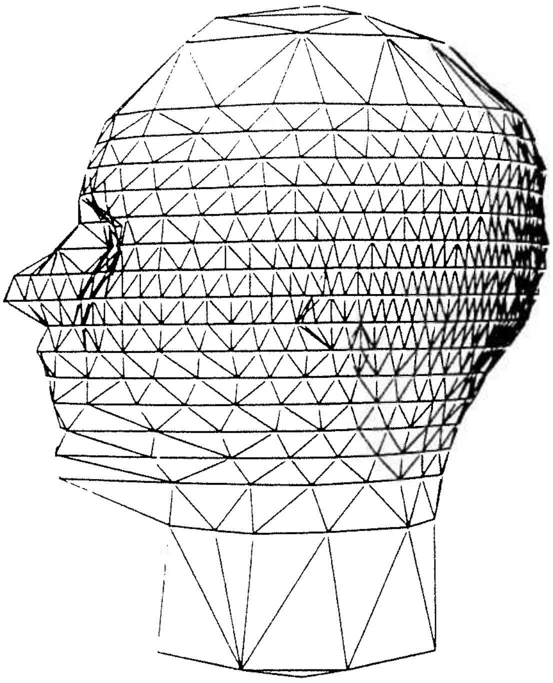
Driehoekje leggen

Een verkenning van de mogelijkheden in het hoofd van een 3 havo-leerling

M. Kollenveld/Int. Westland College, Naaldwijk
A. Roodhardt/CSG, Dokkum



Doel van de verkenning

In het algemeen voortgezet onderwijs is 3 havo een gecompliceerde en dus interessante klas. Het is het jaar van de pakketkeuze, het jaar waarin meisjes en jongens besluiten geen of wel wiskunde in hun pakket te kiezen, met verstrekkende gevolgen voor latere jaren.

Voor sommige leerlingen is het wiskundeonderwijs dus eindonderwijs. Voor de meesten is het een voorbereiding op wiskunde A of wiskunde B in de bovenbouw. Daarnaast moet het wiskundeonderwijs voor alle leerlingen ook zó zijn, dat zij een goede keuze kunnen maken en dus inzicht krijgen in zowel de vakken wiskunde A en wiskunde B, als in hun eigen capaciteiten en mogelijkheden daarin.

Het wiskundeonderwijs in 3 havo dient dus vele doelen. Mede gezien de beperkte tijd die beschikbaar is, moet geprobeerd worden die doelen zoveel mogelijk met elkaar te vervlechten. Zo moeten er niet teveel zaken aan de orde komen die louter en alleen als voorbereiding op het vervolg in wiskunde A of in wiskunde B dienen. Zo is bijvoorbeeld de meetkunde in 3 havo niet alleen een voorbereiding op wiskunde B, maar ook het eindpunt van de meetkundelijn voor alle leerlingen die geen wiskunde B kiezen. Het verschil in belangrijkheid en diepgang van de diverse onderwerpen dat door deze vermenging van doelen ontstaat, is een lastig probleem en kenmerkend voor 3 havo.

Mogelijke uitwegen zijn het ontwikkelen van materiaal dat binnen één onderwerp zowel A- als B-aspecten heeft en de mogelijkheid biedt om dezelfde problematiek op verschillende niveaus aan te pakken. Een voorbeeld hiervan is het door de Hadrie-groep [1] ontwikkelde pakketje *Driehoekje leggen*, waarover in dit artikel verslag wordt gedaan.

Opzet van het pakketje

Het pakketje behandelt eerst het meetkundige onderwerp evenredigheden vanuit een concrete situatie. De vragen zijn zó gesteld dat ze op diverse niveaus kunnen worden opgelost: zowel door het teruggrijpen naar die concrete situatie, als door het hanteren van verhoudingsschema's.

De context leidt daarna ook tot een beschouwing over tabellen en de regelmaat daarin (handig tellen) en komt via verschilrijen tot het wiskunde A-onderwerp kwadratische verbanden. Het pakketje sluit af met wat ongewone contextopgaven, waarin het zojuist geleerde ook weer toegepast kan worden.

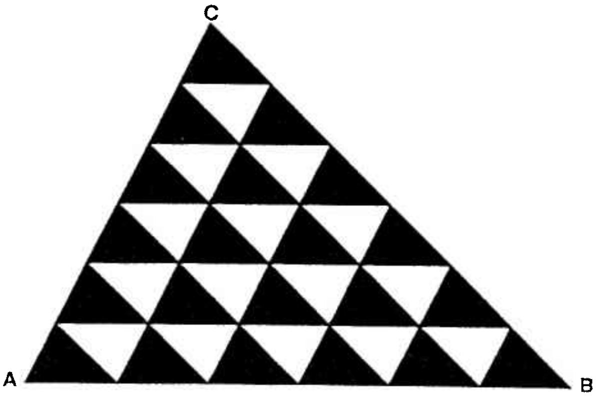
Wat wilden we onderzoeken

Bij het ontwikkelen van materiaal met zo'n brede doelstelling is het natuurlijk van belang te weten of het goed aanslaat. Vandaar dat we niet alleen geïnteresseerd waren in de moeilijkheidsgraad, het peil van de tekst, de tijd die het doorwerken kostte en of er voldoende oefenstof geboden werd. Heel belangrijk was voor ons te zien of de door ons gedachte diversiteit aan oplossingsmethoden werkelijk optrad en leerlingen zich ook zouden profileren zoals we gedacht hadden, zodat dit pakketje kon bijdragen aan het verhelderen van het keuzeprobleem voor leerling en docent.
Daartoe is het pakketje in de klas uitgeprobeerd.

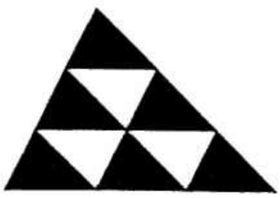
Het pakketje in de klas

Het beginprobleem was een moderne driehoekige uitbouw van een kamer te beleggen met zwarte en witte tegels van dezelfde vorm, waarna wat gevarieerd werd met tegels van dezelfde vorm maar andere afmetingen (gelijkvormig inderdaad). Door op te merken dat langs elke zijde van de grote driehoek evenveel kleine driehoekjes liggen, is de poort naar evenredigheidsproblemen geopend. Uit het lesmateriaal:

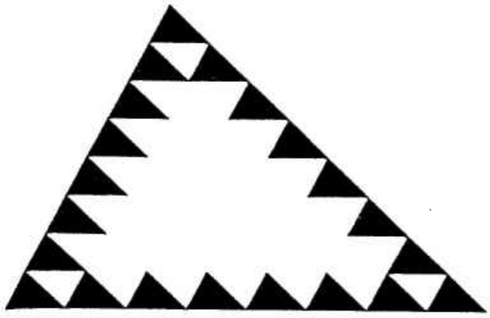
Het resultaat van het driehoekje leggen



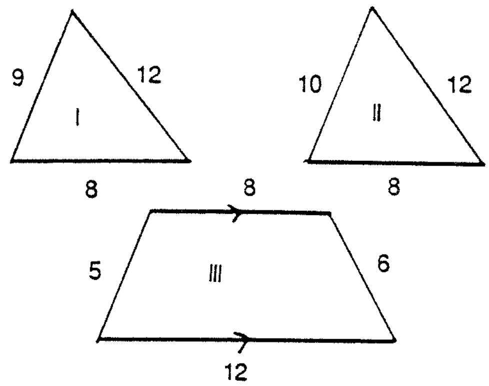
Langs elke zijde van de grote driehoek ABC liggen evenveel kleine driehoeken. In dit geval zijn dat er zes. Maar bij andere aantallen klopt het ook. Je kunt dat controleren met driehoeken die in de grote driehoek zijn verstopt. Bijvoorbeeld:



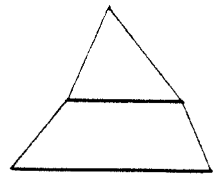
En het kan ook met een ander formaat tegel, zoals hieronder (aantal telkens acht):



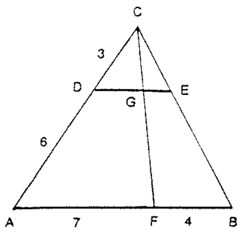
Een verhoudingsschema kan daarna worden geïntroduceerd als een manier van handig opschrijven wat je doet. Geen noodzaak of vast stramien van oplossen. Aldus gewapend zou de leerling nu naast enkele minder gebruikelijke problemen op zijn minst de traditionele problemen met succes moeten kunnen oplossen.

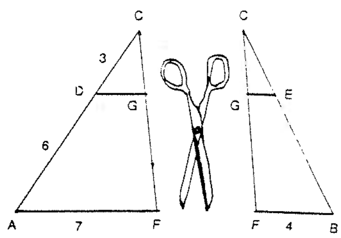


Figuur III is een trapezium (twee zijden parallel). Daarop kun je driehoek I of driehoek II plaatsen. De figuur die dan ontstaat kan een driehoek zijn, maar dat hoeft niet. Er kunnen immers knikken inzitten.



>>*Hoe zit dat in deze twee gevallen?*





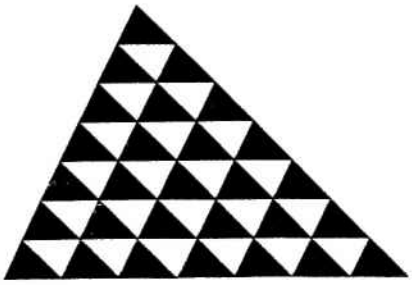
>>*CA is driemaal zo lang als CD. Met het tegeltjesverhaal is eenvoudig vast te stellen dat CB dan ook driemaal zo lang is als CE. Ga dat nog eens na.*
>>*Van de driehoek ABC wordt een stuk afgeknipt. Is CF nu ook driemaal zo lang als CG?*

Bij de traditionele opgaven over evenredigheden in een driehoek kwam inderdaad een scala aan oplossingen naar voren: naast de twee aangeboden methoden van de concrete tegels met passende afmetingen en het verhoudingsschema, ook een tussenvorm van onbekommerd rekenen met anderhalve of anderszins gebroken tegelrijen.

Regelmaat en symmetrie in tabellen

Het tweede deel ging over regelmaat en symmetrie zien in tabellen en die benutten, wiskunde A dus. Uit het lesmateriaal:

Het probleem van de passende tegels is opgelost. We gaan ons nu bezig houden met de aantallen tegels die besteld of gefabriceerd moeten worden.
Hier is nog eens de vloer:



	Z	W	T	S_Z	S_W	S_T
rij1						
rij2	2	1	3	3	1	4
rij3						
rij4						
rij5						
rij6						

De tabel geeft die telresultaten weer. Voor de opschriften van de kolommen zijn deze afkortingen gebruikt:

Z = het aantal zwarte tegels in die rij
W = het aantal witte tegels in die rij
T = het totaal aantal tegels in die rij
S_Z = de som van alle zwarte tegels tot nu toe
S_W = de som van alle witte tegels tot nu toe
S_T = de som van alle tegels tot nu toe

Het tellen van het totaal aantal driehoekjes per rij geeft een kwadratisch verband te zien tussen rijnummer en totaal aantal driehoekjes.

Als je met n het rangnummer van de rij bedoelt, kun je volgens het hiervoor gaande de kolom S_T de naam n^2 geven. Dat is gedaan met de volgende verschillentabel.

verschillentabel	
n^2	verschil tussen twee opeenvolgende getallen
1	
	3
4	
	5
9	
	...
16	
25	
36	
49	

De eigenaardigheid van de verschilrij, de regelmaat hierin, vonden de leerlingen wel interessant, zonder dat zij een bewijs behoefden voor het verschijnsel. De volgende opgave sprak dan ook totaal niet aan.

>>*Controleer dat voor de kolom S_Z, dan geldt:*

$$S_Z = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

Wel leuk vonden ze deze:

50		
	211	
261		3
	214	
475		...
	...	
...		

50		
	70	
120		-40
	30	
150		

160		
	-40	
120		20
	-20	
100		

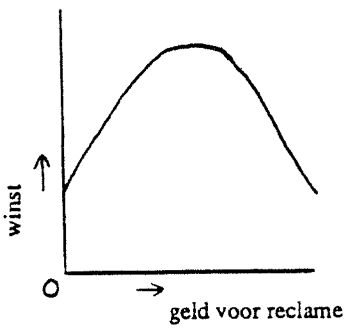
>>*Bereken voor deze tabellen het vierde en vijfde getal van de eerste kolom door er nog twee toertjes aan te breien.*

Deze rijtjes inspireerden sommigen tot het maken van verschilrijen van verschilrijen van ... om verbanden te ontdekken. Een aardige bijkomstigheid is dat deze verschilrijen later in het jaar bij de kwadratische functies weer nuttig gebruikt kunnen worden, het tekenen van een parabool wordt een stuk eenvoudiger als je gebruik maakt van de regelmaat van de verschilrij.

Een aantal andere contextopgaven tot besluit.

Reclame

Meer geld besteden aan reclame kan een bedrijf meer winst opleveren. Maar de regel 'meer reclame meer winst' gaat niet altijd op.
Het werkelijke verband tussen die twee ziet er eerder zó uit:



>>Probeer de vorm van deze grafiek aannemelijk te maken.

De vorm van de grafiek doet aan een kwadratisch verband denken. De directie van een bedrijf gaat ervan uit dat dat zo is. De ervaringen tot nu toe staan in deze tabel:

reclame geld (×f 100.000)	*winst (×f 100.000)*
0	*4*
1	*11*
2	*16*

>>Het probleem is nu: is het verstandig nog meer geld in reclame te steken, en zo ja, wat moet dan het totale bedrag voor reclame zijn?

Lichaamsgewicht

Het hebben van het juiste lichaamsgewicht is een belangrijke voorwaarde voor het gezond zijn en blijven. Over wat het juiste gewicht is bij een bepaalde lengte lopen de meningen nogal uiteen. Voor de leek zijn er allerlei tabellen, grafieken en formules waarmee hij of zij gemakkelijk het eigen gewicht kan controleren. Die zijn soms zo eenvoudig dat je aan de waarde ervan kunt twijfelen.

Hier is een deel van zo'n tabel:

lengte in cm	*gewicht in kg*
140	*49*
150	*56,25*
160	*64*
170	*72,25*
180	*81*
190	*90,25*

a. *Waarschijnlijk is er bij het maken van de tabel gebruik gemaakt van een kwadratisch verband tussen lengte en gewicht. Controleer dat met een verschiltabel.*
b. *In de tabel gaat de lengte telkens evenveel omhoog, maar bij het gewicht is dat niet zo. Probeer daar een verklaring voor te vinden, door je een groeiend mens voor te stellen.*
c. *Welk gewicht hoort bij een lengte van 200cm?*
d. *Misschien is de gebruikte formule te achterhalen. Die formue zou er zo uit kunnen zien:*

$$G = \boxed{?} \cdot L^2$$

Welk getal moet in het hokje staan?

Conclusie

Het onderdeel evenredigheden kwam aardig uit de verf, zij het dat de vanzelfsprekendheid van de gelijkvormigheid zó groot was, dat onze vragen naar het 'bewijzen' of 'beredeneren' niet begrepen werden. Een bewijs of redenering heb je pas nodig als er twijfel mogelijk is en die was er niet. De keuze van de oplossingsmethode en de mate van enthousiasme waarmee gewerkt werd, gaf wel wat informatie over de leerling.
Het tweede onderdeel leverde wat meer verrassingen op. De variabelen en formules als $S_T = S_Z + S_W$ zorgden voor flink wat problemen. Misschien speelde de onbekendheid met het onderwerp hier een rol, het goed kijken naar tabellen behoort nog niet echt tot de onderbouwstof en dan was dit een eerste kennismaking.

Samengevat: deze aanpak biedt zeker perspectief; bij het onderwerp evenredigheden was de vrijheid van de leerling om op haar/zijn niveau oplossingen te zoeken groter dan bij het werken met de tabellen. Als eerste kennismaking met het onderdeel tabellen, grafieken, formules bleek dat wat pittig. Nu leek wiskunde A moeilijker dan wiskunde B, een indruk die we niet wilden maken, maar die ons ook niet echt tegenstaat. De combinatoriek, het handig tellen en een verstandig gebruik van tabellen, zijn inderdaad zaken waarvoor een zeker inzicht en abstractievermogen nodig is.
(Ook) Wiskunde A is niet voor de dommen!

Noot

[1] De Hadrie-groep van het W12-16 project bestaat uit: M. Kollenveld, H. van der Kooij, A. Roodhardt en H. Verhage.