Wiskunde B-leerlingen, formule-gericht?

J.A. Jansen
Strabrecht College, Geldrop

In de wetenschap-bijlage van de Volkskrant verschijnt zo nu en dan een rubriek met de naam *Prompt* van Jan Jacobs.
In het artikel van 26 januari 1991 worstelt Jacobs met het volgende probleem:

> Het lijkt heel simpel. Je hebt rijksdaalders, guldens en kwartjes. Maak daarvan nu een combinatie van in totaal honderd munten die samen ook honderd gulden zijn. Een oplossing zag ik al meteen, maar ik vroeg me toen al direct af hoeveel goede oplossingen er voor dit probleem zijn en hoe je die vindt. Nee, honderd guldens mag niet!

Met behulp van een nieuwe spreadsheet probeert hij dit probleem op te lossen. Binnen dertig seconden kwam het antwoord: 20,58 riksen, 32,24 guldens en 41,18 kwartjes.
Dat was natuurlijk niet de bedoeling.
Na wat kunstgrepen in de spreadsheet komt de oplosser met twintig riksen, veertig kwartjes en veertig guldens. Tot zover dit artikel.

De spreadsheet laat ik maar even voor wat het is. Wat mij nu interesseert is hoe vwo 5-leerlingen, die wiskunde B in het pakket hebben, dit probleem aanpakken. Kiezen zij voor een technische aanpak, met behulp van variabelen invoeren, vergelijkingen (formules) opstellen, of voor een intuïtieve methode, een structuur zien te vinden, regelmaat ontdekken, enzovoort.
Misschien mag je spreken van een B-achtige aanpak versus A-achtige aanpak.
Ik besluit om een onderzoekje te doen in mijn beide vwo 5B-klassen.
De leerlingen krijgen tien minuten de tijd. Ik vertel erbij dat ze rekening moeten houden met meer oplossingen.
Tijdens die korte periode geen gesteun of gekreun. Volgzaam storten ze zich op het probleem. Een enkeling slaakt een kreet bij het vinden van een eerste oplossing. Hij/zij moet herinnerd worden aan meer oplossingen.
Achteraf blijken van de totaal zesendertig aanwezige leerlingen er vier de drieëndertig oplossingen gevonden te hebben. Vijftien leerlingen kwamen niet tot een goede oplossing. De resultaten heb ik in onderstaande tabel in categorieën verdeeld.

Zestien meisjes deden mee aan het experiment. Met een combinatie van beide methoden wordt bedoeld een aanpak zoals die van Marjon (zie haar uitwerking). Hoe formulegericht je bezig kunt zijn, laat Jacques in zijn werk zien. Zijn oplossing is echter moeilijk te reproduceren en om die reden hier niet opgenomen. Willie probeert en schrijft vervolgens de lijst van alle oplossingen op. Daar kunt u zich wel iets bij voorstellen.

	Formules				*Structuur/Regelmaat*				*Combinatie van beide*				
	J	M	B	A en B	J	M	B	A en B	J	M	B	A en B	Totaal
geheel opgelost	1			1		1		1	1	1	2		4
bijna opgelost	1	1	2		2		1	1		1		1	5
meer dan 2 oplossingen						2	1	1					2
2 oplossingen	1		1		2		1	1					3
1 oplossing	1	1	2		2	3	3	2					7
geen	7	3	8	2	2	3	3	2					15
totaal	11	5	13	3	8	9	9	8	1	2	2	1	36

De leerlingen gerubriceerd naar aantal gevonden oplossingen, uitgesplitst naar aanpak.
Er is een onderverdeling gemaakt naar sekse en naar wel of niet óók wiskunde A in het pakket.

Rijksdaalders guldens kwartjes : 100
= samen *f* 100,--
Stel x rijksdaalders; y guldens; z kwartjes

$$2{,}5x + y + 0{,}25z = 100 \quad \text{en}$$
$$x + y + z = 100$$

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2{,}5x & + & y & + & 0{,}25z & = & 100 \\
x & + & y & + & z & = & 100 \\ \hline
1{,}5x & + & 0 & - & 0{,}75z & = & 0 \\
 & & 1{,}5x & - & 0{,}75z & = & 0 \\
 & & & & 1{,}5z & = & 0{,}75z \\
 & & & & x & = & 0{,}5z \text{ (z alleen even getallen)}
\end{array}$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	97	94	91	88	85	82	79	76	73	70	67
z	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
y	64	61	58	55	52	49	46	43	40	37	34
z	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44

x	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
y	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
z	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66

De aanpak van Marjon

Een formele aanpak in het begin kan natuurlijk ook leiden tot een tabel waarin de leerling regelmaat ontdekt. Dat zie ik verschillende keren terug in het werk van de leerlingen.
De tabel geeft ongeveer een fifty-fifty uitslag voor 'formules' versus 'structuur'. Je kunt je afvragen of een dergelijk experiment bij wiskundedocenten dezelfde uitslag zal opleveren.

Jan Jacobs raadpleegt een collega neerlandicus. De collega denkt hardop: 'Met guldens rekent gemakkelijk, dus ik maak eerst een heel bedrag van één riks en twee kwartjes. Dan heb ik al drie piek en 97 guldens over.' Al heel snel komt hij tot de oplossingen.
Jacobs vraagt ook aan mensen die veel meer verstand hebben van wiskunde dan de neerlandicus, om het probleem op te lossen.
Ik citeer hem.
'Zij kalkten dingen als:
$x + y + z = 100$ en
$2{,}5x + y + 0{,}25z = 100$, op papier.
Zij kwamen tot oplossingen, maar deden er wel langer over dan de neerlandicus. Je zult toch maar een wiskundige zijn!'

Bij zo'n klein onderzoek moet je voorzichtig zijn met het trekken van conclusies, of deed ik dat al.

Tot slot

Een week later, 2 februari 1991, staan drie ingezonden brieven in de Volkskrant. Het aardige hiervan is, dat de briefschrijvers het probleem ook heel verschillend aanpakken. Twee van die brieven staan hieronder. De derde lijkt erg op de aanpak van Marjon.

Guldens

Het probleem waarmee Jan Jacobs worstelde in de *Prompt* van 26 januari is zonder computer en zonder wiskunde op te lossen. Cruciaal is alleen de verdeling in kwartjes en rijksdaalders.
Als je daarmee een rond bedrag aan guldens wilt maken, kan dat alleen met drie soorten stapeltjes munten: een stapeltje van één rijksdaalder plus twee kwartjes, een stapeltje van twee rijksdaalders, of een stapeltje van vier kwartjes.
De eerste soort leidt tot een goed antwoord (drie munten die samen drie gulden zijn). Van de tweede en derde soort moeten we er evenveel gebruiken om een goed antwoord te krijgen, maar dan kunnen we nieuwe stapeltjes maken van uitsluitend de eerste soort. Zolang je er daarvan hooguit 33 hebt, kun je met guldens aanvullen en dat geeft een juiste oplossing. Anderzijds krijg je zo natuurlijk een goede oplossing als je start met hooguit 33 van zulke stapeltjes. Als ik de 'flauwe' oplossing van honderd losse guldens meetel, geeft me dit 34 juiste oplossingen en niet meer.
Zulke 'verhaaltjessommen' kregen we vroeger op de lagere school als voorbereiding tot het toelatingsexamen van de hbs. Met één verschil. Toen had elke som precies één goede oplossing. Veel mensen denken nog steeds dat er voor elk probleem maar één juiste oplossing bestaat. (*War in the Gulf.*) Hadden we op de lagere school maar geleerd dat een probleem soms wel 34 goede oplossingen kan hebben!
Alphen aan de Rijn, Chr. Peters, wiskundige

Kwartjes

Als deze 'solver' van Excel inderdaad op de beschreven wijze werkt, heeft de argeloze spreadsheetgebruiker er inderdaad weer een probleem bij. En zijn/haar werkgever een nog iets groter probleem.
Jan Jacobs vraagt zich af hoe het komt dat je altijd tweemaal zoveel kwartjes hebt als rijksdaalders. Het antwoord is simpel. Met honderd munten een bedrag van honderd gulden maken, maakt de gulden tot eenheid van zowel aantal als waarde. Elke rijksdaalder is dus per munt 1,50 te veel; elk kwartje is 0,75 te weinig. Twee kwartjes wegen dus ten opzichte van de eenheid gulden precies op tegen een rijksdaalder.
Oplossingen waarbij het aantal kwartjes niet tweemaal zo groot is als het aantal rijksdaalders, zijn er dus niet.
Tilburg, P. Buitenhuis