De rollen van formules

J. ten Hove
SLO, Enschede

Inleiding

In de wiskundelessen leren de leerlingen werken met formules. Dat is nu zo en dat verandert niet als het nieuwe programma voor W12-16 wordt ingevoerd. Wat wel verandert, is de hoeveelheid tijd die leerlingen eraan besteden en de manier waarop ze met formules omgaan. In het artikel 'Algebra' [1] laten de schrijvers zien dat het aandeel van formules in het huidige programma groter is dan in het programma van W12-16. De manier waarop leerlingen met formules omgaan in het programma van W12-16, wordt uit de doeken gedaan in het artikel 'Formules maken en gebruiken' [2]. Achter de ideeën, die in dat artikel zijn uitgewerkt, ligt een beeld van de rollen, die formules spelen in allerlei probleemsituaties en van de wijze waarop variabelen daarin zijn betrokken. Dat beeld vormt de kern van dit verhaal.

Een korte schets van de drie rollen van formules geef ik aan de hand van een formule over schoenmaten: *engelsmaat* = *fransmaat* $\times$ 0,8 − 25,4.

- Als je precies maat 39 (Frans) hebt, welke Engelse maat past jou dan het beste?
  '39 invullen in de formule levert:
  engelsmaat = 39 $\times$ 0,8 − 25,4 = 5,8 $\approx$ 6'
  De formule vertelt hoe je moet rekenen: ze is *rekenvoorschrift*.
- Hoe is het verband tussen de Engelse maten en de Franse maten te omschrijven?
  'In de formule komt alleen een vermenigvuldiging en een aftrekking voor. Het verband tussen Engelse en Franse maten is dus lineair. De Franse maat moet je met 0,8 vermenigvuldigen, dus tien maten verschil in de Franse verdeling is acht maten verschil in de Engelse verdeling. De Franse verdeling is dus fijner dan de Engelse.'
  Informatie over het verband komt uit de formule. Deze is daarmee in haar rol van *beschrijver van een verband.*
- In Nederlandse schoenenwinkels staan op de stellingen Franse maten aangegeven. In welke vakken moeten de schoenen van Engels fabrikaat?
  'De gegeven formule is beter bruikbaar in een andere vorm:
  $e = f \times 0{,}8 - 25{,}4$
  $e + 25{,}4 = f \times 0{,}8$
  $(e + 25{,}4) : 0{,}8 = f \ldots$'
  Bij deze omvorming gebruik je de formule niet als rekenvoorschrift en de context van de schoenmaten blijft op de achtergrond. De formule functioneert hier als *object*.

Bij elk van de drie rollen zijn kanttekeningen te plaatsen. Dat doe ik in de volgende paragrafen.

Formule als rekenvoorschrift

Het verband tussen Engelse en Franse schoenmaten is gegeven in de vorm van een formule. Die wordt in eerste instantie gebruikt als rekenvoorschrift. Maar hoe kom je aan zo'n voorschrift? Waarom zou je een berekening in formulevorm opschrijven? Waar gebruik je formules op deze manier? Op deze vragen geef ik een antwoord. Met name bij de vraag hoe je aan zo'n formule komt, ben ik niet volledig in mijn antwoord. Er zijn vele manieren om een formule te maken, ook een formule die berekeningen voorschrijft. Ik beperk me tot één van die manieren: de berekeningen vertalen naar formuletaal.

Samenvatting van berekeningen

In het boek *De schaal van Richter en andere getallen* [3] staat een 'formule' voor de berekening van het alcoholpromillage.

De volgende methode geeft het promillage nauwkeuriger, doordat deze rekening houdt met lichaamsgewicht en geslacht (en dus met de hoeveelheid bloed). Vermenigvuldig eerst het aantal glazen dat u hebt gedronken met 100. Neem uw lichaamsgewicht in kilo's en vermenigvuldig dat met 6 als u een vrouw bent en met 7 als u een man bent. Het promillage is dan het eerste getal gedeeld door het tweede. Een man van zeventig kilo heeft na drie glazen bier op een lege maag een promillage van 0,6.
Als u erbij eet, wordt de alcohol minder opgenomen en mag u het gevonden getal met 0,8 vermenigvuldigen. Dan heeft de man dus een promillage van afgerond 0,5.

De formule houdt er geen rekening mee dat het lichaam ook weer alcohol uit het bloed afbreekt. De verschillen tussen mensen zijn zeer groot (vooral gewenning van de lever speelt een rol), maar de vuistregel is dat het promillage met 0,15 per uur zakt.
Wie met behulp van deze gegevens aan het eind van de avond niet meer kan uitrekenen wat zijn promillage is, kan beter niet meer gaan rijden.

Samengevat in wiskundige formuletaal staat er:

$$promil(v) = \frac{glastal \times 100}{gewicht \times 6} (\times 0{,}8) - 0{,}15 \times uurtal$$

$$promil(m) = \frac{glastal \times 100}{gewicht \times 7} (\times 0{,}8) - 0{,}15 \times uurtal$$

(De factor 0,8 telt mee in het geval dat de persoon in kwestie tijdens het drinken van alcohol ook heeft gegeten.)

Voordeel van de samenvatting is dat je sneller kunt zien hoe de berekening in elkaar zit, mits je voldoende vertrouwd bent met formules. Waarschijnlijk zul je dan met meer glaasjes op toch een goede berekening kunnen maken op basis van de formules. Een ander voordeel is dat je de berekening op deze manier beter kunt onthouden. Denk maar aan de oppervlakte- en inhoudsformules van meetkundige figuren. Daar speelt overigens nog iets anders mee, waardoor de berekening beter bereikbaar blijft in het geheugen, namelijk de standaardnotatie. 'De oppervlakte van een cirkel is pi *r* kwadraat', is een zin met allerlei standaard verkortingen:
- pi is een bepaald getal, dat de verhouding voorstelt tussen de omtrek en de diameter van een cirkel;
- de vermenigvuldiging wordt verzwegen;
- *r* staat voor straal van de cirkel en
- kwadraat is een manier om te vertellen dat die straal met zichzelf vermenigvuldigd moet worden.

Als je al deze afspraken kent, is dit een gemakkelijke manier om de berekening te onthouden.

Betekenis van een formule in de situatie

In de beroepsvakken op het lbo en het mbo worden formules vaak gebruikt als voorschrift voor berekeningen. Het volgende voorbeeld komt uit een wiskundeboek voor Middelbaar Laboratorium Onderwijs [4]:

In het laboratorium van de school staat een voorraadfles met een oplossing van 30% waterstofperoxide (H_2O_2). Dat betekent dat 30% van het volume uit zuiver waterstofperoxide bestaat en 70% uit water.
Een leerling wil voor reinigingsdoeleinden een fles van 250 ml vullen met een 3% oplossing H_2O_2. Hij maakt een berekening.
Er is nodig:
250 ml van 3% dat is $0{,}03 \times 250 = 7{,}5$ ml zuivere H_2O_2.
De voorraad bevat een 30% oplossing, dat is per ml:
$0{,}30 \times 1 = 0{,}3$ ml zuivere H_2O_2.
Het aantal ml dat hij uit de voorraadfles moet nemen is dus:

$$\frac{7{,}5}{0{,}3} = 25\ ml;$$

de rest van de te vullen fles, 225 ml, vult hij met gedestilleerd water bij.
Dezelfde leerling wil de volgende dag weer een verdunde oplossing maken. Hij wil een fles van 0,7 liter inhoud vullen met een 60% alcoholoplossing. Hij beschikt over een vat met een 96% alcoholoplossing.

Opdracht
Maak zelf de berekening hiervoor.

Omdat het vaker voorkomt dat er een verdunning gemaakt moet worden, kun je die berekening algemeen maken. We gebruiken dan letters voor de verschillende getallen en er ontstaat een formule. We gaan uit van een voorraad van a% *oplossing van een bepaalde vloeistof. We willen een verdunning maken van een* b% *oplossing in een fles met een inhoud van* c *ml. (*b *is kleiner dan* a, *want er is sprake van een verdunning). We nemen daarvoor* x *ml uit de voorraad en vullen de fles verder bij met water of een ander oplosmiddel.*
De getallen, die voor a *en* b *worden ingevuld, zijn percentages. Zij geven dus een verhouding aan en worden niet in een eenheid uitgedrukt. De grootheden* c *en* x *stellen een volume voor en worden hier in de eenheid ml uitgedrukt.*

Oefening
Maak de formule van de verdunningsberekening en druk x *uit in* a, b *en* c. *Ga na of de eenheden kloppen in de gevonden formule.*

De formule ontstaat uit berekeningen in een bepaalde situatie. Die berekeningen worden meer algemeen toepasbaar door in de formule de getallen voor percentages en hoeveelheden te vervangen door letters. De formule krijgt betekenis in de situatie als je woorden gebruikt in plaats van letters:

$$mlbron = \frac{percentnieuw}{percentbron} \times mlnieuw$$

Deze vorm maakt niet alleen duidelijk hoe je moet rekenen, maar ook hoe de structuur van de berekening verbonden is met de context. Zo is aan de formule te zien dat het gaat om een verdunning als de breuk een getal oplevert dat kleiner is dan 1, want dan moet je er gedestilleerd water bij doen om de gewenste hoeveelheid van de nieuwe oplossing te krijgen. En de breuk is kleiner dan 1 als de nieuwe oplossing een lager percentage heeft dan de bron. Bovendien is het logisch dat de verhouding tussen de percentages een rol speelt bij de verdunning. Daarmee is het kringetje rond: de formule past bij het verband tussen de hoeveelheden van de beide oplossingen. Op deze manier kun je de uitkomst op de vraag (maak een formule bij de berekening) controleren. In de beschouwing verandert de formule van rol: hij wisselt van voorschrift tot beschrijving van een verband. De rolwisseling gaat gepaard met een verhoging van het abstractieniveau.

Formule als beschrijver van een verband

Een formule die een verband beschrijft, is niet los te zien van de situatie waaruit dat verband voortkomt. Bij de controle van de formule die de berekening van de verdunning beschrijft, komt dat al naar voren. Daar kijk ik alleen naar de situatie zelf, zonder de andere representatievormen (tabellen en grafieken) erbij te betrekken. In deze paragraaf doe ik dat wel.

Vragen over verbanden

Een formule kan een steun zijn in het zoeken naar oplossingen van vragen over het verband. Maar een formule kan ook vragen oproepen over het verband dat zij beschrijft. De beide formules waarmee je alcoholpromillages kunt berekenen, prikkelen de nieuwsgierigheid:
- Welke invloed heeft je gewicht op het alcoholpromillage in je bloed?
- Wie kan de meeste glaasjes drinken in verhouding tot zijn (haar) gewicht, een man of een vrouw?
- Hoe hangt het promillage samen met de hoeveelheid die je drinkt?

Ook bij het zoeken naar oplossingen voor deze vragen kunnen de formules een rol spelen. De eerste twee vragen gebruik ik om te laten zien hoe formules als beschrijvers van verbanden kunnen bijdragen aan een oplossing, in samenhang met tabellen en grafieken.

De eerste vraag betreft variatie van *gewicht*. Voor de volgende tabel is *glastal* op 3 gesteld en verder is alleen het eerste deel van de formule gebruikt (zonder rekening te houden met maaltijden en ervan uitgaande dat het laatste glas zojuist naar binnen gewerkt is):

gewicht	*promil(v)*	*promil (m)*
60	0,83	0,71
65	0,77	0,66
70	0,71	0,61
75	0,67	0,57
80	0,63	0,54
85	0,59	0,50
90	0,56	0,48
95	0,53	0,45
100	0,50	0,43

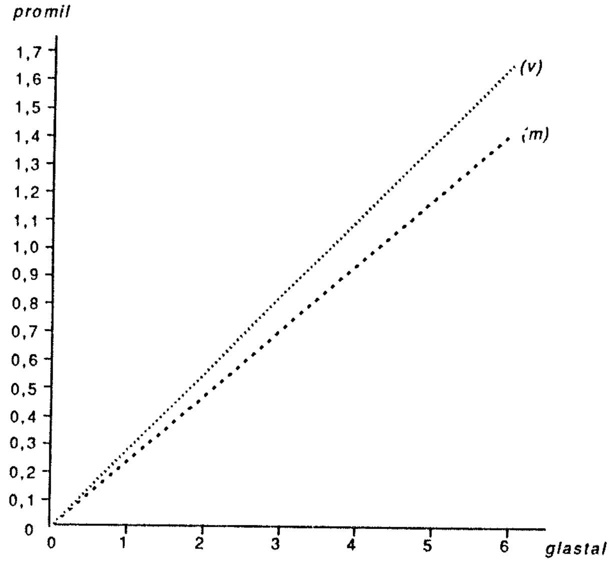
De tabel laat zien dat bij een hoger gewicht het promillage lager is, voor zowel mannen als vrouwen. Dat is ook wel logisch, als je bedenkt dat een groter lichaam meer bloed heeft, waardoor de alcohol sterker verdund wordt. Bij nadere beschouwing van de tabel blijkt de afname van het promillage niet steeds even sterk te zijn: ze neemt af naarmate het gewicht groter wordt. Er is dus geen sprake van een lineair verband. Aan de formule kun je dat ook wel zien: *gewicht* staat onder de breukstreep. Op deze manier geeft de tabel zicht op de werking van de formule.

Voor een antwoord op de tweede vraag is het gewicht vastgesteld op 60 kg. De formules worden dan:

$$promil(v) = \frac{glastal \times 100}{360}$$

$$promil(m) = \frac{glastal \times 100}{420}$$

De grafieken bij deze formules zijn rechte lijnen. Ze gaan door de oorsprong, want als je niets drinkt, krijg je ook geen alcohol in je bloed. Eén punt buiten de oorsprong voor elk van de grafieken is al in de tabel af te lezen: bij drie glazen krijgt een vrouw van 60 kg een promillage van 0,83 en een man (van 60 kg) 0,71. De grafiek is nu zó getekend:



Het lijkt erop dat bij elk aantal glazen vrouwen steeds een hoger promillage krijgen dan mannen. De factor 6 respectievelijk 7 vormt het enige verschil tussen de beide oorspronkelijke formules. Die factor zorgt kennelijk voor het verschil in uitkomsten bij vrouwen en mannen. (Terzijde: zou het dan misschien ook zo zijn dat mannen in verhouding tot hun gewicht meer bloed hebben dan vrouwen?) De grafiek helpt hier om het verband tussen de variabelen te zien als één geheel. Daardoor kan ook de formule haar rol als rekenvoorschrift verlaten en kan ze een totaalbeeld geven van het verband.
De formules functioneren tot nu toe in samenhang met de andere voorstellingsvormen van het verband: taal, tabellen en grafieken. Dat is kenmerkend voor het gebruik van formules als beschrijvers van verbanden. Zodra je de situatie loslaat en alleen naar de formules zelf gaat kijken, verandert de formule van rol en wordt zij object. [5]

Formule als object

De overgang van een formule als beschrijver van een verband naar een formule als object, is vaak onduidelijk. In deze paragraaf geef ik een aantal kenmerken van formules als object, waarvan er twee ook van toepassing kunnen zijn voor formules als beschrijvers van verbanden. Het onderscheid tussen de beide rollen is het meest duidelijk in de mate waarin de context betrokken is.

Kenmerken

In een lijst van algebraïsche gelijkwaardigheden is de rol van object zuiver aanwezig. Onderaan de pagina staat een deel van zo'n lijst uit een leerboek [4].

Bij het lezen van regel 7 kun je denken:

'. . . beide noemers gelijknamig maken, door in de eerste breuk teller en noemer te vermenigvuldigen met d en in de tweede breuk met b.' In deze gedachtengang komt geen getal voor en een context is helemaal afwezig. Bovendien krijgen delen in de formule namen: breuk, teller, noemer. Die delen worden dus onderscheiden in de formule en daarmee wordt een structuur in de formule zichtbaar.

$$\frac{a.d}{b.d} + \frac{c.b}{d.b}$$

Drie kenmerken onderscheiden samen de formule als object van de andere rollen:

- de berekeningen worden niet uitgevoerd, zoals de formule die voorschrijft in de eerste rol;
- een context is er niet in betrokken;
- de structuur in de formule wordt wel gebruikt.

Over het laatste kenmerk vertel ik iets meer.

Structuur in formules

De formules voor het berekenen van alcoholpromillages hebben een structuur, die ontstaat vanuit de constructie van de formule in de context:

$$promil(v) = \left(\frac{glastal \times 100}{gewicht \times 6} (\times 0{,}8)\right) - (0{,}15 \times uurtal)$$

- Het binnenste deel van de formules gaat over de opname van alcohol in het bloed, dat bij mannen en vrouwen verschilt.
- De factor 0,8 is de verzwakking van het effect van alcoholconsumptie op het alcoholgehalte in het bloed.
- In het laatste deel is de verlaging opgenomen van het promillage door de afbraak van alcohol, als functie van de tijd.

Deze structuur in de formule is dus verbonden met het verband tussen de variabelen in de situatie. Als je deze structuur doorziet, en die los van de context kunt beschouwen, dan kun je redeneren op basis van de formule zelf, om in het laatste stadium pas terug te komen tot de situatie en conclusies te trekken. Bijvoorbeeld in het beantwoorden van de vraag: wie kan zich de meeste drank permitteren, een man of een vrouw? Een procedure kan zijn:

- Eerst beperkingen aangeven:
  alleen het binnenste deel van de formule telt;
  gewicht is vast en gelijk in beide formules;
  glastal varieert, maar is in beide formules steeds gelijk.
- En dan redeneren:
  de factor 7 in de ene formule maakt de teller groter, dus de breuk kleiner, dus het promillage kleiner, vergeleken met de formule met factor 6.

6	$(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$	6	$(a^p)^q = a^{p\cdot q} = a^{pq}$
7	$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2\times 5}{3\times 5} + \frac{4\times 3}{5\times 3} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$	7	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot d} + \frac{c\cdot b}{d\cdot b} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
8	$3 \times \frac{2}{13} = \frac{3\times 2}{13} = \frac{6}{13}$	8	$p\cdot\frac{s}{t} = \frac{p\cdot s}{t} = \frac{ps}{t}$
9	$\frac{4}{5}\times\frac{3}{7} = \frac{4\times 3}{5\times 7} = \frac{12}{35}$	9	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} = \frac{ac}{bd}$
10	$6 : \frac{11}{5} = 6\times\frac{5}{11} = \frac{30}{11}$	10	$a : \frac{c}{d} = a\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$
11	$\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3}{5}\times\frac{8}{7} = \frac{3\times 8}{5\times 7} = \frac{24}{35}$	11	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} = \frac{ad}{bc}$
12	$\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{24}$	12	$\frac{p}{q} : r = \frac{p}{q}\cdot\frac{1}{r} = \frac{p}{qr}$
13	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$	13	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
14	$5\times 3 : 5 = \frac{5\times 3}{5} = \frac{\cancel{5}\times 3}{\cancel{5}} = 3$	14	$a\cdot b : a = \frac{ab}{a} = \frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}} = b$

Onafhankelijk van gewicht maakt glastal de breuk groter, dus promillage groter. Voor mannen telt de formule met factor 7 en voor vrouwen de formule met factor 6, dus mannen kunnen meer alcohol drinken dan vrouwen, voordat ze een bepaald promillage bereikt hebben.

De woorden in de formule refereren nog aan de context, maar de situatie speelt in de redenering geen rol meer. De woorden kunnen evengoed vervangen worden door letters die iets anders betekenen. Daardoor functioneren de formules hier als objecten.

Veranderen van structuur

Een formule, in haar rol van object, kan veranderen van structuur. Bij de promillageformule is de vraag gesteld: hoe hangt *glastal* samen met *promil*? In die vraag zit besloten dat je *gewicht* en *urental* constant houdt en dat je alleen kijkt naar de eerst genoemde variabelen. Door de formule iets te veranderen, wordt beter zichtbaar dat het promillage lineair afhankelijk is van glastal:

$$promil(v) = \left(\frac{100 \times 0,8}{\text{gewicht} \times 6} \times glastal\right) - (0,15 \times \text{uurtal})$$

De behoefte om de formule ingrijpend te veranderen kan ontstaan als je een bepaald verband wilt onderzoeken, bijvoorbeeld het verband tussen het gewicht en het aantal uren dat het promillage is afgenomen tot 0,5.
In de formule zijn voor het gemak de woorden vervangen door letters:

$p = promil(v)$;
$g = gewicht$;
h = hoeveelheid drank, oftewel *glastal;*
$u = uurtal$.

$$p = \left(\frac{100 \times 0,8}{g \times 6} \times h\right) - (0,15 \times u)$$

Een andere structuur past beter bij de vraag:

$$p = \left(\frac{1}{g} \times \left(\frac{100 \times 0,8}{6} \times h\right)\right) - (0,15 \times u)$$

Met het verplaatsen van $0,15 \times u$ in haar geheel, maak je gebruik van de structuur in de formule:

$$p + (0,15 \times u) = \left(\frac{1}{g} \times \left(\frac{100 \times 0,8}{6} \times h\right)\right)$$

Uiteindelijk komt deze formule tevoorschijn:

$$u = \left(\frac{1}{g} \times (88,89 \times h)\right) - 3,34$$

Ze is ontstaan na overgang op letters, substitutie van het getal 0,5, uitrekenen van bewerkingen met getallen, herschikking van termen, enzovoort. Dat zijn allemaal handelingen, die niets meer met de context te maken hebben; de formules zijn objecten, waarin structuur te herkennen, te gebruiken en te veranderen is.

Kanttekeningen in het kort

Tot nu toe heb ik verteld op welke manieren formules worden gebruikt en ik heb er enkele kanttekeningen bij gemaakt. In het kort komt het hierop neer:

- Een rekenvoorschrift geven in de vorm van een formule is overzichtelijk, je ziet snel wat je moet doen en het is gemakkelijk te onthouden, mits je de formuletaal kunt verstaan.
- Een verband beschrijven en onderzoeken kan met taal, tabellen, grafieken en formules. Redeneringen met formules worden ondersteund door de andere voorstellingsvormen: tabellen geven zicht op de effecten van bewerkingen in formules en grafieken dragen ertoe bij dat je de formule kunt beschouwen als beschrijver van het verband als geheel.
- Bij een formule in haar rol van object is de structuur belangrijk: je kunt die gebruiken in het zoeken naar verbindingen met de situatie en in het omvormen van de formule. Deze manier van werken met formules stelt eisen aan je vermogen om afstand te nemen van de formule als rekenvoorschrift en van de context.

Wat hebben we eraan?

De analyse van de rollen van formules levert een kapstok voor de problemen, die leerlingen ondervinden in het werken met formules. De indeling van formules naar hun rollen is dan ook niet zozeer wiskundig van aard, maar eerder didactisch. In de lijn – formules als rekenvoorschrift, als beschrijvers van verbanden en als objecten – zit globaal een verhoging van het abstractieniveau. In het artikel 'Algebra'[1] heeft de algebragroep al beschreven hoe dat is verwerkt in het nieuwe programma voor W12-16, in verticale richting (van klas 1 tot en met klas 4) en in horizontale richting (van lbo tot en met vwo). In het laatste deel van dit artikel laat ik zien hoe problemen van leerlingen in verband te brengen zijn met de rollen van formules. Daarbij geef ik aan hoe het algebraprogramma van W12-16 de leerlingen hierin tegemoet komt.

Rekenvoorschriften

Een formule gebruiken als rekenvoorschrift is voor de meeste leerlingen geen probleem, afgezien van de moeilijkheid van het rekenen zelf. Meestal is snel duidelijk waar ze welke getallen moeten invullen, mits de betekenis van de variabelen in de formules helder is. In een woordformule is dat meestal het geval. Ten behoeve van de duidelijkheid maken we afspraken over het gebruik van woorden in de formules:

- variabelen worden schuin geschreven;
- een variabele wordt aangeduid met één woord, dus niet: *aantal glazen*, maar *glastal*.

Ook moet duidelijk zijn welke bewerkingen de formule voorschrijft. De gewoonte om bewerkingen domweg achterwege te laten, kan lastig worden zodra er iets nieuws komt. Bekend is de interpretatie van $3\frac{1}{2}$ en $3\sqrt{2}$. Zodra de wortels ter tafel komen, beginnen leerlingen te twijfelen: is het nou $3 + \frac{1}{2}$ of $3 * \frac{1}{2}$? Is het $3 + \sqrt{2}$ of $3 * \sqrt{2}$? Over de notatie hebben we binnen W12-16 een afspraak gemaakt: in de eerste twee klassen schrijven we de bewerkingen voluit ($3\frac{1}{2}$ blijft natuurlijk $3\frac{1}{2}$). Pas in klas 3/4 gaan we over op verkorte notaties.

Hoe je een formule leest, moet je leren. Leerlingen kunnen goed overweg met machientjes en daarom gebruiken we die bij het leren lezen van formules. Deze machientjesketting brengt in beeld welke rekenstappen je maakt bij het omrekenen van Engelse schoenmaten naar Franse schoenmaten:

$$e \xrightarrow{+25,4} e + 25,4 \xrightarrow{:0,8} (e + 25,4) : 0,8 = f$$

Dezelfde ketting is bruikbaar voor het vinden van de formule, die andersom rekent:

$$f * 0,8 - 25,4 \xleftarrow{-25,4} f * 0,8 \xleftarrow{*0,8} f$$

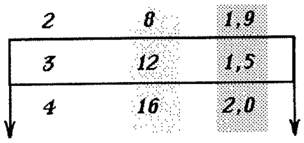
Op deze manier kunnen leerlingen problemen oplossen zonder dat ze formules als objecten moeten kunnen hanteren; de formules blijven in hun rol van rekenvoorschrift.

Vaak hebben de variabelen in de situaties een dimensie: gewicht is in kg, promillage is in mg alcohol per ml bloed. Dat maakt het rekenen met- en het interpreteren van formules extra lastig. Meestal laten we in de wiskunde de dimensie achterwege. Dat kan wel zolang dat ook voor leerlingen duidelijk is.

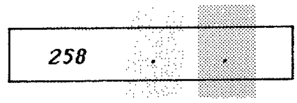
Verbanden

Een formule zien als beschrijver van een verband is lastig. Om dat te kunnen moet je niet alleen weten welke berekeningen de formule maakt (in de tabel voor promillages bijvoorbeeld, kijken in horizontale richting), maar je moet ook kunnen zien welke regelmaten optreden als je een serie getallen doorloopt (kijken in verticale richting). Al in de eerste klas vestigen we hierop de aandacht in het pakket *Stroken met getallen*:

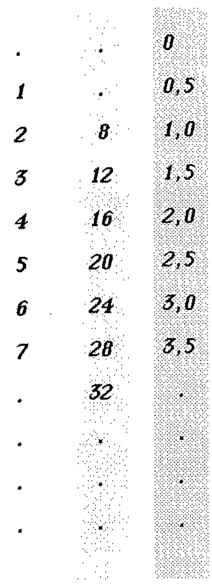
3 Welke regelmaat zie je in de rijen getallen op de stroken? Vertel dat in woorden.



4 De stroken zijn precies zo neergelegd, dat er steeds getallen van verschillende stroken naast elkaar staan. Door het venster kun je dat goed zien. Het venster verschuift naar beneden. Op strook A verschijnt het getal 258:



a Welke getallen staan daarnaast, onder de stippen?
b Hoe ben je aan de getallen bij a gekomen?



Een andere voorwaarde voor het kunnen zien van een formule als beschrijver van een verband is, dat je de variabelen moet kunnen beschouwen als vertegenwoordigers van alle waarden die ze kunnen aannemen. Dat vereist een behoorlijke mate van abstractie èn ervaring. Ervaren wat er met getallen gebeurt als je gaat vermenigvuldigen of aftrekken, hoe een tabel tot stand komt, en ervaren hoe dat tot uitdrukking komt in de formule. Een sterk visueel beeld van variabelen kan ook helpen: de stroken met getallen blijken een goed model te zijn voor variabelen. De bewerkingen tussen getallen op de stroken worden heel gemakkelijk bewerkingen tussen de stroken.

Specifiek voor het werken met formules die een verband beschrijven, is de vertaling over en weer tussen formule en situatie. Hoe ziet de formule eruit en wat heeft dat te maken met de situatie? Welk deel in de formule staat voor een bepaald deel in de situatie? Bijvoorbeeld in de alcoholformule, waarbij het laatste deel ($0,15 \times$ *uurtal*) staat voor de afname van het promillage, als functie van de tijd. In W12-16 is er veel aandacht voor vertalingen tussen tabellen, grafieken en formules.

Objecten

Een formule hanteren als object vereist een generalisatie van het rekenen. Wat je kunt doen met getallen, kan ook met letters. Dat generaliseren kun je doen als je genoeg ervaring hebt opgedaan met het rekenen. Op dezelfde manier als bij formules, die verbanden beschrijven, moet je ervaring hebben opgedaan met de effecten van bewerkingen. Maar ook op een heel andere manier dan ik bij verbanden beschrijf. Deze opgave uit *Woordsommen* illustreert dat:

Toch ben je zelf slimmer
Het lijkt wel handig, die computer-rekenmachine, maar toch....

15. Laat de computer uitrekenen:
*7 * knots – 6 * knots*

Antwoord is . . . . . .
Hé, dat had je al eerder gezien dat getal! Hoe komt dat?

16. Zonder computer: wat komt er uit:
*1000 * gek – 999 * gek*
Je mag je antwoord in cijfers òf met de naam van het getal geven.

17. Deze net zo:
a. gek + knots – gek
b. gek : gek
*c. 3*knots – 2*knots + 5*gek – 4*gek*
De laatste van deze drie mag met namen in plaats van cijfers.

18. Bedenk nu zelf nog vier sommen met namen die je zònder computer net zo gemakkelijk kunt uitrekenen. En kijk of je ze goed bedacht hebt, met de computer.

De effecten van de bewerkingen op series getallen, zoals in tabellen, zijn hier niet aan de orde. De woorden staan voor getallen met veel cijfers, waarmee het log rekenen is. De behoefte om te verkorten is daarmee groot. Leerlingen zien snel in dat wat ze ontdekken over het slim rekenen, ook klopt als je voor de woorden andere getallen neemt.

Structuur is een abstract begrip. Voor leerlingen moeilijk, maar niet ondoenlijk, zo is onze ervaring met eerste klassers. Al in de brugklas besteden we aandacht aan de structuren in rekensommen, als voorbereiding op het herkennen van structuren in formules. Deze opgave komt uit *Kringsommen*:

*Je zou in de som 3 + 4 * 5 ook kringen kunnen zetten:*

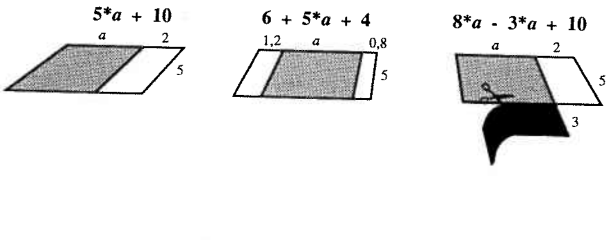
*(3 + 4) * 5*

Dan komt er als uitkomst . . . . .

*Maar als je gewoon intikt: 3 + 4 * 5, geeft de computer als uitkomst . . . . .*

Kringen zetten helpt om de structuur te herkennen. Ook bij formules, zoals de opgaven uit *Dubbel op* (voor klas 3) laten zien:

15. Deze drie formules horen bij de tekeningen eronder.



Omcirkel in alle drie de formules het stuk dat bij het grijze deel van de tekening hoort.

16. a. Maak nog twee formules die in de rij bij opdracht 15 passen.
b. Hoe zien de bijbehorende tekeningen eruit?

17. Geef je commentaar op de volgende uitspraak:
Bij iedere formule hoort een andere grafiek, want de formules zien er verschillend uit en de bijbehorende plaatjes ook.

Deze opgave illustreert nog iets anders, namelijk dat formules steeds voorkomen in samenhang met andere voorstellingsvormen. En, wat niet direct uit de opgave te halen is, maar wat wel essentiëel is: leerlingen kunnen altijd hun beweringen controleren met berekeningen.

Slot

Zeker niet alle problemen die leerlingen hebben met formules en algebra, zijn hiermee beschreven, laat staan dat ze zijn opgelost. Met name aan het leren omgaan met formules als beschrijvers van verbanden en formules als objecten, valt nog veel te onderzoeken. Duidelijk is wel, dat ervaring met formules als rekenvoorschrift, een belangrijke voorwaarde is voor het ontwikkelen van inzicht in de betekenis en de werking van formules. Ook is duidelijk dat een – voor leerlingen voorstelbare – situatie eveneens bijdraagt aan de ontwikkeling van dat inzicht, hoewel de inbreng van een situatie ook wel problemen met zich meebrengt.

Een algebraprogramma, waarbij kinderen ervaringen opdoen met formules in de rollen van (reken)voorschrift en beschrijver van een verband, zal toereikend zijn voor leerlingen die na de basisvorming niet verdergaan met exacte vakken. Voor leerlingen die wel verder gaan in exacte of technische vakken zal zo'n programma een goede basis geven. Zeker als ze redeneringen met formules kunnen koppelen aan de situaties, waarin de formules zijn ontstaan.

Noten

[1] Algebragroep W12-16: *Algebra*, Nieuwe Wiskrant Special, jrg. 11, nr. 1, juni 1991.

[2] Algebragroep W12-16: *Formules maken en gebruiken*; Nieuwe Wiskrant Special, jrg. 11, nr. 1, juni 1991.

[3] Blocksma, M., H. van Maanen en B. Bakker: *De schaal van Richter en andere getallen*, Amsterdam 1991.

[4] Bulthuis, Th. e.a.: *Wiskunde voor Middelbaar Laboratoriumonderwijs, deel 1*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1989.

[5] Het wordt tijd om de waarde van de uitspraken over alcoholpromillages te relativeren. De formules slaan op de gemiddelde man en vrouw, die zeer waarschijnlijk niet bestaan. Bovendien zijn er meer variabelen, die wel in het opnameproces van alcohol betrokken zijn, maar niet in de formule. En de verschillen tussen individuen kunnen heel groot zijn. De schrijvers van 'De schaal van Richter en andere getallen' stellen dan ook terecht: wie nog moet rijden, moet niet drinken.

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

Faculteit der Wiskunde en Informatica

Videoband 'Wat is statistiek?'

De studierichting Statistiek aan de Universiteit van Amsterdam heeft zich een breed doel gesteld en probeert onder andere de statistiek in ruime zin bekend te maken en te stimuleren. Binnen dat kader is er via de studierichting beschikbaar de video *Wat is statistiek?* Deze video kan gebruikt worden binnen het statistiekonderwijs op havo en vwo om de inhoud van het onderwijs aanschouwelijker te maken en een aantal toepassingen van de statistiek te laten zien.

Korte inhoud van de video
Wat doet statistiek? Statistiek kan diepgaande problemen oplossen door uit verzamelde getallen eerlijke, bewijsbare conclusies te trekken. Statistiek maakt getallen bruikbaar om de wereld te begrijpen.

Hoe doet statistiek dat? Door:
1. bestaande gegevens te verzamelen;
2. nieuwe gegevens te produceren;
3. conclusies uit de gegevens te trekken.

Deze drie stappen worden toegelicht met aansprekende voorbeelden:
- Wat is het verband tussen het aantal dode zeekoeien in de oceaan en het aantal speedboten dat daar vaart? Hoe maak je een steekproef? Voorbeelden: het voorspellen van verkiezingsuitslagen en het signaleren van trends onder bevolkingsgroepen.
- Het testen van het nut van medicijnen door middel van steekproeven.
- Hoe voer je een bewijs met behulp van statistische gegevens? Je kunt een gevonden gedicht onderzoeken op woordgebruik en er zo wellicht achterkomen dat het van Shakespeare is. Duracell kon door middel van statistische berekeningen aantonen dat hun batterijen echt langer meegaan.

Duur van de video, technische gegevens
De videoband duurt ongeveer vijftien minuten. Het is een Amerikaanse band die Nederlands ondertiteld is. Het gaat om een VHS-systeem.

Hoe de band te verkrijgen?
De band is te leen voor een periode van maximaal drie weken. Als u belangstelling heeft, kunt u contact opnemen met:
Universiteit van Amsterdam, Faculteit der Wiskunde en Informatica, Mw. drs. M. Jas, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam. Tel. 020-5256070/5256516.

Overigens, natuurlijk zijn medewerkers aan de studierichting Statistiek altijd bereid om voorlichting te komen geven over de nieuwe studierichting. Ook hiervoor kunt u bovengenoemde contactpersoon benaderen.