Een onzinnig, leuk probleem

F. van der Blij
Bilthoven

Hoe maak je een fotokopie die precies twee keer zo groot is als het origineel, met een machine die met stapjes van 0.01 iedere vergroting tussen 0.70 en 1.50 kan uitvoeren? Dat was het probleem op pagina 47 van de eerste aflevering van de elfde jaargang van Willem Bartjens.
Nu op pagina 47 van het volgende nummer de oplossing 1.25 * 1.25 * 1.28, maar daar er daarnaast de vraag 'kan tot de helft verkleinen ook?' staat, zal ik maar eens gaan denken en achter het toetsenbord plaatsnemen. [1]
Allereerst, de vraag is onzinnig, want twee keer 1.41, dus 1.9881, zal binnen de nauwkeurigheid van de apparatuur wel niet van 2 te onderscheiden zijn. Overigens, wie beter wil, doet natuurlijk niet 1.41 * 1.41, maar 1.37 * 1.46 = 2.0002. Met een ietsje betere machine zou zelfs 1.13 * 1.77 = 2.0001 gehaald kunnen worden. Helaas lukken 1.9999 en 1.9998 niet, want de ontbinding in priemfactoren:

$$19999 = 7 * 2857$$
$$19998 = 2 * 3 * 3 * 11 * 101$$

laat geen produktvoorstelling met twee factoren tussen 70 en 150 toe.
We zagen al met drie factoren:

$$2000000 = 2*2*2*2*2*2*2*5*5*5*5*5*5 = 128 * 125 * 125.$$

Maar de vraag was of verkleinen tot de helft kan.
Vermenigvuldigen met 0.50 is de vraag om 0.50 te schrijven als een produkt van getallen met twee decimalen achter de komma, alle tussen 0.70 en 1.50.
Eerst wat algemene opmerkingen. We zullen verder over vermenigvuldigen spreken, dat kan zowel vergroten als verkleinen zijn. Als we na n keer vermenigvuldigen een vermenigvuldiging met factor t gekregen hebben, berust dit op:

$$\frac{a_1}{100} \cdot \frac{a_2}{100} \cdot \frac{a_3}{100} \cdots \frac{a_n}{100} = t, \quad 70 \leq a_k \leq 150$$

dus:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = t \,.\, 2^{2n} \,.\, 5^{2n}.$$

De getallen a_k mogen alleen 2, 5 en de priemdelers van t als priemfactoren hebben. Laten we eerst zien naar getallen t die alleen priemfactoren 2 en 5 bezitten, dus bijvoorbeeld 2, 5, 1/2, 5/2, 2/5, enzovoorts.
Welke van zulke vermenigvuldigingen kunnen we verkrijgen en in hoeveel stappen?

Stel $t = 2^p * 5^q$ met gehele, niet noodzakelijk positieve p en q.
Welke getallen a_k met alleen factoren 2 en 5 zijn tussen 70 en 150 beschikbaar?

$$80 = 2^4 * 5^1 = [4,1]$$
$$100 = 2^2 * 5^2 = [2,2]$$
$$125 = 2^0 * 5^3 = [0,3]$$
$$128 = 2^7 * 5^0 = [7,0].$$

Nu is het gebruik van [2,2] natuurlijk onzin.
Verder zien we dat [4,1] gevolgd door [0,3] ook niets teweegbrengt.
We proberen nu x keer [4,1], y keer [0,3] en z keer [7,0].

$$4x + 7z = 2n + p$$
$$x + 3y = 2n + q$$
$$x + y + z = n$$

Wat elementair rekenen levert:

$$y - x = 2p + 5q$$
$$z = p + 2q.$$

Dat we alleen $x - y$ kunnen berekenen klopt, omdat we willekeurig vaak paren x en y mogen toevoegen. We behandelen nu een paar voorbeelden.

$p = 1, q = 0.$
$y - x = 2$
$z = 1;$
dus kiezen we $x = 0, y = 2, z = 1$; hetgeen precies de reeds bekende oplossing geeft.

$p = -1, q = 0.$
$y - x = -2$
$z = -1;$
dus er is geen oplossing; x, y en z moeten immers niet negatieve, gehele getallen zijn. Hiermee is aangetoond dat verkleinen tot de helft niet kan!

$p = -1, q = 1.$
$y - x = 3$
$z = 1;$
oplossing $x = 0, y = 3, z = 1$.
Dus 1.25 * 1.25 * 1.25 * 1.28 = 2.50.

$p = 0, q = 1$.
Duidelijk:
$1.25 * 1.28 * 1.28 = 5.00$.
Het is aardig dat we bij iedere mogelijke vergroting tot nu toe bij iedere stap ook vergrootten. Het zou wat onhandig zijn als we voor een vergroting met enkele procenten eerst een vijftigvoudige vergroting zouden moeten maken en die dan weer vele malen verkleinen. Natuurlijk kunnen we dan beter om en om vergroten en verkleinen. Om een vergroting met een factor 128/125 te krijgen, moeten we oplossen:
$y - x = -1$
$z = 1$;
dus $0.80 * 1.28 = 128/125$.
Maar als we met 1.099511627776 willen vergroten (wie zou dat ooit willen?) moeten we vier keer vergroten met 1.28 en vier keer verkleinen met 0.80.
De vraag of een vermenigvuldiging al dan niet mogelijk is, hangt alleen af van de waarde van $p + 2q$. Als dit getal negatief is, is de vermenigvuldiging niet mogelijk. Aardig is dat van de vermenigvuldigingen met t en $1/t$ er maar één mogelijk is (behalve natuurlijk voor $t = 1$).

Omdat de lezers van Willem Bartjens niet voldoende reageerden ga ik, nu ik een keer bezig ben, lekker nog een poosje door. Vergroten met een factor 3, kan dat ook?
Voor de t moeten we nu gehele getallen met factoren 2, 3 en 5 tussen 70 en 150 zoeken. Het zijn:

$72 = 2^3 * 3^2 * 5^0 = [3,2,0]$
$75 = 2^0 * 3^1 * 5^2 = [0,1,2]$
$80 = 2^4 * 3^0 * 5^1 = [4,0,1]$
$81 = 2^0 * 3^4 * 5^0 = [0,4,0]$
$90 = 2^1 * 3^2 * 5^1 = [1,2,1]$
$96 = 2^5 * 3^1 * 5^0 = [5,1,0]$
$100 = 2^2 * 3^0 * 5^2 = [2,0,2]$
$120 = 2^3 * 3^1 * 5^1 = [3,1,1]$
$125 = 2^0 * 3^0 * 5^3 = [0,0,3]$
$128 = 2^7 * 3^0 * 5^0 = [7,0,0]$
$135 = 2^0 * 3^3 * 5^1 = [0,3,1]$
$144 = 2^4 * 3^2 * 5^0 = [4,2,0]$
$150 = 2^1 * 3^1 * 5^2 = [1,1,2]$

Zouden we de bovengeschetste procedure opnieuw toepassen, dan zouden we twaalf onbekenden moeten invoeren met drie vergelijkingen.
Laten we ons maar beperken tot vergroten met een factor 3. We moeten dan precies één factor benutten met precies één factor 3. We kunnen kiezen uit:
[0,1,2]
[5,1,0]
[3,1,1]
[1,1,2]
en moeten deze factor aanvullen met een combinatie van:
[4,0,1]
[0,0,3]
[7,0,0].

We moeten gewoon de vier keuzen uit het eerste viertal na elkaar onderzoeken, gecombineerd met x keer [4,0,1], y keer [0,0,3] en z keer [7,0,0].
Er zijn drie oplossingen, waarbij de derde een flauwe variant van de eerste is:
$1.50 * 1.28 * 1.25 * 1.25$
$1.20 * 1.28 * 1.25 * 1.25 * 1.25$
$0.75 * 1.28 * 1.28 * 1.25 * 1.25 * 1.25 * 1.25$

Wie wil mag nog factoren 7, 11 of 13 erbij halen, maar de aardigheid is er nu wel vanaf. Misschien is de vraag nog aardig welke factoren $a/100$ met $0 \le a \le 500$ onmogelijk zijn te realiseren. We vonden al $a = 50$, maar er zijn er vast gemakkelijk meer te vinden.

[1] De redactie van Willem Bartjens vond mijn overpeinzingen beter in de Nieuwe Wiskrant dan in Willem Bartjens passen. Misschien een poging om lezers van de Nieuwe Wiskrant op te wekken ook Willem Bartjens te lezen?
Een volgende puzzel in Willem Bartjens was: Zoek breuken, die na ongeoorloofde vereenvoudiging toch een juist resultaat leveren. Bijvoorbeeld:

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}.$$

Er zijn er vast veel meer te vinden, maar het wordt, om het eens geleerd te zeggen, een niet lineaire diophantische vergelijking!