data points by X values
4: ySort	Orders data points by Y values

Een voorbeeld van het menu **STAT**.

Door met de pijltjestoetsen naar links of rechts te gaan, krijg je de drie 'submenu's'. Binnen elk submenu heb je een aantal mogelijkheden. Je kunt iets selecteren door er met de pijltjes toetsen heen te lopen of door het gewenste nummer in te toetsen.

Op een LCD-schermpje van 95 bij 63 puntjes wordt bovendien alles zichtbaar wat je intoetst. Het schermpje kan acht regels tekst bevatten en dat is heel prettig als een leerling bijvoorbeeld een verkeerd antwoord krijgt. Het is dan gemakkelijk om z'n fout te achterhalen, immers de voorgaande ingetoetste regels zijn nog zichtbaar op het scherm.

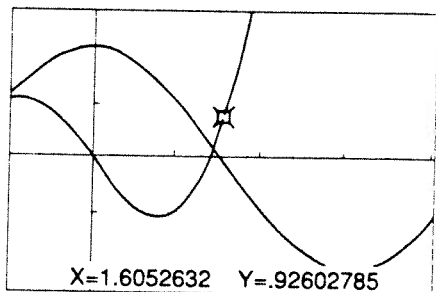
In de klas

Hoe de technische mogelijkheden van de TI 81 in de wiskundeles benut kunnen worden, werd onder meer duidelijk toen ik in de klas leerlingen met het apparaat zag werken.

In een precalculus klas (vergelijkbaar met een 4 vwo klas) waren de leerlingen al een week bezig met het 'globaal' kijken naar grafieken. Diverse grafieken van polynomen, wortelfuncties en goniometrische functies hadden ze al getekend met behulp van de TI 81. Een van de vragen die telkens beantwoord moest worden was 'Weet je zeker dat je de complete grafiek op het scherm hebt?' Om dat zeker te weten moesten de leerlingen telkens het juiste domein en bereik bepalen. Dit was een nuttige be-

zigheid en al doende kregen de leerlingen een beetje gevoel voor functies en hun grafieken.

Door middel van de 'trace-functie' (waarmee je als het ware over een grafiek kunt lopen; onder op het scherm worden dan de coördinaten van het punt zichtbaar) konden de leerlingen maxima, minima en nulpunten opsporen.



Het gebruik van de trace-functie

Zo konden ze zonder enig functie-onderzoek de bijzonderheden van een functie vinden. In plaats van het 'lijstje' van het functie-onderzoek af te werken om vervolgens de grafiek te tekenen, ging het nu juist andersom. De grafiek van de functie riep vragen op die vervolgens om nader onderzoek vroegen.

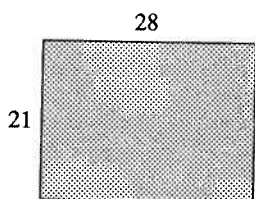
Differentiëren konden de leerlingen nog niet, maar met behulp van de trace-functie en de zoomfunctie konden ze een heel redelijke benadering voor minima en maxima vinden.

Een voorbeeld

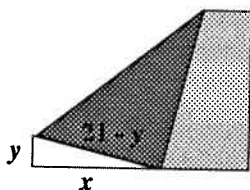
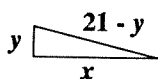
De docent had een leuk probleem.

Hij verdeelde de klas in groepjes van drie of vier en gaf elke groep een blaadje millimeter-papier van 21 bij 28 cm. Hij liet zien dat als je een punt van het papier naar binnen vouwt, je een driehoek krijgt.

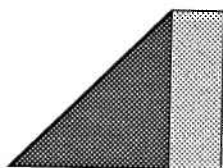
opp. driehoek = 0



opp driehoek = ?



opp. driehoek = 0



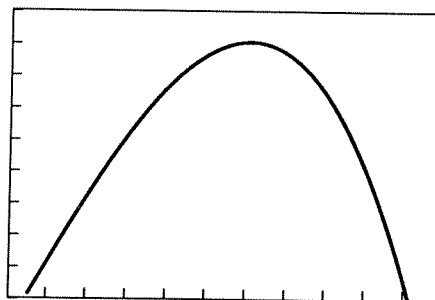
De opgave was: 'Wanneer is de oppervlakte van het driehoekje maximaal?'

Bijna elke groep begon het oplossen van het probleem met trial en error. De lengten van de rechthoekszijden werden afgelezen en vervolgens met 'basis maal halve hoogte' en de TI 81 werden de oppervlakten uitgerekend. Dankzij de TI 81 hoefde niet telkens de formule opnieuw ingetoetst te worden, maar slechts de waarden van basis en hoogte. Iedereen had al snel door dat de oppervlakte ergens rond de $x = 12$ maximaal moest zijn, maar met de methode van trial en error kon de exacte oppervlakte niet gevonden worden.

$0.5 \cdot 8 \cdot 8.9$	35.6
$0.5 \cdot 10 \cdot 8.1$	40.5
$0.5 \cdot 12 \cdot 7.6$	42.6
$0.5 \cdot 14 \cdot 5.8$	40.6

Er moest nagedacht worden en dat kostte wel wat moeite. Met Pythagoras en het inzicht dat de lengte van de schuine zijde samen met de lengte van de verticale rechthoekszijde 21 is (en soms een kleine hint), konden alle groepen aan het eind van het uur een formule opstellen voor de oppervlakte en vervolgens voor deze functie de grafiek tekenen. Met de trace-functie en de zoomfunctie kon tenslotte heel nauwkeurig het punt gevonden worden waar de grafiek van stijgen in dalen overging en z'n maximum had.

Uit dit voorbeeld wordt duidelijk dat met een relatief vervelende functie als: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot (10.5 - \frac{x^2}{42})$ gewerkt kan worden. Zonder functie-onderzoek en differentiëren lukt het om met behulp van de TI 81 een heel goede benadering van het maximum te vinden. Omdat de functie slechts betekenis heeft voor $0 \leq x \leq 21$ is snel duidelijk dat het maximum in dat gebied gezocht moet worden.



De grafiek van de gevraagde functie

Het tekenen van een grafiek van een dergelijke functie levert geen problemen. Vragen als 'Voor welke waarden van x heeft de functie betekenis' en 'Wat is de betekenis van de nulpunten' zijn in dit geval zeer zinnig.

Inpassing binnen het onderwijs

Bovenstaand voorbeeld is leuk en de TI 81 kan bij het oplossen van een probleem als een extra stuk gereedschap gebruikt worden. Het is echter een voorbeeld dat de docent zelf verzonnen heeft. De leerboeken spelen (nog) niet in op het gebruik van een grafische rekenmachine. En dat is jammer.

Met behulp van een grafische rekenmachine (bijvoorbeeld de TI 81) kun je veel van het reken- en tekenwerk snel doen. Het is geen probleem om zonder enige kennis van wiskundige zaken welke grafiek dan ook te tekenen en een goede benadering van het maximum te vinden. Maar ook matrixrekening en het rekenwerk binnen statistiek is zo gebeurd. Wat veel belangrijker wordt, is het wiskundige begrip, zodat je weet wat je aan het doen bent. Het gaat meer om het kiezen van de juiste methode, modelvorming, het kunnen interpreteren van de oplossing. En dit zijn juist kwaliteiten die je in het dagelijks leven zo vaak gebruikt.

Naast het snel rekenen en tekenen is een grafische rekenmachine op meer manieren bruikbaar in het onderwijs. Hij kan dienen als bron voor wiskunde (denk aan bijvoorbeeld continu-discreet) en ook lastigere wiskunde (denk aan bijvoorbeeld ingewikkelde formules) wordt toegankelijker.

Bij de TI 81 is bijvoorbeeld het kiezen van de juiste schaal heel belangrijk (zowel bij analytische grafieken als bij statistische grafieken) en is een plaatje maken van iets zo gebeurd (visualiseren werkt vaak verhelderend). De TI 81 is een mooi extra hulpmiddel maar is zeker nog niet het eindpunt van de technologische ontwikkelingen. Symbolisch differentiëren en integreren kan het apparaat niet (de HP 28S kan dit wel in beperkte mate). Steeds meer aspecten van computeralgebra zullen in de toekomst ook in de rekenmachinewereld doordringen.

Hoe lang nog?

De wiskundeles en de wiskundeboeken zouden er wel eens heel anders uit kunnen gaan zien als iedere leerling een grafische rekenmachine heeft. Stelt u zich voor dat u een klas heeft waarin alle leerlingen een TI 81 hebben en het onderwerp is 'transformeren van grafieken'. Het verschuiven van grafieken kunnen de leerlingen meteen uitvoeren, het wordt meteen zichtbaar. U geeft een van

de leerlingen de TI 81 die via een kabel met het LCD-scherm op de overheadprojector is verbonden. En de hele klas kan zien wat er gebeurt en elke leerling kan zijn oplossing vergelijken met die op de overhead.

Dit is al realiteit in de Verenigde Staten en hoe lang duurt het nog voordat we in Nederland een zelfde situatie hebben?

Een van de nog niet genoemde consequenties van de komst van de grafische rekenmachine is 'Hoe verandert het toetsen'. Zeker dit punt verdient de nodige aandacht. Met een verbod op het gebruik van dergelijke machines bij examens los je het probleem niet op.

In de Verenigde Staten zijn de grafische rekenmachines op de markt gekomen zonder dat het onderwijs, de toetsen en de leerboeken zijn veranderd en dat botst nu. Een actuele vraag in de VS is momenteel: 'Mogen leerlingen een grafische rekenmachine gebruiken bij toetsen als SAT en ACT?' [3]

In Nederland is de grafische rekenmachine nog geen gemeengoed. Wij hebben nu nog tijd om de gevolgen die de komst van de grafische rekenmachine met zich meebrengt te bekijken. Door de mogelijkheden (en de onmogelijkheden) van bijvoorbeeld een TI 81 op een rijtje te zetten, in de klas alvast uit te proberen wat er in de praktijk haalbaar is en materiaal te ontwikkelen dat wiskundeonderwijs koppelt aan het zinvol gebruiken van een grafische rekenmachine, kunnen we inspelen op de komst van de grafische rekenmachine.

Noten

- [1] Reeuwijk, M. van: *De Graphic Calculator*, Nieuwe Wiskrant 9-2, januari 1990.
- [2] Franklin Demana en Bert K. Waits zijn beiden hoogleraar wiskunde en zijn werkzaam bij 'Department of Mathematics' van de Ohio State University. Ze zaten ook in het organiserend comité van de 'Third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics'. De proceedings van deze conferentie zijn gepubliceerd door het Math. Department van de Ohio State University in Columbus, Ohio.
- [3] SAT en ACT zijn twee toetsen die door het vervolgonderwijs (College, University) als toelatingstest gebruikt worden. Veel High Schools gebruiken de toetsen echter ook als eindtoets.