Computeralgebra en wiskundeonderwijs

P. Drijvers [1]
OW&OC, RU Utrecht

Inleiding

Onder wiskundeleraren en lerarenopleiders is een zekere onrust ontstaan. Het gerucht gaat dat er software ontwikkeld is waarmee een leerling zonder grote problemen het examen wiskunde B van het vwo kan maken! Het zou gaan om een eenvoudig te bedienen programma dat niet benadert, maar exacte uitkomsten genereert. Differentiëren en integreren bijvoorbeeld zijn kinderspel. Limietrekening en onderzoek van continuïteit zijn teruggebracht tot enkele toetsaanslagen. Wat moeten we de leerlingen nog leren? Wat te doen als zoiets op de zakcomputer beschikbaar komt, wat binnen enkele jaren te verwachten valt?
Gedoeld wordt waarschijnlijk op Derive, een klein Computer Algebra Systeem dat inmiddels een redelijke verspreiding heeft gekregen. Het gaat hier om een ontwikkeling in wiskunde-software die naar mijn mening grote gevolgen voor de onderwijspraktijk zal hebben.

In dit artikel wordt eerst globaal beschreven wat een Computer Algebra Systeem is en wat het kan. Dan komt Derive als voorbeeld van een Computer Algebra Systeem aan de orde. Na enkele opmerkingen over de rol van computeralgebra in het wiskundeonderwijs volgt een voorbeeld van het gebruik van zo'n pakket in de les. Dan worden ervaringen met Derive in de klas besproken en tot slot volgen enkele conclusies.

Wat is een Computer Algebra Systeem?

De computer kan in de wiskundeles goede diensten bewijzen door snel grafieken te tekenen. Met een programma als VU-Grafiek kunnen leerling en leraar zonder veel moeite mooie plaatjes op het scherm toveren. Daarnaast kan de computer ingezet worden bij omvangrijke berekeningen. Te denken valt bijvoorbeeld aan VU-Dynamo als het gaat om stelsels differentievergelijkingen. De uitkomsten zijn in het algemeen slechts benaderingen, omdat afrondfouten een rol zullen spelen.

Het kenmerk van een Computer Algebra Systeem is dat het programma behalve als tekenaar en als numeriek rekenaar ook als symbolisch rekenaar kan functioneren. Dat betekent dat met variabelen gerekend kan worden en dat men formules kan manipuleren. Maar het systeem kan ook op 'analytische' wijze een primitieve functie bepalen die eruit ziet zoals u van uw leerlingen zou verlangen, of het kan een exacte oplossing van een vergelijking geven, waar de gewone rekenmachine niet verder zou komen dan een benadering!

Een Computer Algebra Systeem is dus te beschouwen als een pakket dat over een groot repertoire aan wiskundige algoritmen beschikt die van symbolisch/algebraische en van numerieke aard kunnen zijn.

In het algemeen kenmerkt een Computer Algebra Systeem zich door een (relatief) eenvoudige bediening en een grote gebruikersvriendelijkheid. De dialoog met het systeem vindt interactief plaats, dus het gebruik vereist geen programmeervaardigheden.

Wat kan een Computer Algebra Systeem?

Hoewel de opsomming verre van volledig is, geven de volgende kreten een indruk van de mogelijkheden van een Computer Algebra Systeem.

Rationaal rekenen
Het exact rekenen met breuken.
Bijvoorbeeld: $\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ en niet 0.333333.

Letterrekenen
Bijvoorbeeld: $\dfrac{a \cdot b \cdot c \cdot a \cdot b}{c} = a^2 . b^2$ als $c \neq 0$.

Manipuleren met formules
Vereenvoudigen, ontbinden in factoren, breuksplitsen enzovoort.
Bijvoorbeeld: $2 . \sin(x) . \cos(x) = \sin(2x)$
of: $\dfrac{x^2}{(x^2+1)} = 1 - \dfrac{1}{(x^2+1)}$

Oplossen van (stelsels van) vergelijkingen
Bijvoorbeeld: als $x^4 = 4 . a^2$ dan $x = \pm\sqrt{2} . \sqrt{|a|}$

Differentiëren, integreren, limieten, continuïteit, reeksen, differentiaalvergelijkingen, Taylor

Bijvoorbeeld: $\frac{d}{dx}(2^{ax}) = a \cdot 2^{ax} \cdot \ln(2)$

Rekenen met vectoren en matrices

Bijvoorbeeld: $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix}$

Aan dit lijstje is te zien dat het niet alleen om onderwerpen uit de algebra gaat. De naam Computer Algebra Systeem kan dan ook wat misleidend lijken, maar is wel gebruikelijk. Verder is het inderdaad zo dat afgezien van de ruimtemeetkunde het vwo-examen wiskunde B geen probleem is voor wie over een Computer Algebra Systeem beschikt. Ook bij wiskunde A kan een dergelijk pakket goede diensten bewijzen.

Derive

Er zijn vele Computer Algebra Systemen. In de herfst van 1990 heb ik geïnventariseerd welke pakketten men op de universiteiten en de lerarenopleidingen in Nederland voor onderwijsdoeleinden gebruikt. Op universiteiten blijken dat met name Maple en Mathematica te zijn. Bij de lerarenopleidingen wordt meestal Derive genoemd als systeem dat wordt gebruikt of dat men in de toekomst wil gaan gebruiken. Op Derive wil ik wat nader ingaan.
Derive is in wiskundig opzicht de benjamin onder de Computer Algebra Systemen. Voor ingewikkelde wetenschappelijke toepassingen kan het pakket te zwak blijken. Voor het onderwijs is dit echter nauwelijks een bezwaar. Daar staat tegenover dat Derive over enkele belangrijke troeven beschikt. Ten eerste is het menugestuurd, waardoor een beginnende gebruiker snel met het systeem uit de voeten kan. Ten tweede stelt het in tegenstelling tot andere systemen geen grote eisen aan de hardware: op een gewone IBM XT machine draait Derive uitstekend, zelfs zonder dat een harde schijf nodig is. Een derde positief punt is de lage prijs [2].
Derive kan zowel symbolisch/algebraïsch als numeriek/benaderend rekenen. Daarnaast heeft het een grafisch deel waarmee twee- en driedimensionale grafieken getekend kunnen worden.

Een voorbeeld

We illustreren een en ander met een voorbeeld. De vragen 1 en 2 van het vwo B-examen van 1990 (eerste tijdvak):

Opgave 1

Gegeven is de functie $f: x \rightarrow \dfrac{3\cos x}{2+\sin x}$ *met domein* $[-\pi, \pi]$.
Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy is K de grafiek van f.

1. *Onderzoek f en teken K.*
2. *Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door K en de x-as.*

Een gedeelte van een uitwerking met Derive:

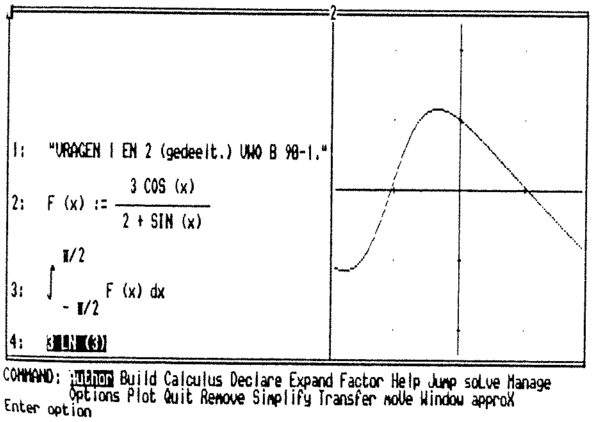

fig. 1

Laten we eens nalopen hoe de linkerhelft van het scherm in dialoog met Derive tot stand komt. Onder in beeld ziet u een hoofdmenu van twee regels, waarvan de eerste begint met COMMAND. Net als in een spreadsheet kan men een commando geven door de hoofdletter in te typen. Een tweede manier is om het gewenste commando met de pijltjestoetsen 'aan te wijzen' en dan op de returntoets te drukken. Het commando 'Author' geeft de mogelijkheid tot invoer. Om de titel te krijgen die u in regel 1 ziet, drukken we dus op de A van Author en we typen de gewenste tekst in. Omdat het een commentaarregel is, beginnen we met een dubbel aanhalingsteken. Derive weet dan dat het om tekst gaat en niet om een formule. Ook de tweede regel komt met het commando Author tot stand. Zo mooi als het functievoorschrift op het scherm komt, kan het helaas niet ingevoerd worden: er is maar één invoerregel, dus er moet met haakjes gewerkt worden.
Het eigenlijke functieonderzoek is niet afgebeeld. Laten we aannemen dat dat al gedaan is en dat de nulpunten door Derive berekend zijn.
In de derde regel wordt de integraal ingevoerd. De keuze C (Calculus) geeft een submenu, waaruit de optie I (Integrate) gekozen is. Derive vraagt om de integrand, waarop we intypen: F(x). Vervolgens worden de integratiegrenzen ingevoerd. Door op alt-p te drukken krijgen we π op het scherm.
In de vierde regel laten we de integraal van regel 3 berekenen door op de S van Simplify te drukken. Merk op dat de uitkomst exact is!

Computeralgebra in de wiskundeles

Vanwege de symbolische en exacte mogelijkheden is een Computer Algebra Systeem zeer geschikt voor gebruik in het wiskundeonderwijs. Het is een open instrumentele leeromgeving die op veel plaatsen van het hui-

dige curriculum een rol kan spelen.
Hoewel op dit moment de algebraïsche mogelijkheden van de Graphic Calculator [3] nog zeer beperkt zijn, zal gezien de technische ontwikkeling in de nabije toekomst computeralgebra ook in de vorm van een symbolische zakcomputer beschikbaar zijn. Daarmee is de intrede in het wiskundeonderwijs onvermijdelijk.
De vraag is echter op welke manier computeralgebra een zinvolle bijdrage aan het wiskundeonderwijs kan leveren. Als zo'n pakket alle antwoorden geeft, welke vragen moeten we dan nog stellen? Wat zullen de gevolgen zijn voor didactiek, curriculum en examen? Om niet door een technologische ontwikkeling overvallen te worden is het van belang dat op korte termijn op deze vragen een antwoord gezocht wordt. Dit zeker nu het examenprogramma voor wiskunde B van het vwo toch al onder druk staat.

Computeralgebra kan op diverse manieren een rol spelen in de wiskundeles.
Ten eerste kan het gebruikt worden als ondersteuning binnen het huidige curriculum. Het systeem kan grafieken tekenen en behulpzaam zijn bij demonstraties of bij het controleren van antwoorden.
Ten tweede verwacht ik dat bij veelvuldig gebruik van computeralgebra een accentverschuiving zal optreden. De wat meer algoritmische vaardigheden zullen minder belangrijk worden omdat die beter aan een Computer Algebra Systeem overgelaten kunnen worden. Meer aandacht zal nodig zijn voor vaardigheden als het mathematiseren van een realistisch probleem, het interpreteren van antwoorden en het zelf uitvoeren van wiskundige experimenten.
Ten derde zal computeralgebra op iets langere termijn leiden tot veranderingen in het eindexamen en het curriculum. Door de reductie van algebraïsch rekenwerk komen nieuwe onderwerpen binnen het bereik van de havo- of vwo-leerling. Daarentegen zullen andere onderwerpen hun belang verliezen onder invloed van de nieuwe hulpmiddelen.

Inleiding differentiëren

In de Verenigde Staten heeft men al wat ervaring met het gebruik van Derive in de klas [4]. Ook bij OW&OC wordt lesmateriaal bij Derive gemaakt en uitgeprobeerd. Daaruit volgt nu een voorbeeld.

Veronderstel dat de leerlingen van vwo-4 nog niet kunnen differentiëren. Derive wordt gebruikt om het idee 'raaklijn als limiet van snijlijn' te versterken. Daarnaast kunnen leerlingen zelf een voorschrift van de afgeleide functie ontdekken.
Wat na het opstarten op de monitor verschijnt, ziet u in figuur 2.
In eerste instantie gaat het om de richtingscoëfficiënt en de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $F: x \rightarrow x^3 - 3x$ in het punt (1, –2). Door waarden voor h

```
7:  "SNIJLIJNEN EN RAAKLIJNEN"
8:  "inleidend praktikum differentiëren"
                3
9:  F (x) :- x  - 3 x
10: a :- 1
11: "De volgende procedure berekent het differentiequotiënt"
12: "volgens de formule (F(a+h) - F(a))/h:"
13: DIFFERENTIEQUOTIENT (h)
14: "De volgende procedure berekent de vergelijking"
15: "van de snijlijn door de punten (a,F(a)) en (a+h,F(a+h)):"
16: SNIJLIJN (h)
```

fig. 2

in te vullen in de regels 13 en 16, kunnen leerlingen richtingscoëfficiënten en vergelijkingen van snijlijnen vinden. Met de hand wordt een en ander nagerekend en Derive tekent de grafieken. Een kleine waarde voor h ondersteunt het vermoeden van een horizontale raaklijn. Het scherm zou er dan zó uit kunnen zien:

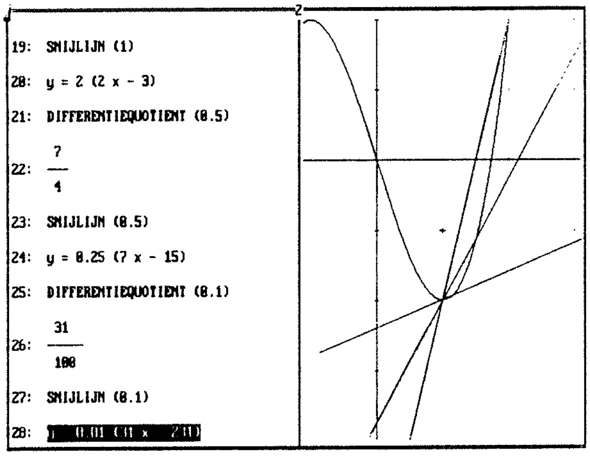

fig. 3

Nu worden de algebraïsche kwaliteiten van Derive aangesproken. Door regels 13 en 16 te vereenvoudigen zonder eerst een waarde voor h in te vullen, vindt de leerling de richtingscoëfficiënt en de vergelijking van de snijlijn uitgedrukt in h. Door nu de limiet voor h nadert tot 0 te nemen berekent Derive de richtingscoëfficiënt en de vergelijking van de raaklijn.

```
13: DIFFERENTIEQUOTIENT (h)
14: h (h + 3)
15: lim  h (h + 3)
    h→0
16: 0
17: SNIJLIJN (h)
                           2
18: y = h x (h + 3) - h  - 3 h - 2
                                2
19: lim  (y - h x (h + 3) - h  - 3 h - 2)
    h→0
20: y = -2
```

fig. 4

Nu wordt deze procedure herhaald voor het punt $(a, F(a))$. De richtingscoëfficiënt van de raaklijn blijkt dan gelijk te zijn aan $3a^2 - 3$, waarmee de afgeleide functie gevonden is.

13: DIFFERENTIEQUOTIENT (h)

14: $3 a^2 + 3 a h + h^2 - 3$

15: $\lim\limits_{h0} (3 a^2 + 3 a h + h^2 - 3)$

16: $3 a^2 - 3$

17: "De raaklijn:"

18: $\lim\limits_{h0} (y = x (3 a^2 + 3 a h + h^2 - 3) - a (2 a^2 + 3 a h + h^2))$

19: $y = x (3 a^2 - 3) - 2 a^3$

fig. 5

Door in regel 9 (zie figuur 2) het functievoorschrift te wijzigen, kan de leerling van elke gewenste functie de afgeleide bepalen als limiet van het differentiequotiënt. Zo kan de regel voor het differentiëren van machtsfuncties zelf ontdekt worden.

Ervaringen met Derive in de klas

Gedurende dit schooljaar is op bescheiden schaal geëxperimenteerd met Derive in de klas. Met name in vijf vwo (wiskunde B) van het Dukenburgcollege in Nijmegen zijn practica uitgeprobeerd.
De volgende tendensen tekenen zich af:

- De bediening van Derive is geen groot probleem. Na een kennismakingspracticum van één of twee lesuren kunnen leerlingen zich in het algemeen verbazend goed en snel redden.
- Derive prikkelt leerlingen tot experimenteren met ingewikkelde functies en grafieken. Dat is een positief aspect, al bleek het soms lastig om de leerlingen bij het onderwerp van het practicum te houden.
- Leerlingen reflecteren niet vanzelf over wat ze met Derive doen. Ze nemen weinig afstand en gaan snel door naar het volgende. De docent zal ze dus tot 'bezinning' moeten aanzetten, eventueel via de practicumhandleiding of een antwoordblad. Overigens speelt dit punt ook een rol bij het traditionele sommenmaken.
- Het is voor een zinvolle inpassing van belang dat de juiste practica op het juiste moment aan bod komen. Vanwege roostertechnische redenen was dat bij de experimenten niet altijd mogelijk. Daardoor verloren de practica soms aan relevantie.

Conclusie

Waar het om gaat in het onderwijs is het leren van wiskunde. Naar mijn mening biedt computeralgebra mogelijkheden om de wiskundeles te verrijken. Met name in de richting van probleemoplossen en het zelf experimenteren liggen kansen. Het inpassen van een pakket als Derive in de huidige situatie is echter geen eenvoudige zaak.

De komst van computeralgebra brengt ook risico's met zich mee. Het voornaamste gevaar is het negeren van de ontwikkeling. Ten tweede bestaat de verleiding om, nu de algoritmen minder relevant worden, te concentreren op concepten, begrip en abstractie. Daarmee zou het vak voor een grote groep leerlingen veel moeilijker worden.

Noten

[1] De auteur voert bij de vakgroep OW&OC van de Rijksuniversiteit Utrecht een project uit met de titel *Computeralgebra in de bovenbouw van het V.O.* In dit vooronderzoek worden de gevolgen van de ontwikkeling van Computer Algebra Systemen voor inhoud en didactiek van het wiskundeonderwijs onderzocht door het ontwikkelen van lesmateriaal en het uitvoeren van schoolexperimenten op kleine schaal. Het ligt in de bedoeling dat dit onderzoek op grotere schaal een vervolg krijgt.

[2] Derive wordt in Nederland onder andere geleverd door het Expertisecentrum Computer Algebra Nederland. Dit is een stichting die met steun van onder andere de overheid, Surf en NWO het gebruik van Computer Algebra Systemen in onderwijs en onderzoek stimuleert en coördineert.
Het adres is:
Expertisecentrum Computer Algebra Nederland, Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam.

[3] Reeuwijk, M. van: *Een zakcomputer voor iedere leerling*, De Nieuwe Wiskrant, jrg. 10, nr. 3, 1991.

[4] Gilligan, L.G. , J.F. Marquardt Sr.: *Calculus and the Derive program: experiments with the computer Math Ware*, Urbana, U.S.A., 1990.