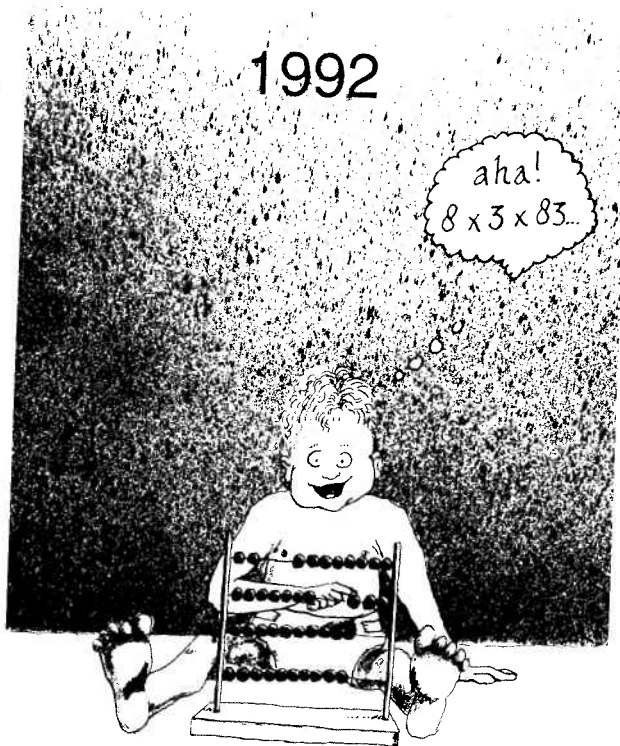


AHA 1992

E.W.A. de Moor/Freudenthal instituut, RU Utrecht
E. Wijdeveld/Baarn

De nieuwjaarswens voor 1992 van het Freudenthal instituut bevatte een oproep tot inzending van waargenomen AHA-ervaringen bij het leren van rekenen en wiskunde. In totaal kwamen 22 inzendingen binnen van zeventien inzenders, waarvan zeven vrouwen en tien mannen. Een heel verschil met vorig jaar, toen de prijsvraag louter wiskundig was.

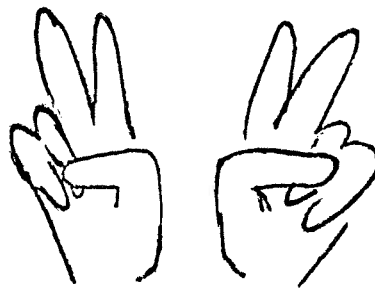
Van de inzendingen betroffen er veertien het rekenen, vier gingen over meetkunde, twee over algebra en twee over tijd. Er kwamen veertien inzendingen uit Nederland, de overige kwamen uit Denemarken, Noorwegen en Duitsland.



Het was een waar genoegen al die leuke inzendingen te mogen bekijken. Zonder uitzondering, allemaal hadden ze iets geestigs of brachten ze iets verrassends aan het licht. Het is niet verwonderlijk dat ze bijna allemaal een sterk visueel karakter hadden. Dit maakte het voor ons als beoordelaars in eerste instantie niet eenvoudig, maar toen we onze eigen omschrijving van een AHA-Erlebnis er nog eens op nalazen: *'Een plotselinge inval, een flitsende vondst, een werkelijk inzicht'*, hadden wij toch een wat harder criterium bij de hand in de vorm van 'het werkelijke inzicht'.

Zo zouden we de volgende inzending van L. de Vet zeker een AHA willen noemen, en dat voor een jongetje van twee jaar (!):

'Steijn (twee jaar en twee maanden) ligt op de commode met zijn vingers te spelen. Een uurtje geleden hebben we zijn vriendinnetje Eva (zou juist jarig geweest) laten zien hoe je 'twee jaar' met je vingers moet zeggen. Zonder die duim blijven je vingers niet zitten. Met gespreide vingers zegt hij verbaasd: 'Hé, nou ikke vijf jaar.' (Net als Velvele, zijn zus.) Eén minuut stilte. Dan klinkt het zelfverzekerd: 'Nee, ikke twéé jaar', en demonstreert het met zijn rechterhand. Probeert met zijn linkerhand hetzelfde te doen: 'Eva ook twee jaar... hè!' Kijkt van links naar rechts en weer terug en wappert vrolijk met zijn vingers.'



De volgende inzending van H. Holt over Liselore is meer een anekdote:

'Geen inzicht in rekenen wel in de rekenmethode. Liselore zwoegt zich door *Operator rekenen* en heeft altijd moeite met 'nieuwe' rekenstof, maar zij gaat daar 'inzichtelijk' mee om. Als ik haar vraag of ik kan helpen bij een 'nieuw' rekenpro-

fi Freudenthal instituut

bleem, zegt zij dat dat niet nodig is, want het is altijd hetzelfde met dat rot boek.

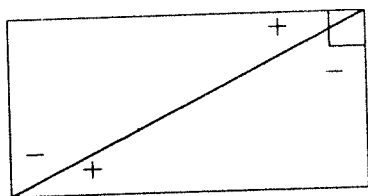
Eerst krijg je een ingewikkeld verhaal waarbij je sommen moet verzinnen of oplossen en daar snap ik geen barst van. Dan moet je sommen maken in je werkboek en dan haal ik geheid een onvoldoende.

Na twee of drie dagen legt de meester uit hoe je het echt moet uitrekenen en dan haal je je onvoldoendes zo weer op!

Anders wordt het als een leerling of kind iets slims te berde brengt, waarbij hij of zij gebruik maakt van een verworven inzicht. Vaak betreft zo'n redenering iets specifiek, zoals we bijvoorbeeld kunnen zien uit de volgende twee meetkundevoorbeelden.

Het eerste is ingestuurd door A.A.M.F. van Berkel en het tweede door S. Garst, die ons in totaal drie inzendingen deed toekomen.

'Tijdens de wiskundeles brugklas (MHV) werd het volgende probleem behandeld: de som van de twee scherpe hoeken in een rechthoekige driehoek is 90° .

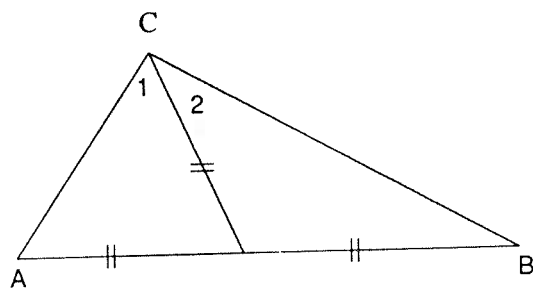


Rechthoek in tweeën knippen; constateren dat hoeken even groot zijn dus $+ \text{ en } -$ zijn samen 90° .

Rieshi, een leerling uit deze brugklas merkte hierna op dat je het ook anders kon zien (dit werd bedacht zonder meten, vouwen, knippen, enzovoort).

Als je nu van de rechthoekige driehoek de linkerpunt vouwt naar de rechterhoek en de bovenste punt eveneens vouwt naar de rechte hoek, dan zie je meteen dat het precies past (na 23 jaar brugklas nog nooit gehoord van een brugklasser).'

'Gegeven is de volgende driehoek :



Nadat we (de klas en ik) gezien hebben welke gelijkbenige driehoeken te zien zijn, komt de vraag of je weet hoe groot hoek C is.

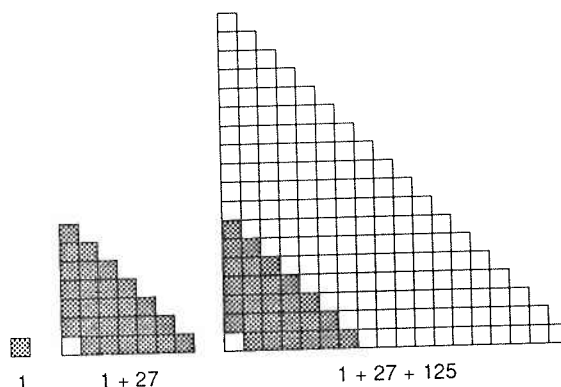
William legt zijn hoofd op zijn schouder en zegt: 'nou gewoon 90° , ik zie dat zo.'

'Maar dan kan die hoek ook wel 92° zijn', werp ik tegen, 'jij kunt die twee graden verschil niet zien.'

'Natuurlijk niet', is de verontwaardigde reactie, 'want dan zijn die andere twee ook samen 92° en bij elkaar kom je dan boven de 180° .'

Als ik aanstalte maak voor een reactie komt er: 'En u hoeft ook niet meer over 88° te beginnen, want dan is het samen niet 180° , dus gewoon 90° .'

Een groot aantal inzendingen werd gekenmerkt door een mengeling van slimmigheid, toegepast inzicht en grappige opmerkingen en had aldus het eerder genoemde anekdotische karakter. Anders gezegd, wij zagen daar niet altijd zulke grote doorbraken van echt inzicht. Toch willen we er enkele aan de orde stellen.



Zo vermeldt T. Breiteig (Noorwegen) dat zijn student Einar, een voor hem (!) overtuigend visueel bewijs vond voor de stelling dat de som van opeenvolgende oneven derde machten een driehoeksgetal oplevert.

'I found it, it's my result. And other people may be delighted by my finding.'

J. de Waard constateert bij Hessel (drie jaar) de relativiteit van 'veel en weinig'. Over Eva (vijf jaar) vertelt hij hoe zij de rij 10, 11, 12, 13, 14... zelf als volgt voortzette: 510, 610, 710, 810, 910.

G. van den Berg vertelt over Luuk (twee-en-een-half jaar) die al de verbinding kan leggen tussen het aantal spekkies en het aantal vingers (zie ook L. de Vet).

A.C. Vuurmans beschrijft hoe Sander (vier-en-een-half jaar) reflecteert op een (on-)mogelijke relatie tussen schoenmaten en leeftijden.

M. van Groenestijn laat zich door Simone (drie-en-een-half jaar) beetnemen als zij haar op de vraag: 'Ga je voorlezen?' antwoordt met: 'Straks.' Want vlak daarna zegt Simone: 'Nu is het straks!'

En H. Scheurkogel heeft ook een 'tijd-AHA' ingezonden. Frans (acht jaar) beweert dat het 'half elf over vijf is' als de klok op acht over half elf staat. Een leuke doordenker.

S. Garst laat een leerling de onzinnige notaties van 'algebraïsche aftrekkingen onder elkaar' doorprikken. Ook voert hij een leerling op, die de leraar eerst een hoop rekenwerk met differentiaalrekening laat opknappen, om hem daarna fijntjes op de puntsymmetrie van de grafiek van $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ te wijzen. (Het ging om het bepalen van punten op de grafiek met een gelijke richting van de raaklijn.)

De eerdergenoemde Liselore van H. Holt blijkt bij sommen als $92 : 4$ gebruik te maken van de eindcijfers van de tafel van vier.

'Het gaat driemaal of achtmaal. Dus de uitkomst is 13 of 23 of 18 of 28. Maar welke het is, weet ik niet.'

Ook een mooi voorbeeld van gebruik van verworven kennis. Dat de kinderen vaak veel meer aankunnen dan we denken, blijkt uit het verslag van S. Steinvooite. Hij verhaalt hoe Sjoerd en Koen uit groep vier (voorheen klas twee), kunnen aantonen dat in een klas van 24 leerlingen elk kind meer dan vier maïskolven kan krijgen als de te verstrekken hoeveelheid 113 is! Dit terwijl het rekenen in groepjes nog niet verder dan tot twintig gaat. Prachtig, hoe mooi schattend die kinderen te werk gaan.



De inzending van L. Lindenskov roept de vraag op of wij wel altijd kunnen begrijpen wat kinderen denken. Wij weten niet of Mallika nu een AHA heeft gehad of maar iets aangenomen heeft.

'We are driving in our car through a flat area in the countryside, so we have a good far-looking view. Mallika (4 years): 'How is it possible to see that it is round?' The parents tell about looking from a rocket and about the globe at home.

Mallika: 'But it is flat, that I can see!'

One week later Mallika points at a drawing: 'Look, in this picture you can see that it's round.'

Two weeks later at breakfast Mallika suddenly breaks out: 'You would think it is flat, but it really is round.'

Een mooi inzicht in wat je modulo vijf rekenen zou kunnen noemen komt van Charlotte Koeckebakker (zeven jaar).

Het gaat om een door haar bedacht spel: 'Niet tot honderd tellen', waarbij je in plaats van vijf, tien, vijftien, ... 'boem' moet zeggen. Maar ze ziet, voordat ze beginnen, dat het eigenlijk niet eerlijk is, want ze zijn met z'n vijven en zo moet mama steeds *boem* zeggen. Op de vraag hoe je dat op kunt lossen, zegt ze:

'Dan doen we het toch tussen de middag als papa er niet is, dan zijn we met z'n vieren.'

Fantastisch! Hoe moeilijk dat tellen is, blijkt wel uit de volgende observatie van Koeckebakker over dezelfde Charlotte, toen ze nog zes was.

Eind september vraagt Charlotte (één van een tweeling):

'Hoeveel nachtjes duurt het nog tot we jarig zijn?'

'We vinden het nog te vroeg om te gaan aftellen', zeggen we. (De tweeling is 31 oktober jarig.)

Even blijft het stil, dan vraagt ze: 'Welke dag is het vandaag?'

Wij: '25 september.'

Ze loopt de kamer uit, komt even later terug en roept: 'Nog 37 nachtjes!'

Wij: '?????'

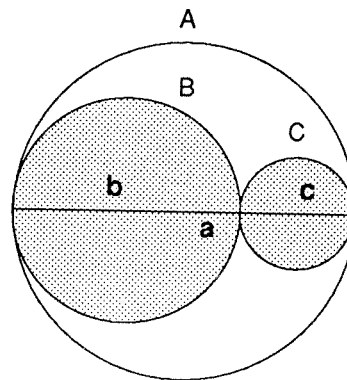
'Nou', zegt ze, 'ik ben naar de WC gegaan, naar de kalender. We zijn 31 oktober jarig, dus dat zijn er al 31, hoeft je niet te tellen. En toen ben ik verder gaan tellen tot ik bij 25 september kwam.' Ze wijst aan: '30 september - 32, 29 september - 33, 28 september - 34, 27 september - 35, 26 september - 36, 25 september - 37.'

Inderdaad een knappe aanpak van Charlotte. Wel jammer dat er niet verder op ingegaan is, want is 37 wel goed? Hier was een mooie gelegenheid geweest om een AHA op te roepen voor het tellen van een aantal objecten en de tussenliggende ruimten (vijf paaltjes, vier tussenruimten).

Een belangrijke AHA, die wellicht velen van ons zelf ook weleens ervaren hebben, is het inzicht in de kracht van het gebruik van algebra om bepaalde eigenschappen tot stellingen te generaliseren.

Dit verwoordt T. Breiteig mooi in het volgende voorbeeld:

'What is the longer way, the half circle A or the sum of the two half circles B and C?'



Trying to measure, Svein found it difficult, but that the two distances seemed to be fairly close. But this is a measure, not a proof. We may guess, but the result doesn't seem obvious. Finding, in a dialogue with the teacher, the simple idea $\pi a = \pi(b+c) = \pi b + \pi c$.

Svein experiences a special satisfaction. He sees that the two distances is *always equal*, and this is proved by the use of variables and an algebraic tool. The result is somewhat surprising, and the strength of the proof and of the mathematical methods do give an aha-experience close to the core of mathematics. When I reflect upon this, I will always remember his smile, covering all his face.'

Met alle waardering voor de voorgaande inzendingen; we moesten tot een keuze komen voor de beste inzendingen. De drie prijswinnaars zijn:

Anita Winning uit Kassel (Duitsland), Ed Elbers uit Utrecht en Fred Pach uit Amsterdam.

En hier zijn de bekroonde inzendingen die volgens ons voor zich spreken:

'Sternchenrechnung

In meiner ersten Klasse wurde immer zu Schulschluss entschieden, ob eine Tischgruppe ein Sternchen erhielt (für Flüstern beim Arbeiten, schnelles und leises Aus- und Einpacken ...) oder einen Sternchenfresser (für störendes Verhalten, Trödeln ...).

Bei fünf Sternchen gab es Hausaufgaben-frei, und die Zählung begann neu. Als für Marcus' Gruppe zuerst wieder ein Sternchenfresser eingetragen wurde, rief Marcus entsetzt: 'Oh je, jetzt brauchen wir statt fünf Sternchen sechs bis zum Hausaufgaben-frei!' Er erklärte: 'Der Sternchenfresser hat ja noch einen leeren Bauch. Also: ein Sternchenfresser + sechs Sternchen = fünf Sternchen.'

(inzender: Anita Winning)

'Ik zit met mijn dochter Clara (zeven jaar en elf maanden) in de bus op weg naar de stad. Clara vertelt dat ze de tafels van 0, 1, 2, 3 en 4 al heel goed kent, dat ze de tafels van 7 en 8 zo moeilijk vindt en dat ze de tafel van 9 nog niet heeft gehad. Ik begin haar te vragen: 'Hoeveel is 7×2 ?', en daarna: 'Hoeveel is 2×7 ?' en zo door met 8×2 en 2×8 , 7×3 en 3×7 , 8×3 en 3×8 , enzovoort. Nadat we op die manier enige tijd hebben gerekend, is het even stil. Dan zegt Clara ineens: 'De tafel van 9 is het makkelijkst; daarvan hoef je alleen 9×9 te leren.'

(inzender: Ed Elbers)

'Suzanne was acht toen op een avond ter sprake kwam dat na zestig en zeventig eigenlijk achtig in plaats van tachtig zou moeten komen.

Over de rest werden we het toen ook snel eens: eentig, tweentig, dertig, veertig. En honderd wordt dan tientig, stelde ik voor. 'Nee hoor', zei Suzanne, die beter had nagedacht, 'dat wordt eentigtig.'

(inzender: Fred Pach)

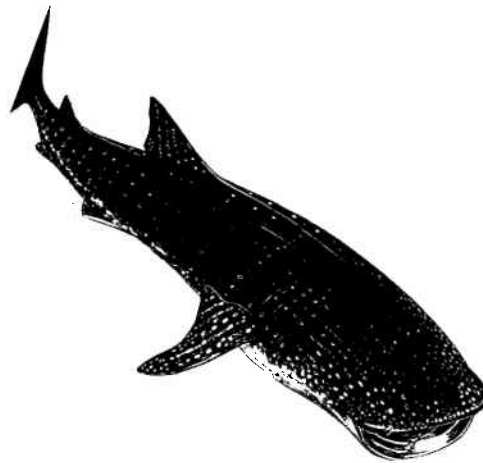
Aan de prijswinnaars zal het laatste boek van professor Hans Freudenthal *Revisiting Mathematics Education* toegestuurd worden.

Tot slot willen we nog één inzending onder de aandacht brengen. Het betreft die van A. Veltman, groepsleerkracht van de Marijkeschool, een school voor Zeer Moeilijk Lerende Kinderen (ZMLK-school) te Wageningen. Haar inzending was getiteld: *AHA, een haai!* en werd ingeleid met de volgende informatie:

Walvishaai

De grootste onder de haaien. Ze kunnen wel 18 m lang

zijn en tegen de 7000 kilo wegen. Geen angst. Deze ongewaarlijkke reus houdt alleen van klein plantaardig voedsel.



Marliske (zeventien jaar), leerling van de genoemde ZMLK-school, heeft speciale belangstelling voor haaien. Toen zij bovenstaande in het jeugdtijdschrift 'Wapiti' (nummer 5, september 1989, pag.6) in de klas zag, begon zij direct te lezen... en te rekenen:

'Een walvishaai kan 18 meter lang zijn!', leest Marliske.

'Weet jij nog hoe lang dat is?'

'Nee, wel heel groot, denk ik.'

'Zal ik eens kijken?'

'Ja..... ik ben eigenlijk wel erg benieuwd.'

Marliske pakt de meetlat (1 m) en legt deze op de grond. Ze gaat ernaast staan. Ze loopt van de muur 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tot aan de buitendeur.

'Zal ik de deur openmaken of teruglopen? Wat denk je?'

'Open, dan kun je het goed zien', ze loopt recht vooruit..... 16, 17, 18. 'Zo groot dus.' 'Ongelooflijk groot hè!'

Aan deze ontroerende observatie willen wij een bijzondere vermelding wijden en een extra prijs toekennen in de vorm van het boek *Realistic Mathematics Education in Primary School*, dat uitgegeven werd ter gelegenheid van de naamgeving van het Freudenthal instituut. Wat zou Hans Freudenthal, de observator bij uitstek van interessante leerervaringen, enthousiast geweest zijn over zo'n leerervaring.

Wiskunde als echte beleving op elk niveau!