

# Vloerbedekking met tegels van Penrose

N.G. de Bruijn

Faculteit Wiskunde en Informatica, TU Eindhoven

## Tegelbedekkingen

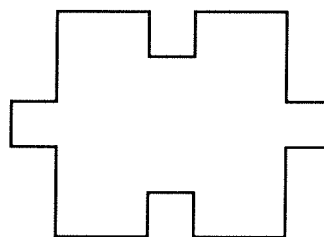
Sinds tientallen eeuwen hebben mensen er plezier in gehad om het platte vlak met tegels te bedekken (waarbij we het woord 'bedekken' de betekenis geven dat de tegels nergens gaten overlaten en elkaar nergens overlappen). En natuurlijk hadden zulke tegelbedekkingen niet alleen een esthetische, maar ook een praktische kant. Men bedekt straten en pleinen met tegels die in massa worden geproduceerd, en hetzelfde gebeurt tegenwoordig met vloeren in gebouwen, zowel waar het hout (parket) als tapijt betreft. Massaproductie van tegels is natuurlijk lastig als men veel verschillende typen van tegels moet leveren, en dat is gelukkig ook niet nodig. Men kan op eenvoudige wijze het vlak betegelen met oneindig veel kopieën van een zelfde tegel, en het simpelste is daarbij wel de vierkante tegel. Laten we daar even over nadenken.

Het is niet moeilijk in te zien dat een betegeling met gelijke vierkanten noodzakelijk tot oneindig lange stroken leidt. Elk van deze stroken is op triviale wijze betegeld, maar binnen elke strook kan men de tegels nog opschuiven zonder de andere stroken te verstoren. Een betegeling met gelijke vierkanten is dus wel periodiek in één richting, maar niet noodzakelijkerwijs in de richting loodrecht erop. Wat hier 'periodiciteit' betekent zal wel duidelijk zijn: het betekent dat de betegeling in zichzelf overgaat door een zekere verschuiving. In de richting van de stroken gaat dat eenvoudig door verschuiving over een afstand gelijk aan de zijden van het vierkant. In de richting loodrecht erop hoeft er, zoals gezegd, geen periodiciteit te zijn, maar zelfs als die er is, kan de periode groter zijn dan de zijden van het vierkant. Samenvattende: in één richting is periodiciteit geforceerd, in de andere richting is noch periodiciteit, noch aperiodiciteit geforceerd.

Het is niet moeilijk om eenheidstegels te ontwerpen die wél periodiciteit in beide richtingen forceren. Figuur 1 geeft daar een voorbeeld van. Nadat men één exemplaar ervan heeft neergelegd, is de positie van alle andere tegels volledig bepaald.

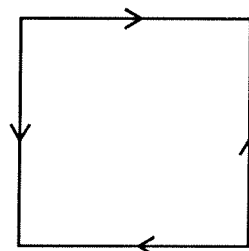
Het resultaat kan worden beschreven door uit te gaan van een oneindig schaakbord: op de witte velden legt men de tegels zoals getekend in figuur 1, maar bij de zwarte velden draait men ze over  $90^\circ$  voordat men ze neerlegt. Zowel horizontaal als verticaal is er periodiciteit (de periode is twee keer de lengte van de zijden van het vierkant).

We kunnen die uitstulpingen in de tegel van figuur 1 kwijtraken door elke zijde te vervangen door een zijde zonder uitstulping maar met pijl, zoals getekend in figuur 2.



Tegel die periodiciteit forceert

fig. 1



Uitstulpingen vervangen door pijlen

fig. 2

De overgang van figuur 2 naar figuur 1 wordt gemaakt door elke zijde een uitstulping te geven in de richting die als 'rechts' wordt ervaren wanneer men de zijde in de richting van de pijl doorloopt.

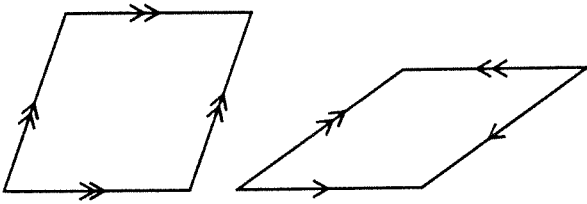
Het aan elkaar passen van de tegels van het type van figuur 2 dient zó te geschieden dat elk paar burens een gehele zijde gemeen hebben, en dat de pijlen langs die gemeenschappelijke zijde dezelfde richting hebben. Met deze pijlaanpassingsconditie krijgen we precies dezelfde aanlegmogelijkheden als bij de tegel van figuur 1. In

het vervolg zullen we het geregeld over zulke pijlaanpassingen hebben.

Wie zich voor tegelbedekkingen in het algemeen interesseert, zal veel materiaal vinden in het fraaie boek van Grünbaum en G.C. Shephard [5].

## Tegels die aperiodiciteit forceren

Omstreeks 1975 deed de Engelse mathematicus en theoretisch fysicus R. Penrose een merkwaardige ontdekking. Hij vond een tweetal figuurtjes met de eigenschap dat het vlak op oneindig veel verschillende manieren kan worden bedekt met kopieën ervan, zonder dat ook maar één van die bedekkingen periodiek is, zelfs niet periodiek in één richting.



De dikke en de dunne Penrose-ruit

fig. 3

In de eenvoudigste vorm zijn de tegels de dikke en de dunne ruit die in figuur 3 zijn weergegeven. De zijden hebben alle dezelfde lengte, en de hoeken zijn veelvoud van  $36^\circ$ : de scherpe hoeken van de dikke ruit zijn  $72^\circ$  en die van de dunne  $36^\circ$ . Er staan twee soorten pijlen op de zijden: enkele en dubbele. De aanpassingscondities zijn dat tegen elkaar aanliggende tegels een gehele zijde gemeen hebben, en dat ze langs de gemeenschappelijke zijde pijlen dragen van dezelfde soort en dezelfde richting.

Een bedekking van het gehele vlak met Penrose-ruiten, gelegd met inachtneming van de aanpassingscondities, zullen we een *Penrose-vloer* noemen. Figuur 4 laat een fragment van zo'n vloer zien. In deze figuur staan geen pijlen getekend, maar die zijn er gemakkelijk bij te maken door bij elk dik punt alle erheen lopende zijden een dubbele pijl in de richting van dat dikke punt te geven; de dunne pijlen kunnen vervolgens zó worden aangebracht dat we overal Penrose-ruiten krijgen.

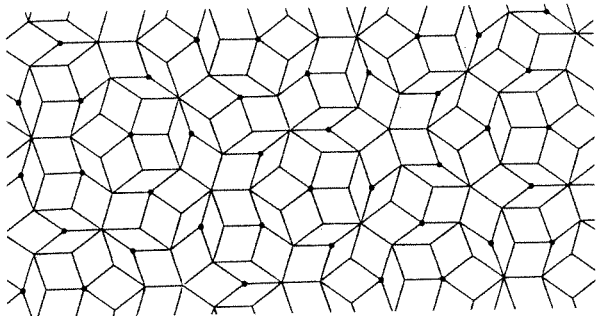


Fig. 4 – Fragment van een Penrose-vloer. In deze figuur zijn de pijlen niet aangegeven. Wel zijn alle punten waarop dubbele pijlen wijzen dik getekend, en daarmee liggen alle enkele en dubbele pijlen vast.

Het aantal mogelijkheden is zeer groot. Als we twee vloeren die door verschuiving en rotatie uit elkaar kunnen ontstaan als dezelfde rekenen, geldt nog dat de verzameling van alle mogelijkheden de machtigheid van het continuüm heeft, hetgeen wil zeggen dat die verzameling éénéénduidig kan worden afgebeeld op de verzameling der reële getallen.

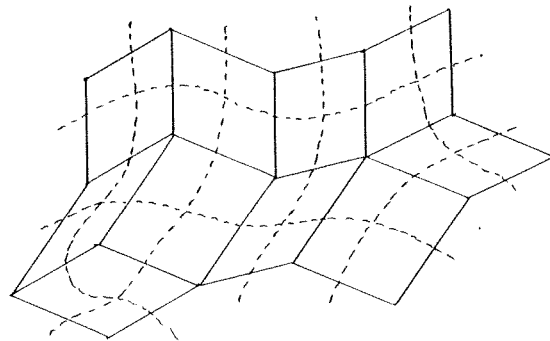
Zoals gezegd, is geen enkele van deze vloeren periodiek. Maar er is wel iets dat op periodiciteit lijkt: wanneer men een eindig fragment van één der oneindig vele Penrose-vloeren aanwijst, dan komt dat fragment oneindig vaak in die vloer voor. Maar sterker nog, datzelfde fragment komt ook in elke andere Penrose-vloer oneindig vaak voor.

Een flink deel van de resultaten uit de beginjaren is te danken aan de bekende wiskundige J.H. Conway, die destijds collega van Penrose in Cambridge was. Het een en ander kreeg bekendheid op grote schaal door het artikel [4] van Martin Gardner in *Scientific American*. Overigens schreef Martin Gardner onlangs dat de ontdekking van Penrose gelijktijdig en onafhankelijk gedaan was door de vindingrijke Amerikaanse programmeur R. Ammann.

Er loopt ook een draad van Escher naar Penrose. In 1954 werd in Amsterdam het internationale wiskundecongres gehouden, en één van de daarmee samenhangende evenementen was een grote tentoonstelling van het werk van Escher in het Stedelijk Museum. Penrose nam aan het congres deel en dat werd het begin van een geregeld contact met Escher. Ongetwijfeld zijn die contacten de bron geweest voor Penrose's voortdurende belangstelling in regelmatige vloerbedekkingen, en uiteindelijk tot zijn ontdekking van de Penrose-vloeren. Het is jammer dat Escher dat laatste niet meer heeft meegemaakt, want het zou koren op zijn molen geweest zijn.

## Bedekking met parallellogrammen

We gaan eerst eens naar een algemener soort vloerbedekking kijken: die met parallellogrammen zonder pijlen. Zulke bedekkingen zijn heel gemakkelijk te bestuderen door *dualisatie*. In figuur 5 zien we een fragment van zo'n bedekking. Daarbij is tevens (gestippeld) het *skelet* getekend, dat verkregen is door in elk der tegels de middens van overstaande zijden te verbinden.



Parallellogrambedekking met skelet

fig. 5

Bij een oneindige tegelvloer zal elke lijn van het skelet zich naar twee kanten in het oneindige uitstrekken en overal snijdingen vertonen met parallellogramzijden die alle dezelfde richting en dezelfde lengte hebben. Laten we die combinatie van richting en lengte maar even *ongerichte vector* noemen. Dus met elk der lijnen van het skelet is een ongerichte vector geassocieerd en met het snijpunt van twee skeletlijnen correspondeert een parallellogram, waarvan de vorm en oriëntatie is bepaald door de bij die skeletlijnen behorende ongerichte vectoren.

Wanneer we de parallellogrammen weghalen maar het skelet laten staan, kunnen we de oriëntatie van elk parallellogram weer terugvinden en uit het skelet wordt ons direct duidelijk wat de burens van elke tegel zijn. Dit geldt ook wanneer we het skelet eerst een beetje topologisch deformeren. Waar het alleen op aankomt is de *volgorde* waarin een skeletlijn door andere skeletlijnen gesneden wordt. Wanneer op elke skeletlijn deze volgorde is vastgelegd, kunnen we zeggen dat we de *topologie* van het skelet te pakken hebben.

De *plaats* van de tegels in het vlak is door die topologie niet bepaald, maar nadat we de plaats van één tegel gekozen hebben, ligt de plaats van alle andere vast.

Het is deze overgang van parallellogramtegelvloer naar skelettopologie en omgekeerd die *dualisatie* wordt genoemd.

We kunnen ook uitgaan van een skelet dat we niet eerst uit een tegelvloer hebben gekregen. We nemen een min of meer willekeurig stel krommen en leggen bij elk dezer krommen een ongerichte vector vast. Bij elk snijpunt krijgen we nu een parallellogram en die passen we aan elkaar. Het is een spelletje waar kinderen plezier in kunnen hebben: teken een stelletje kromme lijnen, geef bij elke lijn een ongerichte vector en maak dan een stuk tegelvloer.

Het gaat niet met elk willekeurig stel krommen, want er moet vermeden worden dat de tegels gaan overlappen. Als bijvoorbeeld twee skeletlijnen elkaar twee keer snijden, loopt het mis. En ook als er geen overlapping is, is het nog niet zeker of het oneindige vlak werkelijk helemaal bedekt zal worden. Maar in de voor ons belangrijke gevallen is het gelukkig wat eenvoudiger. In die gevallen is het skelet een zogenaamd *multigrad*: een superpositie van een eindig aantal roosters, waarbij elk rooster een verzameling van onderling evenwijdige lijnen is. Bovendien geldt bij elk rooster dat aan alle lijnen *dezelfde* ongerichte vector is toegevoegd. Voor een bewijs dat multigrads onder zekere voorwaarden inderdaad skeletten van tegelvloeren zijn, ook voor de analoge gevallen in meer dimensies, zij verwezen naar [2].

Het is duidelijk hoe we van parallellogrammen naar ruiten kunnen overgaan: door alle ongerichte vectoren een zelfde lengte te geven. En wanneer we alleen ruiten willen hebben waarvan de hoeken veelvoud van 360 zijn, kunnen we dat bereiken door de ongerichte vectoren onderling zulke hoeken te laten maken.

## Bedekking met Penrose-ruiten

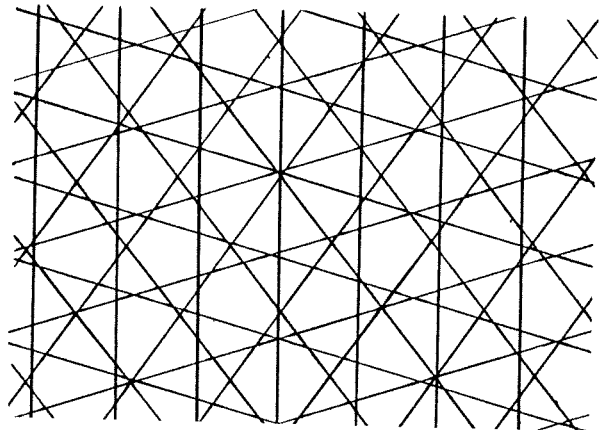
We beschikken nu over een proces waarmee we heel veel vloerbedekkingen met Penrose-tegels kunnen maken. We hebben het dan over de tegels van figuur 3 *zonder* pijlen. In het bijzonder zullen we uitgaan van een *pentagrid*, hetgeen verkregen wordt door superpositie van vijf roosters. Elk dezer roosters is een oneindig stel evenwijdige lijnen met onderlinge afstanden 1. Het eerste rooster is willekeurig te kiezen, het tweede krijgen we door het eerste over  $72^\circ$  te draaien en desgewenst nog evenwijdig te verschuiven. Uit dat tweede ontstaat het derde op dezelfde manier, enzovoort. En de ongerichte vector geven we bij elk der vijf roosters de richting loodrecht op de roosterlijnen en de lengte 1.

We kunnen pentagrids in het complexe vlak leggen en met formules beschrijven. We kiezen vijf reële getallen  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ . Voor  $j = 0, \dots, 4$  wordt het  $j$ -de rooster nu gegeven door:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z\zeta^{-j} + \gamma_j) \in \mathbb{Z}\}$$

waarin  $\zeta = e^{2\pi i/5}$  (dus  $\zeta^5 = 1$ ).

In figuur 6 staat een stuk van een pentagrid getekend.



Een fragment van een pentagrid

fig. 6

Er moet wat voorzichtigheid worden betracht met de zogenaamde *singuliere* pentagrids. Dat zijn de gevallen waarbij er ergens drie of meer roosterlijnen door een zelfde punt gaan. En dan is er nog een supersingulier geval waarbij ergens vijf roosterlijnen door een punt gaan (in wezen is dat alleen het geval  $\gamma_0 = \dots = \gamma_4 = 0$ ). Die singuliere gevallen zijn vervelend, omdat het dualisatieproces dan een beetje onbepaald is. We zullen ons daar maar niet in verdiepen.

Maar niet alle vloerbedekkingen die we krijgen door dualisatie van een pentagrid kunnen zodanig van enkele en dubbele pijlen worden voorzien dat alle tegels bepild raken op de wijze van figuur 3. Met enige moeite is af te leiden (vgl. [1], pp. 46-47) dat nodig en voldoende voor deze bepildbaarheid is dat de som  $\gamma_0 + \dots + \gamma_4$  een geheel getal is.

Het omgekeerde is ook waar: elke Penrose-vloer is te krijgen door dualisatie van een pentagrid. Maar dat kost heel wat meer inspanning. De zogenaamde deflatie en

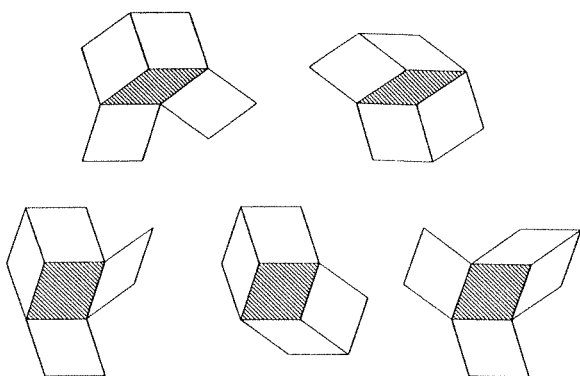
inflatie spelen er een rol bij (zie [1], pp. 63-64). En er moet natuurlijk nog wat extra aandacht worden besteed aan de singuliere gevallen.

Met de kennis over voortbrenging door middel van pentagrids is natuurlijk heel veel over Penrose-vloeren te weten te komen. Men kan bijvoorbeeld de aperiodiciteit van de Penrose-vloeren afleiden uit het feit dat de pentagrids niet-periodieke figuren zijn, hetgeen kan worden ingezien door te gebruiken dat de goniometrische verhoudingen van  $36^\circ$  en  $72^\circ$  irrationale getallen zijn. En de pentagrid-methode geeft direct toegang tot Fouriertheorie over Penrose-vloeren.

Velen hebben zich laten fascineren door de mogelijkheid (die vanuit de pentagrid-methode kan worden ingezien) om de tweedimensionale Penrose-vloeren te krijgen door projectie van een moot gesneden uit een vijfdimensionaal gewoon kubisch rooster.

Er is nog een heel andere manier om over de begijpbaarheid te praten, geheel onafhankelijk van de pentagrids. We gaan uit van een willekeurige bedekking van het vlak met onbegijpde Penrose-ruiten. De vraag wordt weer gesteld of er enkele en dubbele pijlen kunnen worden aangebracht zodanig dat alle tegels een van de twee vormen uit figuur 3 hebben. Er is een verrassend eenvoudig antwoord in de vorm van een nodig en voldoende voorwaarde van lokale aard. Bij elke ruit kijken we naar de figuur die met de vier directe burens gevormd wordt. Als de vloer begijpbaar is, is deze figuur gelijk aan één van de vormen die uit de plaatjes van figuur 7 ontstaan door spiegeling en draaiing. En omgekeerd, als elke ruit van de vloer met de burens één van deze figuren vormt, is de vloer begijpbaar.

Dit resultaat is zonder enige theoretische kennis af te leiden, door eenvoudig puzzelwerk.



Toegelaten buurtschappen

fig. 7

## Quasi-kristallen

Dat de pentagrid-methode, berustende op weinig meer dan de zo simpele topologische dualisatie, in allerlei richtingen kan worden gegeneraliseerd, ook in meer dimensies, behoeft geen verwondering te wekken. Maar ècht wonderlijk is het feit dat, kort nadat door kristallografen (zie [6]) de theoretische mogelijkheid van een

nieuwe kristalachtige vorm van vaste stof was geopperd, zo iets ook werkelijk in het laboratorium werd gemaakt (zie [7]). Men spreekt sindsdien over *quasikristallen*.

De ontdekking van deze quasikristallen was een soort revolutie in de kristallografie. Sinds jaar en dag waren alle kristalklassen bekend, en daarbij was bewezen dat hoeken van  $36^\circ$  en  $72^\circ$  niet konden voorkomen. Maar die klassieke kristallografie had altijd *periodiciteit* als eis gesteld. En nu kwamen er plotseling structuren die veel eigenschappen met kristallen gemeen hadden en kennelijk niet meer tot de periodieke konden worden gerekend.

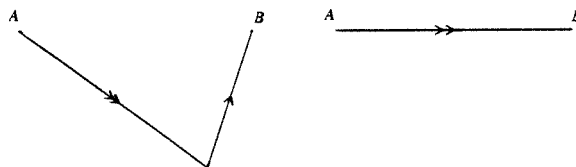
Een sterk punt is dat de structuren die door dualisatie van multigrids ontstaan, direct toegang geven tot Fouriertheorie. Daarmee is af te leiden dat Röntgen-diffractie hetzelfde soort beelden oplevert als bij gewone kristallen.

## Het trucje van Escher

Na deze algemene uiteenzettingen keren we tot de gewone Penrose-vloeren terug, en zullen we, zonder gebruik te maken van dualisatie, vertellen wat Escher daarmee te maken heeft.

Escher heeft veelvuldig een trucje gebruikt dat ik naar hem zal noemen, al zal het wel veel eerder door anderen zijn toegepast. We zagen het feitelijk al in de relatie tussen figuur 1 en figuur 2. We beschrijven de truc nu even voor het geval van de Penrose-vloeren. Daarbij nemen we aan dat de zijden van alle ruiten de lengte 1 hebben. We nemen twee punten  $A$  en  $B$  met onderlinge afstand 1, en tekenen de een of andere kromlijnige of stuksgewijs rechtlijnige verbinding. Deze verbinding van  $A$  naar  $B$  noemen we  $E_1$ . En we maken een tweede verbinding  $E_2$  van  $A$  naar  $B$ . We gaan daarmee de Penrose-vloer te lijf. Bij elke zijde  $PQ$  waarbij er een enkele pijl is van  $P$  naar  $Q$ , vervangen we die zijde door een kopie van  $E_1$  (ook lopende van  $P$  naar  $Q$ ). En bij elke zijde met een dubbele pijl doen we hetzelfde met  $E_2$ . Escher deed dit bij voorkeur zó dat er allerlei gedierte ontstond. In ons geval komen er twee diersoorten te voorschijn, die uit de dikke en de dunne ruit van figuur 3 ontstaan als we de enkele pijlen door  $E_1$  en de dubbele door  $E_2$  vervangen.

We moeten wèl oppassen dat de figuren  $E_1$  en  $E_2$  niet al te veel van de rechte baan afwijken, want er is kans dat er overlappings van de dieren ontstaat.

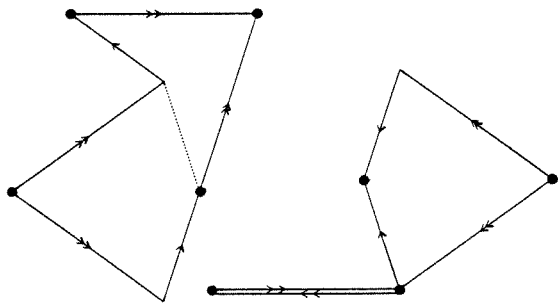


Deze  $E_1$  en  $E_2$  leiden tot kites en darts

fig. 8

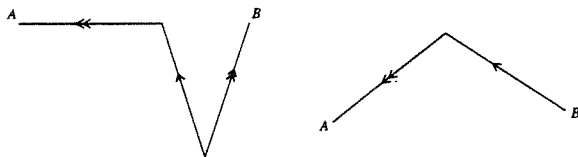
Een eenvoudig voorbeeld is gegeven in figuur 8; de figuren  $E_1$  en  $E_2$  bestaan hier uit lijnstukken die zelf ook weer van enkele en dubbele pijlen zijn voorzien (waarbij

weer van enkele en dubbele pijlen zijn voorzien (waarbij  $E_2$  nogal simpel is: het is de oude dubbele pijl zelf). En in figuur 9 staan de 'dieren' die uit de dikke, respectievelijk dunne ruit ontstaan, door hiermee de truc van Escher toe te passen. De hoekpunten van de oorspronkelijke dikke en dunne ruit zijn hier dik getekend. De dikke ruit gaat over in een soort paard, de dunne in een vlieger (met een staart op een verkeerde plaats). We kunnen het paard volgens de stippelijntje verdelen in een vlieger (de 'kite') en een dikke pijl (de 'dart'). Op deze manier krijgen we een vloerbedekking met kites en darts, en die voldoet weer aan de aanpassingscondities, nu met de nieuwe pijlen. De staartjes worden min of meer onzichtbaar, want ze verdwijnen tussen de andere stukjes.

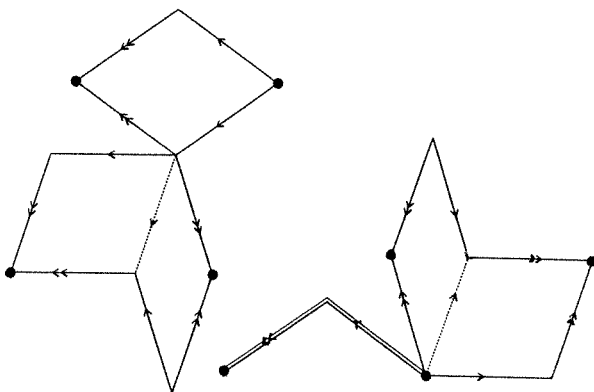


Toepassing van de  $E_1$  en  $E_2$  van figuur 8 fig. 9

Overigens kan men ook van een tegelvloer met kites en darts met een Eschertruc weer naar een tegelvloer met Penrose-ruiten overgaan.



Deze  $E_1$  en  $E_2$  leiden tot de deflatie fig. 10



Toepassing van de  $E_1$  en  $E_2$  van figuur 10 fig. 11

Een andere toepassing van de truc is gegeven in figuur 10. Deze leidt tot figuur 11 (waarin de hoekpunten van de oorspronkelijke dikke en dunne ruit weer dik zijn getekend) en het grappige is dat nu weer Penrose-ruiten ontstaan, met de pijlen zoals het hoort. Alleen zijn de afme-

tingen kleiner: ten opzichte van de oorspronkelijke zijn ze vermenigvuldigd met het gulden-reden getal  $(-1 + \sqrt{5})/2$ . Op deze manier construeren we uit een Penrose-vloer een geheel nieuwe, met kleinere tegels. De overgang van de oude naar de nieuwe wordt 'deflatie' genoemd. Het omgekeerde geldt ook: elke Penrose-vloer is de deflatie van een andere (met grotere tegels). Voor een wat uitvoeriger beschrijving daarvan zij verwezen naar [3].

De deflatie en inflatie hebben een grote rol gespeeld in de theorie van de Penrose-vloeren. In het bijzonder zij hier vermeld dat de 'updown generation' erop berust. Dat is een proces dat op geen enkele manier lijkt op de eerder genoemde productie door middel van dualisatie, en dat niettemin ook alle Penrose-vloeren oplevert. Het proces staat beschreven in [3], alsook een manier om het met de pentagrids in verband te brengen.

### De stangen van Ammann

Laat ons de dikke Penrose-ruit als een biljarttafel beschouwen. Het is op verschillende manieren mogelijk een biljartbal daarop een baan te geven, die na een eindig aantal keren stuiten, in zichzelf terugkeert. Hetzelfde doen we met de dunne Penrose-ruit. Het is ons er nu om te doen, die banen zodanig te kiezen dat de enkele pijlen in de dunne zowel als in de dikke ruit op dezelfde plaatsen worden geraakt, en zó dat in corresponderende punten de hoeken waaronder de wand wordt getroffen, met elkaar overeenstemmen. En bovendien verlangen we dat het overeenkomstige het geval is met de dubbele pijlen (maar daar mogen de afstanden en hoeken anders zijn dan bij de enkele).

De bepijlde dikke ruit heeft de lange diagonaal als symmetrie-as, en de dunne de korte diagonaal. We nemen biljartbanen met diezelfde symmetrie en daarom zijn in figuur 12 alleen de halve dikke ruit en de halve dunne ruit getekend (ook voor andere doeleinden, zoals de inflatie en deflatie, is het werken met de halve ruiten prettiger, zie bijvoorbeeld [3]).

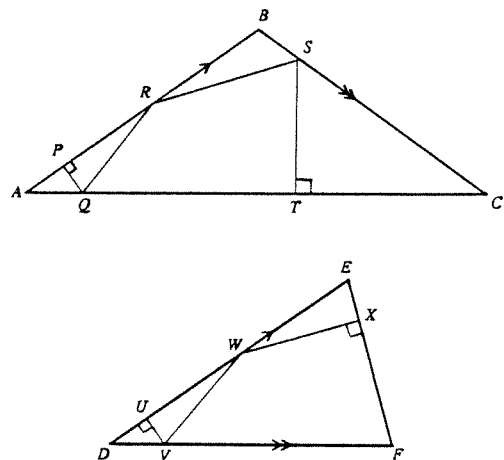


Fig. 12 – Banen van een biljartbal op de halve dikke en de halve dunne ruit

De voorwaarden waaraan de afstanden in deze figuur moeten voldoen zijn:  $AP = DU$ ,  $PR = UW$  en  $DV = BS$ . De tweede voorwaarde is een direct gevolg van de eerste en de derde is met een klein beetje spiegelmeetkunde constructief te realiseren (maar het kan natuurlijk ook gewoon worden uitgerekend).

We nemen nu een willekeurige Penrose-vloer en tekenen de genoemde banen in elke dikke en elke dunne ruit. Het wonder is geschied: tengevolge van de regel dat bij botsing de invalshoek gelijk is aan de uitgangshoek, rijgen de rechthoekige stukken van de biljartbanen zich aan een tot oneindig lange rechte lijnen. Dit worden de Ammann-stangen ('Ammann bars') genoemd.

De figuur van de Ammann-stangen lijkt op een pentagrid: vijf stellen evenwijdige rechten die onderling hoeken maken die veelvouden van  $72^\circ$  zijn. Maar de Ammann-stangen zijn niet equidistant: er treden twee verschillende afstanden bij op. En een ander karakteristiek verschil is het volgende. Een pentagrid verdeelt het vlak in convexe veelhoeken (de 'mazen'), waarbij er zeer kleine kunnen voorkomen. Bij elke willekeurige  $\epsilon$  kan men een veelhoekje vinden met doorsnede kleiner dan die  $\epsilon$ . Bij de Ammann-stangen daarentegen komen de mazen in slechts eindig veel verschillende vormen voor. Er is nog iets merkwaardigs: dualisatie van de figuur gevormd door de Ammann-stangen levert (op schaalvergroting na) precies de deflatie van onze Penrose-vloer op. Dit betekent dat het skelet van een Penrose-vloer topologisch equivalent is met twee geheel verschillende rechthoekige systemen: een pentagrid en een Ammann-figuur.

Dat de duale van de Ammann-figuur juist die deflatie is, kan men inzien met behulp van figuur 13, waarin de Ammann-stangen een beetje verbogen zijn en de hoekpunten van de deflatie dik zijn getekend. Wanneer men deze verbogen stangen in alle ruiten van onze Penrose-vloer tekent, ziet men dat in elke maas precies één hoekpunt van de deflatie ligt.

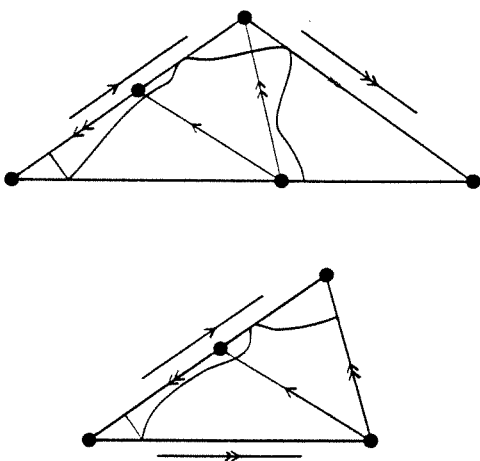


Fig. 13 – Verbogen Ammann-stangen. De hoekpunten van de deflatie zijn dik aangegeven. De pijlen van de oorspronkelijke Penrose-vloer staan buitenop, die van de deflatie binnenin.

Dat laatste is niet een eis die bij het begrip dualisatie wordt gesteld, maar maakt het gemakkelijk in te zien dat de verbogen stangen het skelet vormen.

## Goudmijn

Het gebied van de Penrose-vloeren en meer in het algemeen de quasikristallen is voor wiskundigen een goudmijn, in het bijzonder voor degenen die graag verschillende stukken van de wiskunde met elkaar verbinden. Het volgende bonte lijstje van onderwerpen die erbij te pas komen diene als illustratie. Elementaire meetkunde, combinatoriek, algebra en getallentheorie (onder andere idealen, Diophantische approximaties), lineaire algebra, meerdimensionale meetkunde en topologie, ruimtegroepen, een goocheltruc met speelkaarten, analyse (onder andere Fouriertheorie, gegeneraliseerde functies), herschrijfsystemen en tenslotte computerwerk (verbonden aan experimenteel onderzoek, al dan niet gekoppeld aan tekenwerk).

Maar je hoeft niet alles te weten om eraan mee te kunnen doen. Voor elke klasse van leeftijd of wiskundige ontwikkeling is er wat te leren of te ontdekken.

## Literatuur

- [1] Bruijn, N.G. de: *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane*, Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 84 (= *Indagationes Mathematicae* 43), pp. 38–52 en pp. 53–66, 1981.
- [2] Bruijn, N.G. de: *Dualization of multigrids*. In: *Proceedings of the International Workshop Aperiodic Crystals*, Les Houches 1986. *Journal de Physique*, Vol. 47, Colloque C3, supplement to nr. 7, juli 1986, pp. 9–18.
- [3] Bruijn, N.G. de: *Updown generation of Penrose patterns* *Indagationes Mathematicae*, N.S., 1, pp. 201–219, 1990.
- [4] Gardner, M.: *Mathematical games. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, *Scientific American* 236 (1) pp. 110–121, januari 1977.
- [5] Grünbaum, B. en G.C. Shephard: *Tilings and patterns*, New York, W.H. Freeman & Co., 1986.
- [6] Kramer, P. en R. Neri: *On periodic and non-periodic space fillings of  $E^m$  obtained by projection*, *Acta Cryst. A* 40, pp. 580–587, 1984.
- [7] Shechtman, D., I. Blech, D. Gratias en J.W. Cahn: *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, *Physical Review Letters*, Vol. 53 (20), pp. 1951–1953, 1984.

## Noot

Dit artikel is de schriftelijke weergave van een voordracht gehouden op het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap, 5 januari 1991 te Amersfoort.