Een veelvlak kantelt vaak voordat het valt

Puzzelrubriek

A.J. Goddijn
Freudenthal instituut, RU Utrecht

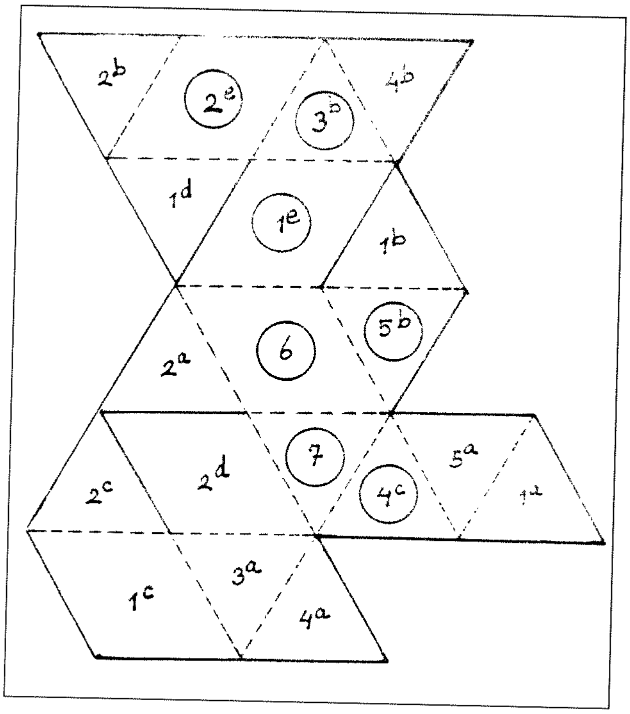
Overzicht

Deze aflevering van de puzzelrubriek maakt dankbaar gebruik van reacties van lezers van de Nieuwe Wiskrant op de vorige twee afleveringen. Bouwplaten (netwerken, uitslagen: noem ze wat u wilt) en doorsneden kwamen daarin voor. Ik stel u daarom ook het programa DOORZIEN van Michiel Doorman voor; het programma heeft (onder andere!) op die twee gebieden schitterende mogelijkheden.

Een veelvlak dat in de pers vorig jaar veel aandacht heeft gekregen, is de zogenaamde Buckyball. Die kent u al jaren van het voetballen, maar chemici hebben hem onlangs uit zestig koolstofatomen samengesteld.
Hun Buckyball is geel. Wij schillen hem af als een banaan met het programma DOORZIEN èn klassiek als een appel met een in ALCOR geschreven programma.
Er moet daarna maar weer eens een minder meetkundige vraag aan de orde komen voor de volgende keer. De vraag is: behandelen wij onze cijfers wel als gelijken? Onderling gelijk dan. Een blik op de logaritmetafel doet het ergste vermoeden: significant meer énen dan andere cijfers achter de komma, en nog behoorlijk chaotisch ook.
De lezer wordt gevraagd andere functies, zoals de wortelfunctie, op rechtvaardigheid te onderzoeken. Volgende keer informatie over cijfers zoals ze in de krant staan. Ook daar: meer enen dan tweeën!
Enkele bronvermeldingen besluiten deze aflevering. De eerste vertelt waar de titel van deze aflevering vandaan komt: uit 'Liedje' in de bundel 'Tegen het vegetarisme' van D. Hillenius (1961). Zie bladzijde 22 van de vorig jaar uitgegeven 'Verzamelde Gedichten'.

Zonder plakrandjes, toch een zevenvlak

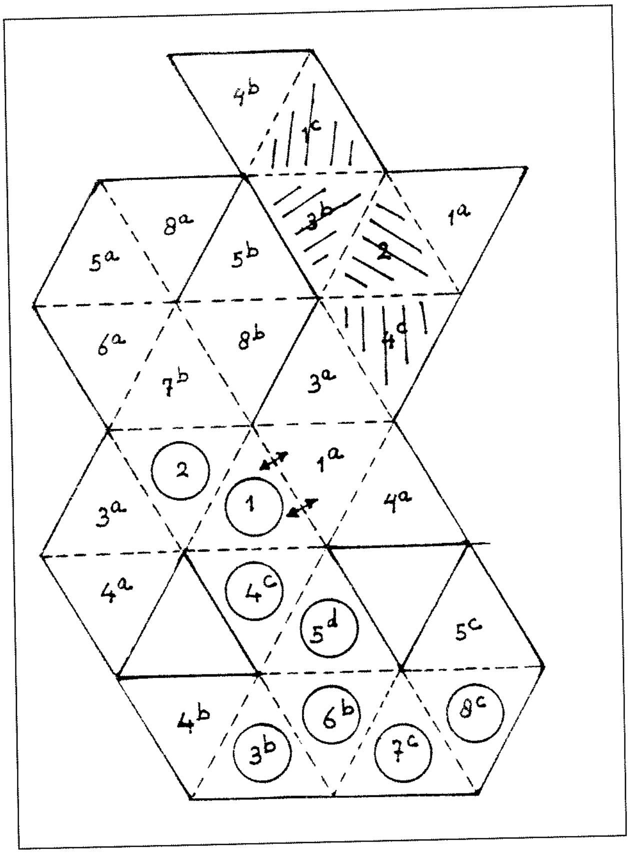
Rob Oord zond ons de volgende bouwplaat van de 'Wandering Rock' van opgave 72.



Er zijn geen plakrandjes, want deze kan zonder. Rob Oord geeft de volgende toelichting:

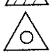
--- vouwen
— snijden
vlakken met een O worden de buitenkant;
vlakken met een zelfde nummer komen op elkaar;
letters komen van binnen naar buiten op elkaar;
sommige vlakjes moeten later worden ingeschoven;
bijvoorbeeld: 1b tussen 1a en 1c;
begin met 2d op 2c.

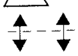
Een tweede bouwplaat lost tegelijk opgave 72b op. Hier ontstaan een viervlak en een achtvlak, scharnierend aan elkaar, zodat schitterend de opbouw van de Wandering Rock uit twee delen is te zien.



Nog enige toelichting van Rob Oord:

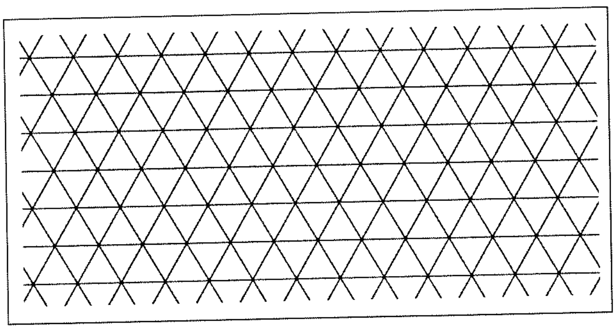
 vormen de buitenkant van het viervlak, nrs 1 t/m 4;

 vormen de buitenkant van het achtvlak, nrs 1 t/m 8;

 scharnierlijn tussen viervlak en achtvlak;

begin het achtvlak met 4d op 4c.

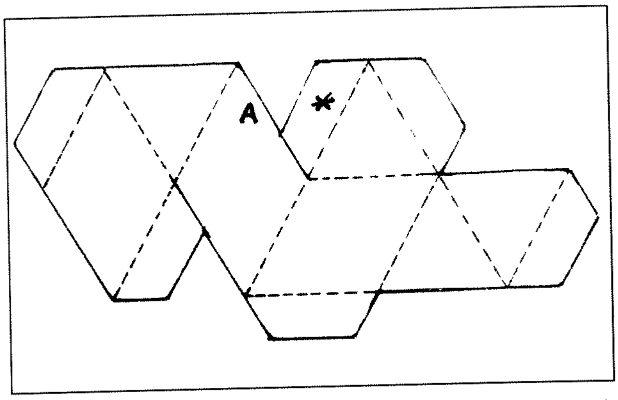
Rob Oord noemt als hulpmiddelen nog het POLYDRON constructiemateriaal van Intag Schoolexpres (Lelystad), de PYRIX-puzzel van Enpros Novelty Products B.V. (Nieuwerkerk) en het handige isometrisch papier. Dat papier is voorbedrukt met gelijkzijdige driehoeken:



Mooi is in de Wandering Rock te zien dat drie vlakken van het viervlak overlopen in vlakken van de octaëder. Bij een halve octaëder (een vierzijdige piramide) en een viervlak gebeurt net zoiets. Vandaar opgave 73!
Een tip voor een andere snijpuzzel neem ik iets verder in deze rubriek op.

Met plakrandjes

Rob Oord geeft ook nog (beter dan de vorige keer afgedrukte oplossing die niet correct is!):



Als we het plakrandje met het kruisje naar de ribbe met A overplaatsen, vinden we op de rand van de bouwplaat afwisselend wel en geen plakrandje. Kan dat met elke bouwplaat, die afwisseling, dat was juist de vraag van opgave 74.

Ronald Keijzer redeneert vanuit de bouwplaat. Die heeft een buitenkant, met afwisselend snijrandjes (S) en plakrandjes (P):
Bijvoorbeeld (schematisch):

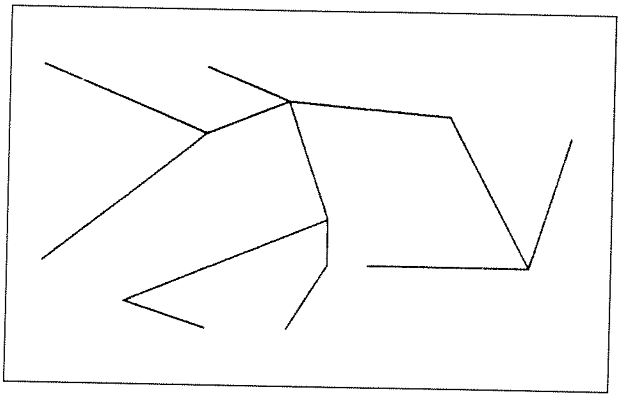
P — S — P — S — P — S — P — S
| |
S — P — S — P — S — P — S — P

De redenering is nu:

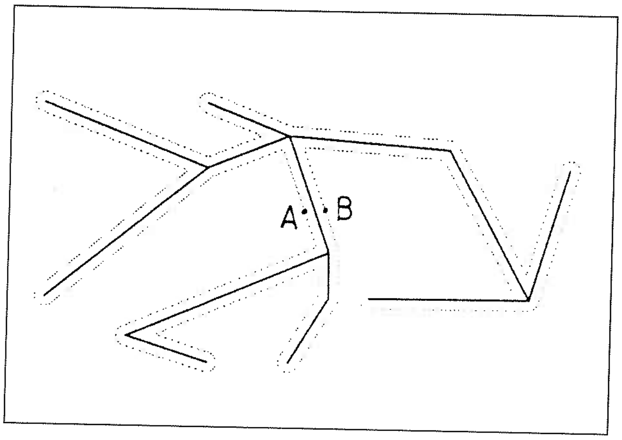
(...) Er is nu in iedere fase van het plakproces een plakrandje (P) en een snijrandje (S) die op elkaar geplakt dienen te worden en (al) een hoekpunt gemeen hebben. Wanneer deze twee op elkaar geplakt worden, blijft de structuur boven gelijk. We kunnen het proces voortzetten totdat alle P's aan een S geplakt zijn. (...)

Een goede redenering, maar gaat die eerste aanname wel op?
Ik weet dat fietsenmakers (vroeger) nog wel eens een stukje van een paar centimeter uit een binnenband wegknipten en dan de einden weer aan elkaar wisten te krijgen. (Met behulp van het eind van een bezemsteel lukt dat; dat is weer een andere puzzel!). Dàt soort plakken kan niet in bovenstaande redenering. Voor fatsoenlijke objecten zonder gaten is de redenering prima.
Inzender Piet Lemmens denkt vanuit de in elkaar gezette bouwplaat. Denk daarop de lijnen waarlangs geplakt is dik getekend. Die vormen een graaf: punten met lijnen verbonden. (Zie volgende pagina.)

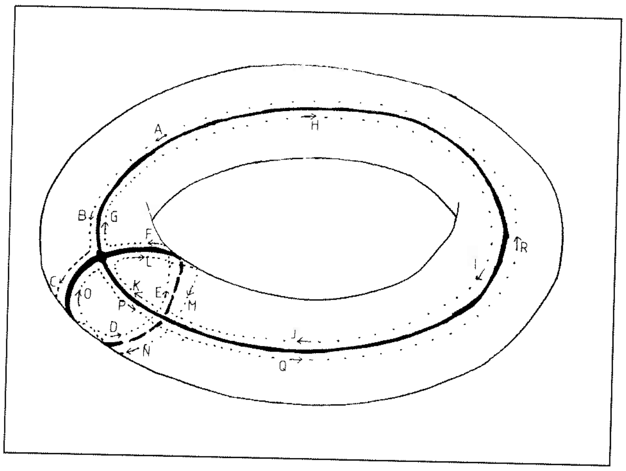
Bij een object zonder gaten komen in deze graaf geen cykels voor. Dat wil zeggen: je kunt er nooit een blokje-



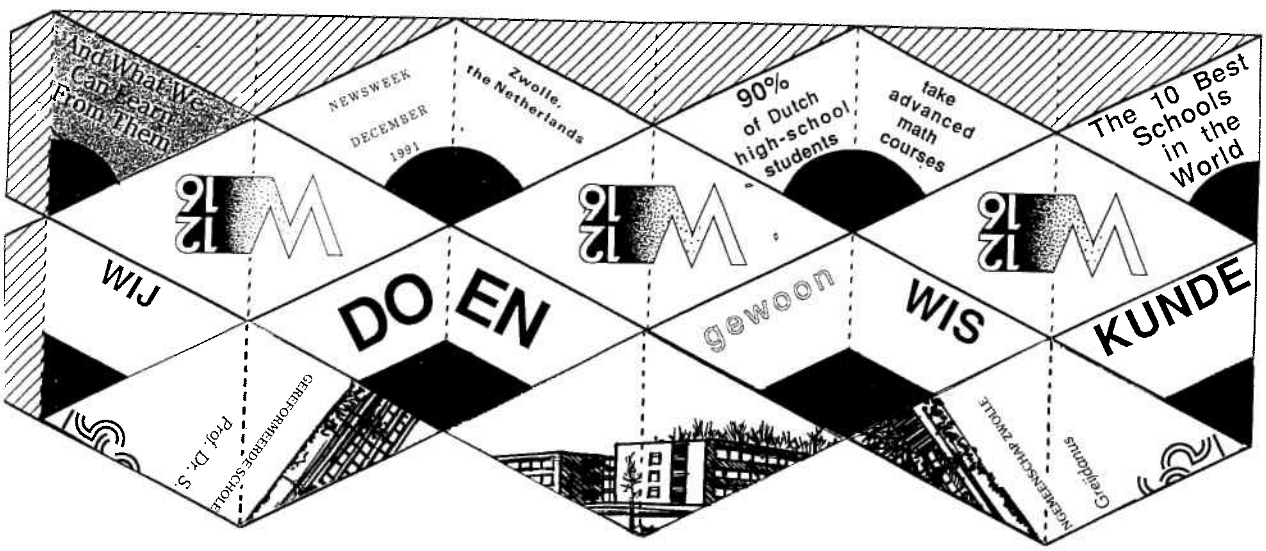
om lopen. Dan zou immers de bouwplaat niet meer één geheel zijn. De rand van de bouwplaat bevindt zich aan 'weerszijden' van de graaf:



Als je nu bijvoorbeeld van A naar B loopt over de stippellijn, dan heb je een even aantal ribben tussentijds ontmoet. Je moest namelijk volgens dezelfde weg terug, want blokjes-om komen niet voor. Piet Lemmens merkt op dat als het object k handvatten heeft, de graaf dan $2k$ cykels zal bevatten. Hij bewijst dit met wat zwaardere middelen dan geschikt voor deze rubriek (homologie theorie), maar we kunnen wel de fietsband als voorbeeld gebruiken. Dat is een voorwerp met één handvat, topologisch gezien dan. Genoemde fietsenmakers knipten de band dwars door, dat is één cykel òp de band. Als je nu de band in de lengte langs een lijn openknipt, ontstaat je bouwplaat, een rechthoek. Op de band is dat je tweede cykel, aangegeven met de dikke lijn.



We gaan nu weer eens wandelen langs de snijrand, volgens de stippellijn.
Je houdt (als mier op de fietsband) de getekende lijn steeds links. Je loopt dan twee lange stukken en twee korte stukken, om en om. De route voert langs A, B, C, D, E, via F tot en met R weer terug naar A. Die stukken (als het een bouwplaat is) kunnen langs méér ribben lopen. Als zo'n cykel een oneven aantal ribben bevat, gaat het mis. Nu eerst een bouwplaat waar zo'n ringvormig object uit ontstaat: een zogenaamde kaleidocykel, waarbij het goed zou zijn gegaan:

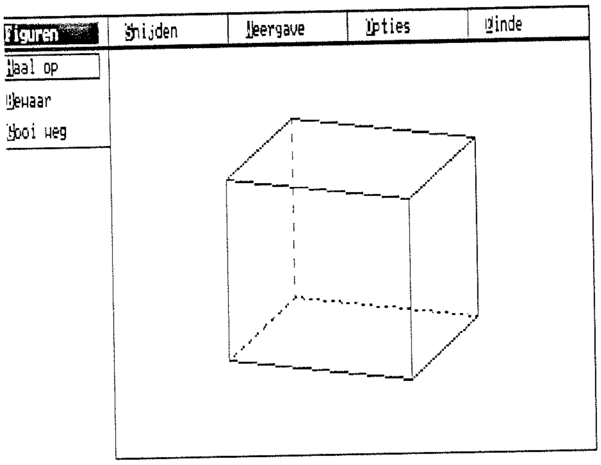


De GSG Prof. Dr. S. Greijdanus heeft het dit jaar (volgens Newsweek) gebracht tot beste school van de wereld wat betreft wiskunde. De bouwplaat van de vorige pagina (ontwerp Mieke Abels) is ter gelegenheid daarvan gemaakt.
Door 'bergvouwen' van alle schuine vouwen te maken en 'dalvouwen' van de stippellijnen, kan het ding eerst, door de gearceerde driehoeken aan hun overkant vast te plakken, tot een slang van zes (niet-regelmatige) viervlakken worden gemaakt. Dan de truc van de fietsenmaker (zonder bezemsteel) en de kaleidocykel is klaar.

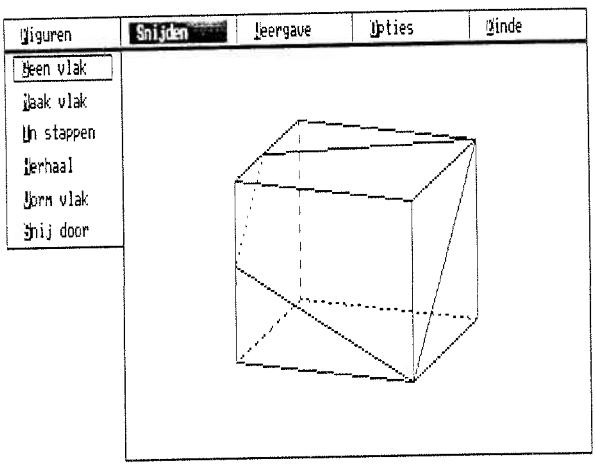
Opgave 76
Ontwerp een bouwplaat waar het wèl mis gaat als de plakrandjes en snijrandjes om-en-om worden geplaatst!

Doorzien

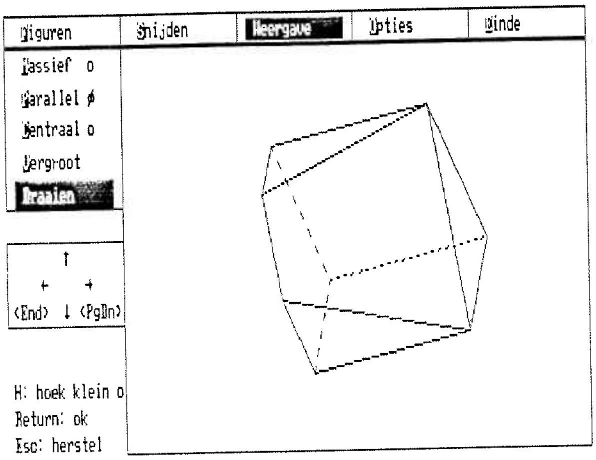
Het computerprogramma DOORZIEN van Michiel Doorman geeft de gebruiker – bedoeld is een leerling – de mogelijkheid ruimtelijke objecten door te snijden, het snijvlak te laten schuiven, stukken van alle kanten te bekijken, enzovoort. Alles op het scherm, maar met verbluffend eenvoudige bediening.
Hier is een kubus gekozen via de optie 'HAAL OP':



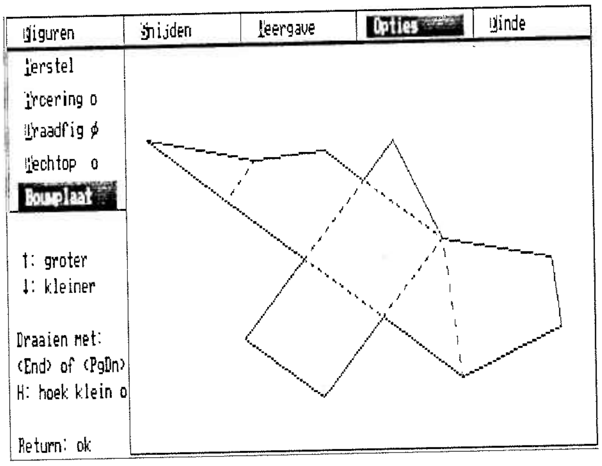
Met sturen (met pijltjestoetsen of, handiger, met een muis) kan een doorsnijvlak worden aangegeven:



We kiezen het achterste stuk en draaien het wat:



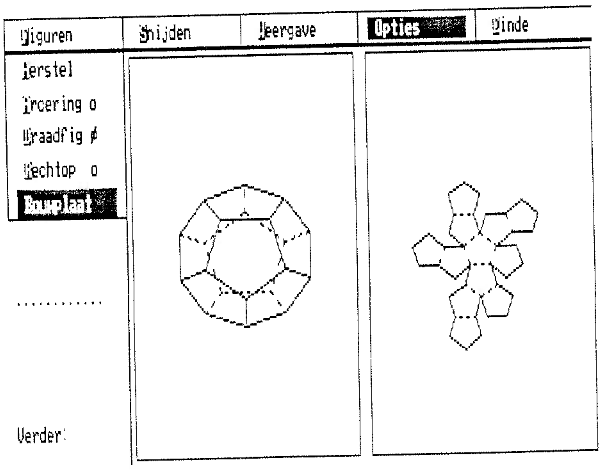
Tot slot van deze demonstratie kiezen we de optie 'BOUWPLAAT'. Resultaat:



DOORZIEN wordt gebruikt in de experimenten van het W12-16 project en komt binnenkort op de markt.

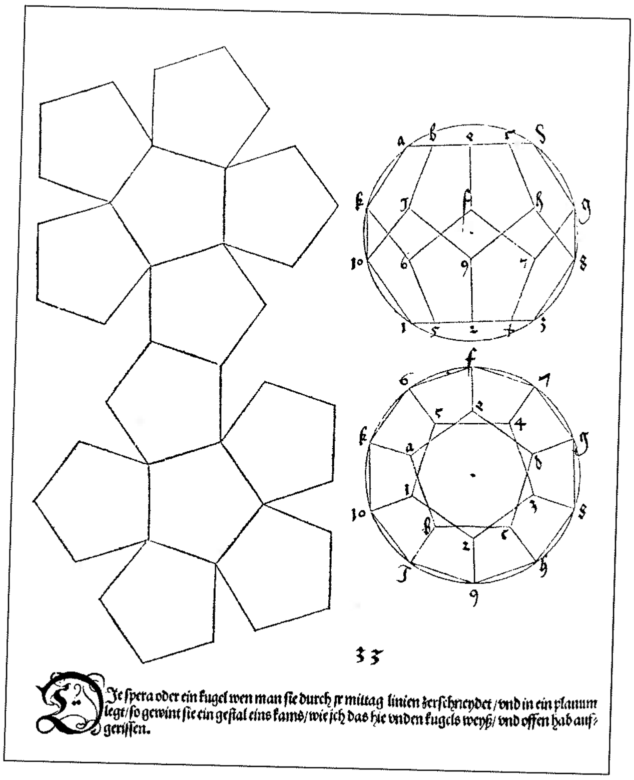
Even tussendoor (de tip van Rob Oord).

Opgave 77
Snijd een tetraëder (regelmatig viervlak) met één vlak in twee gelijke delen. (De delen zijn dus niet elkaars spiegelbeeld.)



We gaan nu DOORZIEN op het regelmatig twaalfvlak loslaten. Op de vorige pagina ziet u twaalfvlak en uitslag naast elkaar.

Begrijpelijk is dat er nogal wat mogelijkheden zijn om de twaalf vijfhoeken op een juiste manier aan elkaar te leggen, maar deze had u niet verwacht. Eerder zoiets:



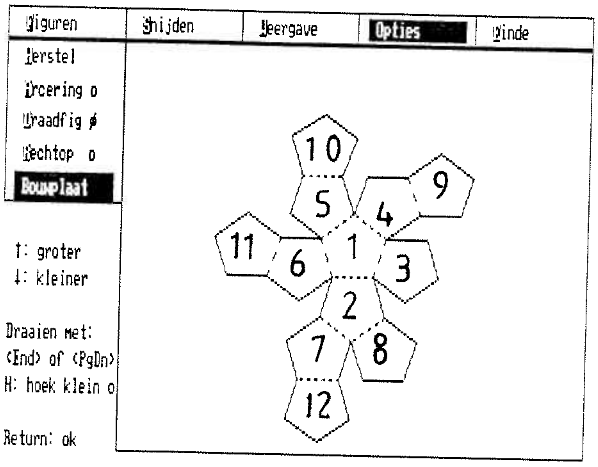
De illustratie is van Albrecht Dürer. Het twaalfvlak is in twee helften ontleed, die zitten met één ribbe aan elkaar. Heel overzichtelijk! Weer even tussendoor:

Opgave 78
Dürer tekent ook boven- en zijaanzicht van het twaalfvlak, doorzichtig, in de omhullende bol. Er is iets mis mee. Wat?

DOORZIEN moet één algemene manier hebben om de vlakjes aan elkaar te leggen, zonder aanzien van het specifieke geval. Zoiets heet een algoritme.
Het werkt zo:

Breadth-first algoritme voor bouwplaten
Kies een beginvlakje. Leg de aanliggende vlakjes eromheen. Kijk of er om de nieuwe rand nog vlakjes moeten. Ga zo door tot het klaar is.

Als de computer wat traag is, kun je nog net zien dat het in deze volgorde gebeurt:



Het beginvlakje is nummer 1. Dan de vijf eromheen, de eerste ronde. Bij de volgende rondgang komen 7 tot en met 11 aan de beurt en uiteindelijk blijft bij de derde ronde nummer 12 over; die zit inderdaad aan de éérste van de derde ronde.
Het algoritme van DOORZIEN is een 'breadth-first' algoritme. Het werkt in de breedte, gaat niet op de eerste stap door, maar doet stappen ernaast, en komt later bij die eerste terug. Het gevolg is een mooie compacte bouwplaat. Je hoeft vanuit het midden niet zover om de rand te bereiken.

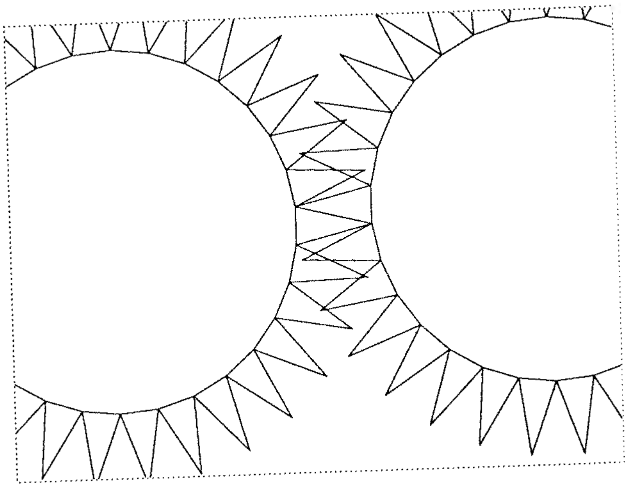
Kan dat zo maar?

Er was enige discussie of het wel goed zou gaan. Het algoritme let alleen op de volgorde van de vlakjes die neergelegd worden en gelooft het verder wel. Twee lezers van de Nieuwe Wiskrant, Ronald Keijzer en Piet Lemmens, lieten aan de hand van voorbeelden zien dat het mis kon gaan: dat er inderdaad vlakjes over elkaar kunnen komen te liggen als je daar niet op let. Dat beantwoordt opgave 75.
Ronald Keijzer vond het makkelijker dan de opgave suggereerde.

'Neem bijvoorbeeld twee regelmatige 1992-hoeken, met zijde 1. Neem verder 3984 congruente gelijkbenige driehoeken met basis 1 en hoogte 2. Plak de driehoeken met de basis op de 1992-hoeken. De gezochte convexe figuur ontstaat nu wanneer de zo ontstane 'sterren' in elkaar geplakt worden. De tophoeken op de hoekpunten van de 'andere' 1992-hoek.'

Als je twee veelhoeken met hun driehoekjes hebt omhuld en je legt ze aan elkaar, dan ontstaat de ellende, zie de volgende pagina.
In het midden bijten de tanden elkaar! Dat is dan wel met een 30 hoek, maar toch nog heel overtuigend.

Opgave 78 (Eenvoudig!)
Ronald Keijzer merkt nog op:



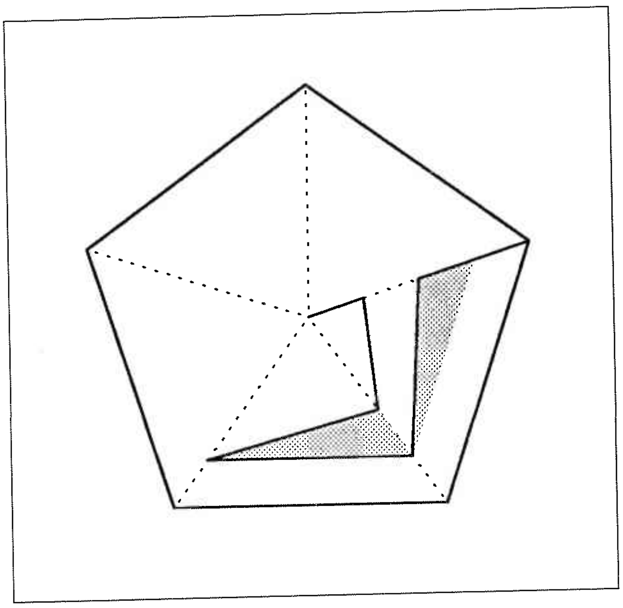
'Op een andere dag dan vandaag had ik de regelmatige 1992-hoeken wellicht vervangen door regelmatige 10- of 12-hoeken. Dat geval is ook eenvoudiger te concretiseren.'

10 of 12, dat is wel goed, maar hóe laag kun je gaan als we de hoogte van de driehoeken niet op 2 hoeven vasthouden?

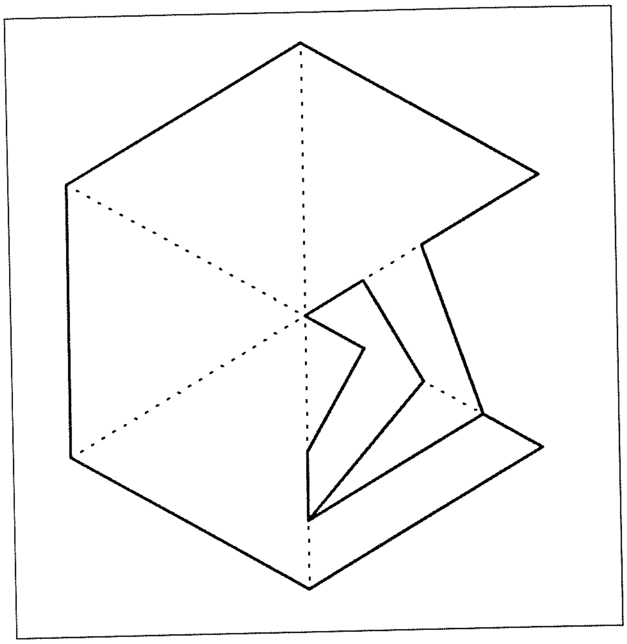
Ook Piet Lemmens liet zich uitdagen door de gesuggereerde moeilijkheidsgraad:

'Voornamelijk wegens jouw opmerking 'Het is een lastige!' bij opgave 75, heb ik besloten om ook maar eens een reactie in te sturen.
Ik neem namelijk een kap van een icosaëder (vijf gelijkzijdige driehoeken), zie tekening, en snijd die van boven gezien open langs de getekende dikke lijn. Dan kan de kap worden uitgevouwen op een plat vlak, en daarbij overlappen de gearceerde stukken elkaar. Uiteraard is er een enorme vrijheid om van de kap een triangulatie te maken die past bij de snijfiguur. Ditzelfde geldt voor het aanvullen van de kap tot een convex (gesloten) veelvlak.'

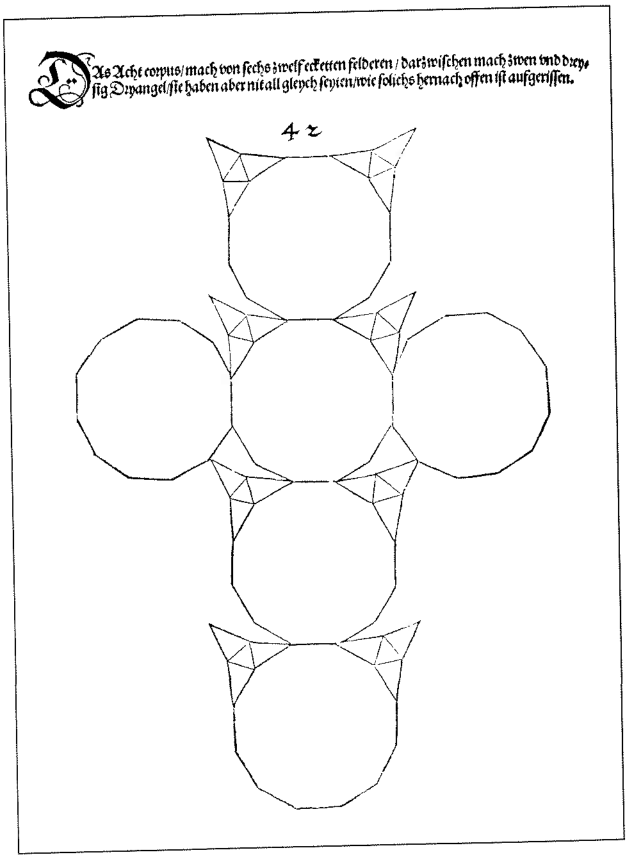
Hier is de tekening, het kapje van boven gezien dus:



Voor de duidelijkheid de uitslag van het kapje:



Het idee is simpel, maar je moet er maar op komen. Als echt wiskundige laat Piet Lemmens de eenvoudige aanpassing om er een convex ding van te maken aan ons over. Hier en daar een tikkeltje op laten zwellen en sommige vlakjes daarbij in driehoekjes indelen is genoeg, de totaalvorm van de bouwplaat hoeft daarbij niet zo erg te veranderen dat de overlap verdwijnt.
Ik zou me schamen na deze elegante voorbeelden nog het rare afgehakte balkje te laten zien dat we (Michiel en ik)



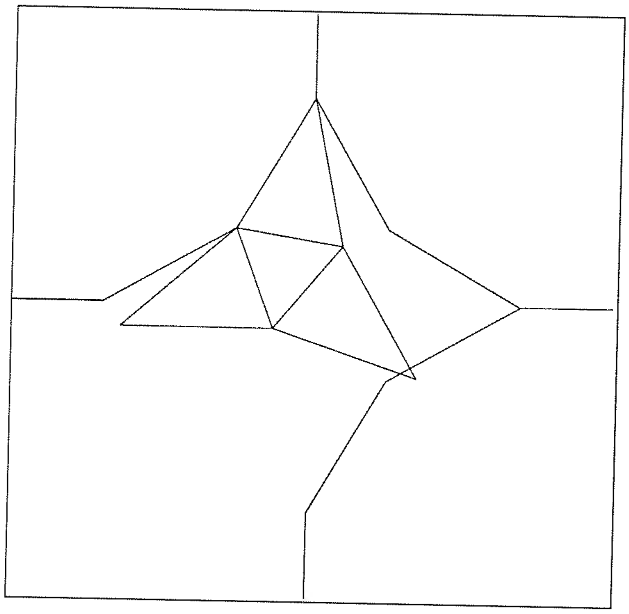
op het scherm kregen, met overlappende bouwplaat. We konden het uiteindelijk wel met heel weinig vlakjes: 7.

Opgave 79
Maak zo'n ding met misschien nog minder vlakjes!

Zelfs Dürer

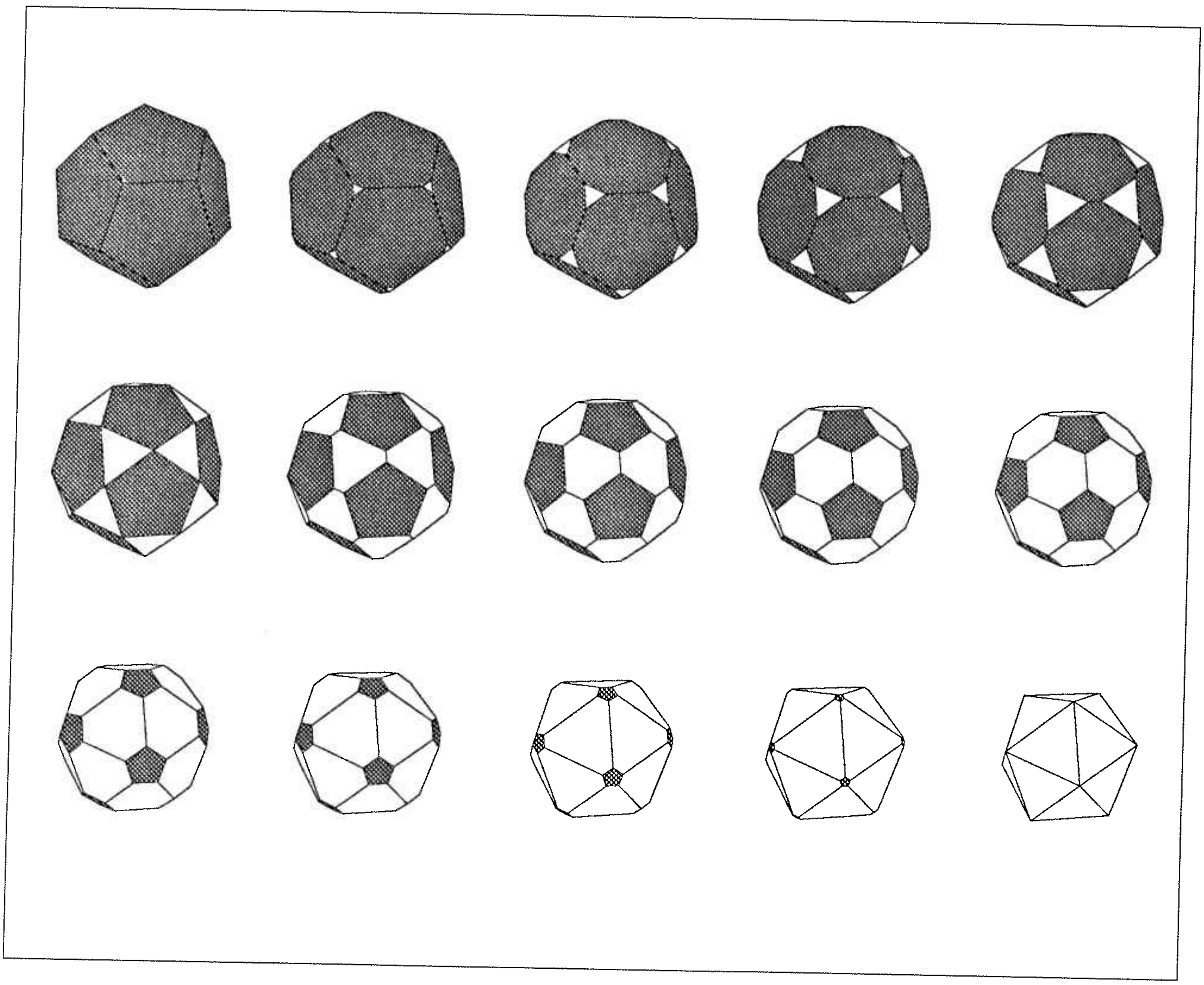
Om heel andere redenen dan het maken van deze puzzelrubriek bladerde ik in *Underweysung der Messung mit dem Zircel und Richtscheyt* van Albrecht Dürer. Het boek gaat over meetkunde zoals schilders en tekenaars die nodig hadden in Dürers dagen. Er blijken veel uitslagen van ruimtelijke objecten in te staan. Mijn oog viel op deze 'afgevijlde kubus'. (Zie vorige pagina.)

Na even kijken zie je: dat kan nóóit passen. De zes twaalfhoeken vormen een kubusachtig geheel, met afgeronde hoeken. Maar die kleine driehoekjes, dat kan zo niet. Er moet meer lucht tussen zitten. Nauwkeurig tekenen van één detail levert de illustratie hiernaast.



De heer Dürer wordt bedankt voor deze goed verstopte inzending bij opgave 75!

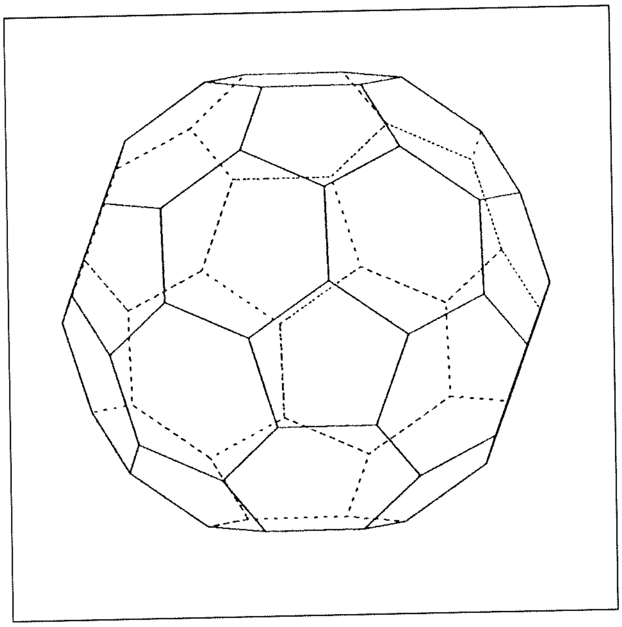
Van 12 naar 20 via allerlei 32-en



Dit is zo'n illustratie die eigenlijk geen tekst behoeft. Je ziet dat het een filmpje van vijftien beelden is, dat op de twintig hoekpunten van het twaalfvlak vijlen worden gezet, dat langzamerhand steeds meer wordt weggevijld, dat uiteindelijk het twintigvlak ontstaat.
Enkele stadia uit de film hebben namen:

a. 1e regel, helemaal links: *dodecaëder*, ofwel regelmatig twaalfvlak.
b. 1e regel, tweede van rechts: 12 regelmatige tienhoeken en 20 driehoeken: *afgeknotte dodecaëder*.
c. 2e regel, helemaal links: 12 regelmatige vijfhoeken en 20 driehoeken: *icosidodecaëder*.
d. 2e regel, helemaal rechts: 12 regelmatige vijfhoeken en 20 zeshoeken: *afgeknotte icosaëder*.
e. 3e regel, alleen 20 regelmatige driehoeken: *icosaëder* of regelmatig twintigvlak.

De afgeknotte icosaëder is sinds vorig jaar beroemd onder de naam: Buckyball.
Hier nog één keer, met de achterkant gestippeld:



Even tellen: 12 vijfhoeken, 20 zeshoeken, 32 vlakken in totaal, 60 punten, 90 ribben!

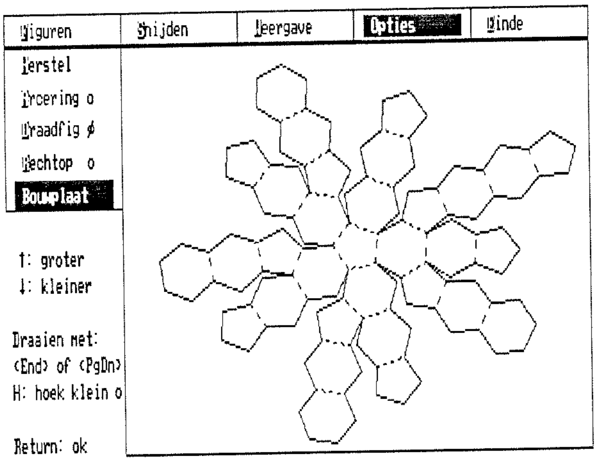
Buckyball

Koolstof kennen we allemaal: in roet (los), in potloden (grafiet), in diamant. Sinds 1990 is er een nieuwe vorm; de moleculen bestaan elk uit 60 koolstofatomen die geordend zijn als de 60 hoekpunten van het 32 vlak, dat uit 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken bestaat.
Het bestaan werd in 1985 in uiterst kleine hoeveelheden aangetoond door Smalley en Curl. Ze voorspelden dat de stof in zichtbare hoeveelheden geel zou zijn. Sinds 1990 kan het redelijk snel geproduceerd worden; Wolfgang Krätschmer en Konstantinos Fostiroupolos lieten zien hoe dat met roet, laserlicht en heliumgas moet. Sindsdien onderzoeken chemici en fysici het goedje met groot enthousiasme. Men verwacht door andere atomen in de bolvormige koolstof moleculen te vangen supergeleiding. In Nijmegen onderzoekt men mogelijke toxische effecten; gelukkig vóór het spul in allerlei toepassingen doordringt!

De naam Buckyball is aan het atoom gegeven omdat de architect Buckminster Fuller dergelijke vormen gebruikte bij het bouwen van koepels. Dan zijn vaak de vijf- en zeshoeken door groepjes driehoeken vervangen.
Bij Schiphol staat er een: het Aerodrome.
De buckyball is sterk: ze veren prachtig terug als ze met 300 km/uur tegen een harde wand worden geschoten. Mag je ook verwachten van zo'n vorm die we allemaal als voetbal allang kennen. De echte buckyball is 10^{-9} meter groot en draait (bij kamertemperatuur) zo'n 10^8 keer per seconde om zijn as.
U weet het al: nu de bouwplaat van de Buckyball.

Appels en bananen schillen

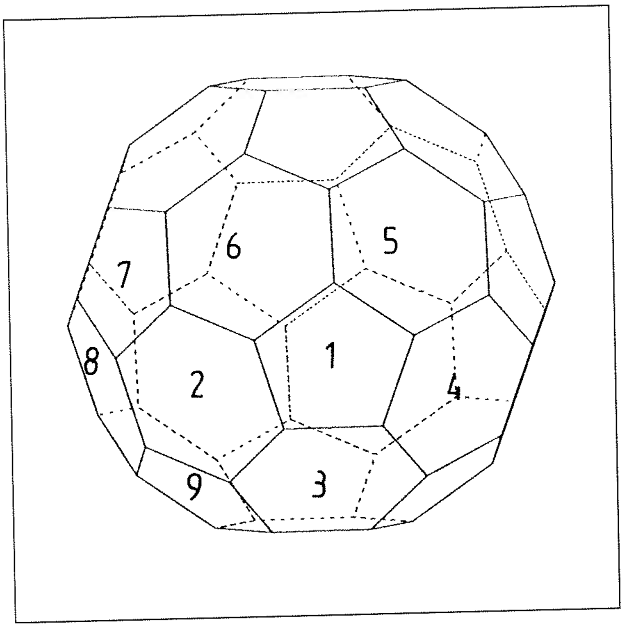
Zo tekent DOORZIEN een bouwplaat van de Buckyball.



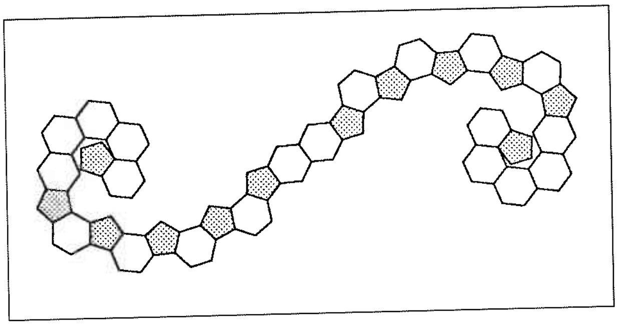
Alles vanuit het centrum, stervormig daarvandaan lopen lange linten. Eigenlijk precies zoals een banaan gewoonlijk geschild wordt.
Het kan anders. Zó:

Depth-first algoritme voor bouwplaten
Kies een beginvlakje. Teken daar vlakjes aan zolang dat nodig is. Maar: teken dan eerst de vlakjes die dáár aanzitten. Maar: teken eerst .....

Een voorbeeld hoe dat dan uitpakt op de buckyball:



Begonnen is op 1. Dan rondom 1 een eerste vlakje kiezen: 2. Voor we het volgende vlakje aan 1 leggen, maken we alles vanaf 2 af. Dus: 3. Vandaar naar 4. Uiteindelijk blijkt dat we helemaal niet meer op 1 terugkomen. Door steeds links aan te houden, ontstaat nu uiteindelijk als bouwplaat:



Afgeschild als een appel!

Programmers only

Programmeurs herkennen de recursie in het Depth-first algoritme. Je hebt – omdat alle ribben gelijk zijn – alleen een lijstje nodig hoe de punten (nr. 1 t/m 60) op de vlakken (nr. 1 t/m 32) liggen.
Nu volgt een suggestie voor mensen die enigszins met LOGO bekend zijn.

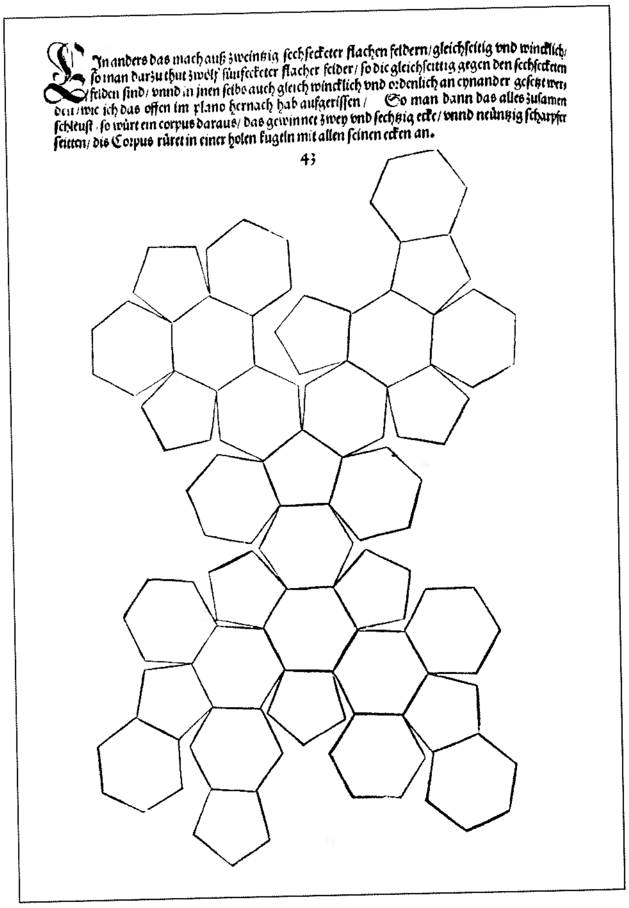
Opdracht 80
Schrijf een procedure die vanuit zo'n lijst correcte bouwplaten tekent. Gebruik schildpadmeetkunde en recursie. Zo'n lijst voor de kubus is bijvoorbeeld:

[[1 2 3 4] [8 7 6 5] [2 1 5 6] [3 2 6 7] [4 3 7 8] [4 1 5 8]]

Maak lijsten voor de objecten van de overloop van twaalfvlak naar twintigvlak, die gelijke ribben hebben (dat zijn er vijf) en geniet van je resultaten.
De tekeningen in dit artikel zijn met een programmeertaal gemaakt die ook over schildpadmeetkunde beschikt. Die taal heet ALCOR, waarbij we ook software hebben voor het W12-16 project. Ook dat is in de niet te verre toekomst beschikbaar.

Eerherstel Dürer

Reeds tweemaal heb ik nu A. Dürer op de vingers getikt. Bij wijze van eerherstel hier Dürers versie van de Buckyball.



Laten we erbij bedenken dat de chemici lang in het duister tastten over de structuur van zo'n zestigpuntig, bolvormig ding. En dat het dus al vier eeuwen beschikbaar was. Of meer dan twintig eeuwen, want Archimedes kende de buckyball ook al!

Nieuwe vragen, heel iets anders

Hier is een ouderwets stukje logaritme- en worteltafel:

n	$\log(n)$	$\sqrt{n}$
7	0.845098040014257	2.645751311064591
8	0.903089986991943	2.82842712474619
9	0.954242509439325	3
10	1	3.16227766016838
11	1.041392685158225	3.3166247903554
12	1.079181246047625	3.464101615137754
13	1.113943352306837	3.605551275463989
14	1.146128035678238	3.741657386773941
15	1.176091259055681	3.872983346207417

Mij fascineerde vroeger die chaos achter de decimale punt. Er was geen patroon in te vinden. Later leerde ik dat als de chaos groot is, toch nog vaak de wetten van de kansen gelden. Op zijn minst moeten die cijfers toch met zo'n beetje dezelfde gemiddelde frequentie voorkomen. Dat lijkt me toch logisch.
We gaan dat eens onderzoeken, we kijken om te beginnen naar de eerste decimaal. Alle cijfers komen daar aan de beurt, dat is duidelijk. Maar hoe vaak?
Spreek af:

succes (a, n) = aantal keren dat de 1e decimaal van $\log 1, \log 2, \ldots, \log n$ gelijk aan a is.

We zijn geïnteresseerd in het succespercentage, of de fractie successen voor n.
Eenvoudig aflezen en turven met een logaritmentabel levert nu bijvoorbeeld:

n	kijk naar drieën: *succes* $(3, n)/n$	kijk naar zevens: *succes* $(7, n)/n$
3	0.3333	0
20	0.1	0.05
217	0.1152	0.0645
315	0.1873	0.0444
1857	0.0318	0.077
2546	0.2258	0.0562
19966	0.0295	0.0722
27309	0.2102	0.0528

Ik zie die fracties nog niet naar één en dezelfde limiet gaan.

Opgave 81
Toon aan dat die limieten niet eens bestaan.

Opgave 82
Doe hetzelfde met de wortelfunctie, $\sqrt{\mathbf{n}}$. *Nu bestaan de limieten wel, en zijn gelijk. Bewijs dat.*

Opgave 81 en 82 zijn – ook al lijkt het niet zo – goed te doen met 'elementaire wiskunde'. Dat geldt waarschijnlijk niet voor:

Opgave 83
Onderzoek net zo $\mathbf{n}*\sqrt{2}$. *De eerste decimaal is netjes gespreid over 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. De andere decimalen ook.*

Voor 'kenners' is dit bekend en 'simpel', voor anderen wel te verwachten maar allerminst direct bewijsbaar.
Men zij gewaarschuwd en uitgedaagd. Heel simpel is weer – als je het juiste trucje vindt –:

Opgave 84
Neem nu $(\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{2}})^{\mathbf{n}}$. *Alleen 0 en 9 komen op den duur serieus voor in de tabel. De rest verdwijnt. Probeer maar met een rekenmachine en verklaar dit.*

Volgende keer meer over de merkwaardige ongelijkheid waarmee wij onze cijfers in de praktijk behandelen, een stukje theorie bij nr. 83, en de decimalen van π.

Bronnnen

[1] Hillenius, D.: *Verzamelde Gedichten*, G.A. van Oorschot, 1991.

[2] Smalley and Curl: *Fullerenes*, Scientific American, oktober 1991.

[3] Dürer, A.: *Underweysung der Messung mit dem Zircel und Richtscheyt*, herziene versie, Neurenberg 1538.

[4] Wenninger M, J.: *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, 1971.