

Wiskundewerklokaal en de lerarenopleiding te Zwolle

N. Verhoef/ D. Bos

Vakcommissie Wiskunde, CHS Windesheim, Zwolle

Inleiding

Met de introductie van het nieuwe leerplan wiskunde voor 12- tot 16-jarigen en de Basisvorming, heeft ook het wiskundewerklokaal zijn intrede gedaan in het wiskunde-onderwijs. Omdat de vakcommissie wiskunde van de lerarenopleiding in Zwolle daarover vragen kregen van buitenaf, is het idee ontstaan om een wiskundewerklokaal te beginnen voor de eigen studenten. Hierin zit een dubbele bodem: als docenten doen we zelf ervaringen op met een wiskundewerklokaal, en onze studenten doen eigen ervaringen op in een wiskundewerklokaal, waarin ze zich later in hun onderwijspraktijk moeten kunnen bewegen.

Ieder jaar kent de lerarenopleiding voor de eerstejaarsstudenten een introductieweek. Dit jaar is gedurende een dag van deze week door de studenten in een wiskundewerklokaal gewerkt aan wiskundige problemen op hun eigen niveau. Het wiskundewerklokaal is een echt werklokaal waar gewerkt wordt, anders dan 'normaal'.

Een lokaal waar niet alleen vragen worden gesteld door de docent, maar waar vragen ontstaan door bezig te zijn met concreet materiaal. Nieuwe ervaringen roepen weer nieuwe vragen op en zo wordt er geleerd. Een lokaal ook waar voor ons als team nog van alles te leren valt. Vooraf hebben wij ons de volgende vragen gesteld:

- Zijn er aspecten binnen de wiskunde die je alleen kan leren door zelf te doen en zelf te ervaren? Welke dan?
- Welke soort vragen moeten we de studenten stellen? Die vragen zullen operationele vragen moeten zijn, vragen waarbij de studenten als vanzelfsprekend naar concreet materiaal grijpen en dat ook blijven doen tijdens het leerproces.

En achteraf:

- Zijn de studenten inderdaad zo leuk bezig geweest zoals wij dachten, of zaten ze de tijd uit te zitten?
- Hebben ze wel vragen aan zichzelf gesteld, of deden ze gewoon wat er van ze gevraagd werd?
- Hebben ze wel zelf dingen geleerd, meer dan ze al wisten?
- Hoe ging het werken in groepen?

Het gevaar is immers levensgroot, dat wij als begeleiders alleen maar zien wat we graag zouden willen zien.

We hebben geprobeerd onderwerpen te vinden die de studenten aanspreken. Bovendien hebben wij erop toegezien dat het budget niet al te veel aangesproken werd bij de aanschaf van allerlei materiaal.

De voorbereiding vergde veel tijd. Vooral die simpele dingen die je vaak op het laatste moment doet, zoals het inrichten van de lokalen en het regelen van de materialen: oase, ijzerdraad, zwaaihaken, lampen en dergelijke, zijn belangrijk voor het slagen van het geheel. Wij hadden 22 studenten en de beschikking over twee identieke lokalen met elk acht onderwerpen. De studenten konden dus echt kiezen wat hen het meest aansprak.

De acht onderwerpen waren allen meetkundig van aard. Al onze pogingen om algebraïsche onderwerpen te vinden, liepen vast op het feit dat de probleemstellingen zo gekunsteld en weinig motiverend leken om eerstejaarsstudenten een dag aan te laten werken. Anderzijds worden de onderwerpen heel snel veel te ingewikkeld, denk maar aan: anamorfismen, zeepvliezen, waterstralen uit de kraan ...

Uiteindelijk zijn wij gekomen tot de onderstaande onderwerpen, omdat wij veronderstelden dat deze het meest rijk waren aan oplossingswegen en het meest breed betreffende de te kiezen materialen om tot oplossingen te komen.

De onderwerpen zijn:

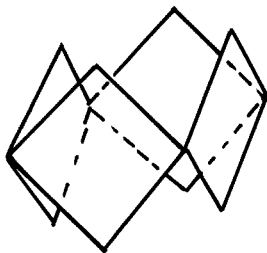
- antenne
- oorbel van Nellie
- oorbel van Anna
- design-vaas
- kaarsenstandaard
- klapkubus
- G/E/B-blok
- kubus en cilinder in overgang

Vooraf kregen de studenten de opdracht alleen of in koppels één van de acht opdrachten te kiezen. Tijdens het werken aan de opdracht maakte ieder voor zichzelf aantekeningen betreffende het verloop van het leerproces. Aan het eind van de dag presenteerde elke student(e) zijn of haar werk en vertelde daarbij ook over het doorlopen leerproces.

Uitwerking van de onderwerpen

Antenne

Op sommige caravans is een antenne te vinden die er zó uit ziet:



Vier vierkanten op een punt, gerangschikt in de hoekpunten van een evengroot vierkant. Zo'n antenne ligt in het wiskundewerklokaal klaar.

Aanwezige materialen

- koperdraad
- tang, om te buigen en te knippen
- plakband, papier
- tekenmateriaal, rekenmachine
- ruitjespapier
- huishoudfolie

Opricht

1. Maak de antenne tot een ruimtelijke vorm.
2. Maak de kleinste doos waarin de vorm past.
3. Leg de vorm op verschillende manieren op tafel neer en teken steeds een bovenaanzicht.
4. Zou je hiermee de ruimte kunnen vullen? Hoe dan?
5. Als de ribbe r is, wat is dan de oppervlakte en wat de inhoud?
6. Hoe ziet de doorsnede eruit op hoogte h ?

Oorbelt Nellie

Niemand heeft ooit de oorbellen van Nellie gezien, maar ze liggen in het wiskundewerklokaal klaar (zie schets).



Aanwezige materialen

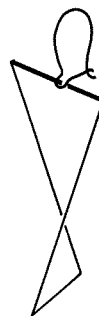
- oase, mes
- papier, plakband, lijm
- tekenmateriaal
- schaar, stevig papier, gekleurd papier

Opricht

1. Uit welke vorm kun je de oorbelt snijden?
2. Maak de oorbelt na.
3. Verander de hoek tussen de beide ruiten en maak een andere oorbelt.
4. Verander de grootte van de ruiten en maak een nieuwe oorbelt.
5. Ontwerp zelf eens een leuke oorbelt.

Oorbelt Anna

Niemand heeft ooit de oorbellen van Anna gezien. Hoewel, de oorbellen hebben ooit als kunstwerk van vier meter hoog voor de stadsschouwburg van de stad Utrecht gestaan. Ze liggen hier in het wiskundewerklokaal (zie schets).



Aanwezige materialen

- koperdraad
- tang, om te buigen en te knippen
- ruitjespapier
- huishoudfolie

Opricht

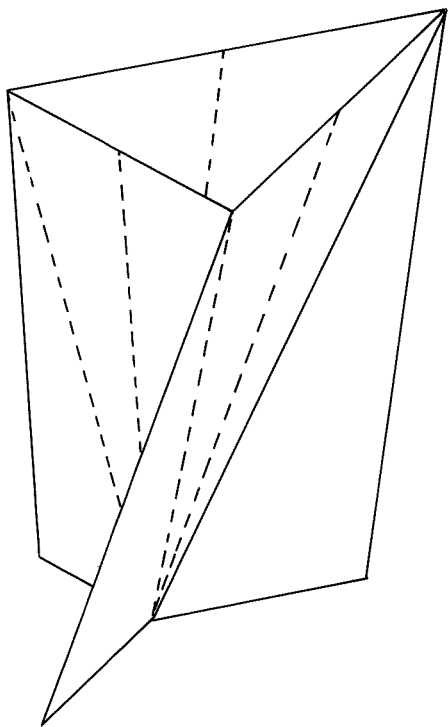
1. Maak de oorbelt van Anna na.
2. Uit welke ruimtelijke vorm kun je de oorbelt maken?
3. Is de ruimte met deze vormen te vullen?
4. Verdeel de inhoud in tweeën. Welk voorwerp houdt je over?
5. Is deze vorm in drie evengrote delen te verdelen? Hoe?
6. Wat is de inhoud van de ruimtelijke vorm, als de lengte van de draad l is?
6. Bij welke lengte van l is die inhoud maximaal?

Design-vaas

De design-vaas, ontwerp van Mart van Schijndel, staat gereed. Een 'echte' waar een stukje aan ontbreekt, en één die we zelf hebben nagemaakt (zie schets op de volgende pagina).

Aanwezige materialen

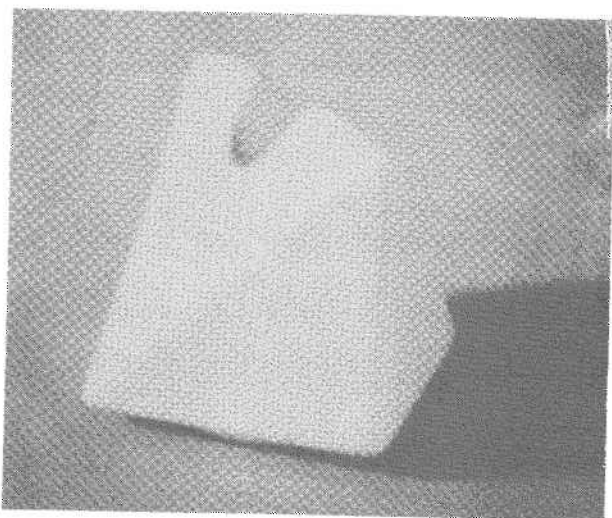
- zwaaihaak
- water
- viltstiften
- stevig gekleurd papier, schaar
- tekendriehoek, gradenboog
- tekenmateriaal



Opdracht

1. Welke eigenschappen hebben de trapezia? Maak de vaas na.
2. Teken een bovenaanzicht, leg de vaas op een kant en teken nog eens een bovenaanzicht.
3. Verdeel de inhoud in twee gelijke delen.
4. Vul de vaas, en teken met een uitwasbare viltstift de hoek tussen beide vlakdelen op de vaas, de zogenaamde standhoek.
5. Meet de hoek na met een zwaaihaak.
6. Teken de doorsnede die het vloeistofoppervlak maakt, als je de vaas vult en kantelt, zodat je de standhoek kunt zien.

Kaarsenstandaard



De kaarsenstandaard staat in het wiskundewerklokaal klaar (gevuld koffiefilterzakje) en is te koop voor f 55,- per set van drie stuks. In zekere zin lijkt de kaarsenstandaard op de Wig van Wallis (zie foto).

Aanwezige materialen

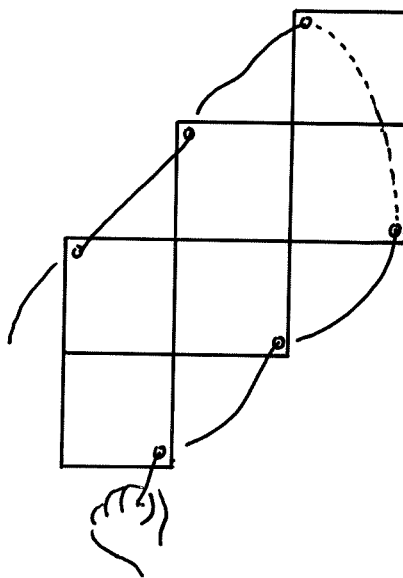
- oase en mes
- liniaal
- rekenmachine
- ruitjespapier

Opdracht

1. Snijd de kaarsenstandaard uit een stuk oase.
2. Wat is de inhoud van de kaarsenstandaard?
3. Varieer de 'nok'. Hoe verandert de inhoud?
4. Snijd een 'dak' van een huis; het grondvlak is rechthoekig, de opstaande vlakdelen maken gelijke hoeken met het grondvlak. Wat is het verband tussen de grootte van het grondvlak en de lengte van de nok?
5. Snijd ook eens een Wig van Wallis.
6. Wat is de inhoud van de Wig van Wallis? Varieer de lengte van de nok. Hoe verandert de inhoud?

Klapkubus

Als voorbeeld ligt er een 'klappend' viervlak (een uitslag dus), als je aan het touwtje trekt, klappen de vlakken een voor een naar binnen. Er ligt ook een non-voorbeeld van een 'klappend' viervlak. Als je aan het touwtje trekt, gaan alle vlakdelen niet een voor een maar tegelijk naar binnen (zie schets).



Aanwezige materialen

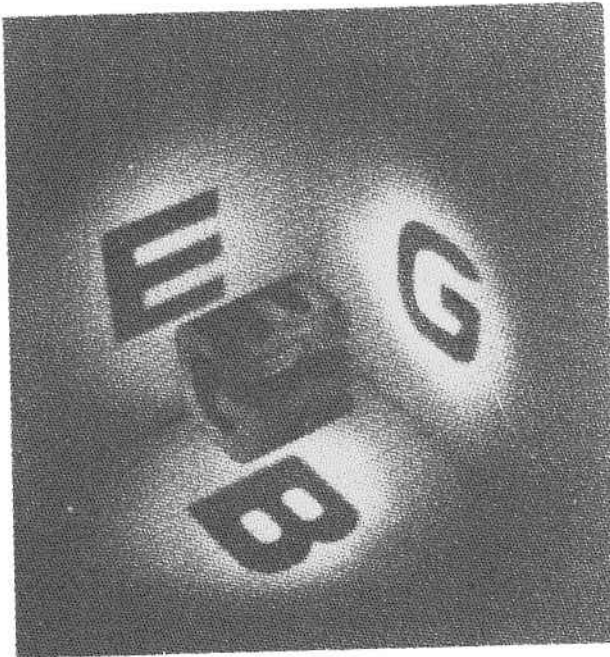
- stevig papier
- nylon draad
- perforator
- tekenmateriaal
- liniaal

Opdracht

1. Zoek eerst alle mogelijke verschillende kubusuitslagen.
2. Selecteer de uitslagen die niet zullen werken en probeer de andere, waarvan je verwacht dat ze wel zullen werken.
3. Maak een 'klappende' balk of blok. Varieer de lengten.
4. Probeer hetzelfde met een piramide. Varieer de lengten.
5. Maak zelf een eigen 'klappend' veelvlak.

G/E/B-blok

Op de omslag van het boek *Gödel-Escher-Bach* van Hofstadter staan blokjes waarvan de schaduw in verschillende onderling loodrechte richtingen een G, een E en een B oplevert.



Aanwezige materialen

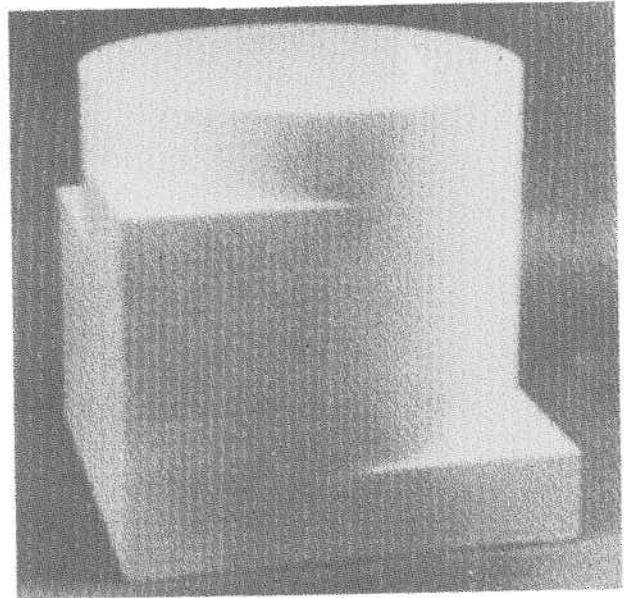
- oase en mes
- geodriehoek
- schetspapier

Opdracht

1. Op de kopie die voor je ligt zie je dat er twee blokjes nodig zijn. Kan het ook met één? Probeer die te maken.
2. Zou je ook een blokje kunnen maken, waarop een X, een Y en een Z staat?
3. Zou je een blokje kunnen maken met drie willekeurige letters?

Kubus en cilinder in overgang

In het Kröller-Müller-museum heeft een kunstobject bestaan, getiteld: Kubus en cilinder in overgang (zie foto).



Aanwezige materialen

- oase en mes
- passer, papier
- rekenmachine
- ruitjespapier

Opdracht

1. Maak de kubus en cilinder in overgang na.
2. Teken de kubus en cilinder in overgang in een assenstelsel.
3. Houd een lampje precies boven het midden van de kubus en cilinder in overgang. Welke schaduwvormen kunnen zich voordoen? Teken die.

Werken in het wiskundewerklokaal

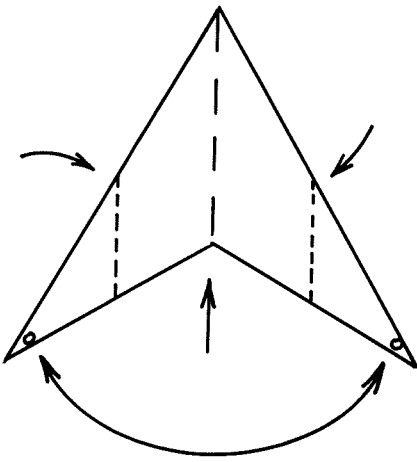
Alle studenten gingen direct en met veel animo aan het werk. De meesten in koppels, twee meisjes gingen alleen aan het werk. Dat leverde drie jongensgroepen, vier gemengde groepen en drie meisjesgroepen op. In de gemengde groepen was het opvallend dat de jongens het werk deden en de meisjes erbij zaten te kijken. Tamelijk rolbevestigend dus is er voor ons als begeleidend docent(e) nog flink wat werk te doen aan bewustwording hiervan.

Een groepje jongens dat aan de antenne werkte, kwam met een heel aardige oplossing. Zij maakten zes piramides met als grondvlak het gegeven vierkant, de punten in het midden tegen elkaar aan. Zij zijn eigenlijk de hele tijd bezig geweest met het maken van de juiste piramides in diverse kleuren. Ze hadden geen tijd voor koffie ... Wat hebben ze geleerd ??

Opmerkelijk was dat ze helemaal niet met de folie aan de gang zijn geweest, ze leerden niet door het handelen op zich, maar begonnen direct te meten en te rekenen. De rekenpartijen leverden de maten voor de verschillende piramides.

Twee groepen werkten aan de oorbellen van Nellie. Een van de groepen, twee meisjes, hebben keurig de oorbellen van papier nagemaakt, stelden zich geen extra vragen, maar leefden zich met name uit in het ontwerpen van eigen oorbellen.

De andere groep, een gemengde, stelde zichzelf nieuwe vragen. Ze ontdekten dat het eigenlijk gaat om twee congruente driehoeken die een zijde gemeenschappelijk hebben. De oorbel ontstaat door de driehoeken te buigen om de gemeenschappelijke zijde en vervolgens elke driehoek afzonderlijk te buigen om een lijnstuk evenwijdig aan die gemeenschappelijke zijde. Het bewuste lijnstuk verbindt de middens van de twee andere zijden van de driehoek. Ze vroegen zich vervolgens af of de hoeken tussen de vlakdelen dezelfde zijn (zie schets).



Verder is de oorbel te snijden uit een balk, of zelfs nog makkelijker, uit een parallellopiëdum. Ze varieerden hoeken en lengtes, maar kwamen niet aan een eigen ontwerpoorbel toe.

Eén meisje heeft in haar eentje aan de oorbel van Anna gewerkt. De oorbel had ze zo gemaakt, gewoon een kwestie van ombuigen.... Op de vraag hoe het nu precies zat, ontdekte ze dat het toch wat ingewikkelder in elkaar zat. Ze liet mij haar helpen en begon vervolgens te rekenen aan de inhoud van de ruimtelijke vorm. 'Rekenen was toch echte wiskunde, maar daar was ze alweer zoveel van vergeten.'

Aan de design-vaas van Mart van Schijndel hebben twee groepen gewerkt. Een gemengde groep en twee meisjes. De meisjes waren beduidend verder gekomen dan de andere groep. Hierbij moet worden aangetekend, dat de begeleiding in beide groepen niet dezelfde was. De gemengde groep had de vaas nagemaakt, en daarmee was de opdracht klaar. De vaas was nog gevuld met water, maar echt iets ontdekken was er niet bij. De meisjes maakten de vaas, ontdekten dat de standhoek in het wateroppervlak te zien is en dat hetzelfde ook met een zwaaihaak is te meten. Ze kwamen zelfs nog zover dat ze

konden aantonen en zelfs bewijzen, dat de doorsnede altijd een gelijkbenige driehoek zal worden. Hier werd dus duidelijk een vermoeden volledig uitgewerkt. Een gemengde groep werkte aan de kaarsenstandaard. Ze sneden hem snel uit een kubus van oase, berekenden de inhoud en maakten de Wig van Wallis. De inhoud daarvan bleek echt te hoog gegrepen.

De klapkubus was een succes. Een groep jongens begon direct met het aantal mogelijke uitslagen van een kubus en ontdekten dat er elf verschillende te vinden zijn. Waarom elf? Zo'n vreemd aantal.... Nader onderzoek heeft uitgewezen dat dat getal elf, een priemgetal, inderdaad klopt!!! Vervolgens gingen ze niet een klappende kubus maken maar een eigen ontwerp, een regelmatig twaalfvlak, en warempel, ze kwamen eruit. Het veelvlak klapte keurig vlakdeel voor vlakdeel naar binnen. Ze ontdekten dat het klappen ging met vijfhoeken, maar niet met zeshoeken.

De andere groep, een groep meisjes, is tijdens bezig geweest om het touwtje zo door de vlakdelen te rijgen dat er inderdaad een klapkubus, die vlak voor vlak oprolde, uitkwam. Het resultaat gaf hun veel plezier, ze hebben het dan ook aan velen gedemonstreerd.

Een ander meisje heeft in haar eentje aan het Gödel/Escher/Bach-blokje zitten werken. Het snijden van het blokje is al niet eenvoudig, daarna komen nieuwe vragen. Lukt het ook met een X, een Y en een Z? Ze heeft het vermoeden van wel, proberen lijkt de beste aanpak, het snijden is weer een hele klus. Het heeft haar overtuigd dat het gaat met elke willekeurige lettercombinatie. Ze heeft ontdekt dat er voorwaarden gesteld moeten worden aan het tekenen van de letters. Inmiddels maken wij als docenten dankbaar gebruik van het G/E/B-blokje. Als je het blokje op een overheadprojector zet, kun je heel eenvoudig de drie aanzichten, voor, zij- en bovenaanzicht demonstren...

Alleen een groep jongens is bezig geweest aan de kubus en cilinder in overgang. Het maken kostte best moeite, ze werkten met papier, oase, een rekenmachine en ruitjespapier. Als de kroon op hun werk ontstonden schitterende formules voor de oppervlakte en de inhoud van de kubus en cilinder in overgang.

Terugblik

Omdat de hele ontwikkeling van het wiskundewerklokaal nog in de kinderschoenen staat, kunnen we nog geen conclusies trekken.

De meest relevante vraag blijft toch of er werkelijk geleerd wordt door het handelen zelf en of dat niet geleerd kan worden zonder het handelen. Er zal ook een afweging gemaakt moeten worden tussen de hoeveelheid werk, tijd en het rendement.

Wij hebben achteraf te weinig aandacht besteed aan de aantekeningen van de studenten over het leerproces. Dat heeft ook aan de instructie vooraf gelegen. Daardoor zijn

we niet toegekomen aan het beantwoorden van onze eigen onderzoeksvragen:

- We blijven ervan overtuigd dat er tijdens het werken in een wiskundewerklokaal andere en vooral creatievere oplossingen van problemen worden ontdekt. Bijvoorbeeld bij het werken aan de oorbel van Nellie en de klapkubus.
- We hadden misschien wat minder theoretische vragen moeten stellen, omdat het vluchten in 'veilige bekende' wiskunde soms te snel gebeurde als het nog niet nodig was.
- Ook blijft het voor ons een vraag welke soort vragen de studenten het meest aanspreekt.



Docenten uit de regio bezig in het wiskundewerklokaal van Windesheim

Wat betreft de vragen achteraf (zie de inleiding): Als je als docent rondloopt in een wiskundewerklokaal gebeurt er veel, zoveel dat je dat niet aankunt, zelfs niet als je met meer bent, zoals in ons geval. Omdat wij bij voorbaat al hadden zien aankomen dat wij als docent teveel met de leerstof bezig zouden zijn en te weinig met het proces, hebben wij een professionele videoband laten maken: op U-matic en op VHS. De band is te koop voor f 30,- per exemplaar [1].

De studenten waren unaniem zeer enthousiast over de manier van werken. Zelf vonden ze wel dat ze van alles hadden geleerd, hoewel ze dat niet goed konden benoemen. De groepen die een uitdaging in de opdracht zagen, kwamen over het algemeen het verst, soms gestimuleerd door een docent.

Kortom, genoeg vragen rondom het wiskundewerklokaal en het werken in een wiskundewerklokaal. Wij houden ons aanbevolen voor reacties en suggesties.

Behalve concreet materiaal hoort in het wiskundewerklokaal ook een geavanceerde computer te staan. Op de computer kunnen handelingen met ruimtelijke figuren worden verricht, die met de hand domweg niet mogelijk zijn. Toch is ook dit een vorm van materieel handelen. Op een Apple Macintosh kun je bijvoorbeeld opgaven 'Ruimtemeetkunde' uit de bovenbouw oplossen.

Noten

- [1] De band is telefonisch te bestellen bij Nellie Verhoef, tel. 038-699427.

Universitaire Lerarenopleiding Vrije Universiteit Amsterdam

Nascholingscursus Wiskunde: Toetsen van hypothesen

De Faculteit der Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit Amsterdam verzorgt in samenwerking met de Universitaire Lerarenopleiding de nascholingscursus

Toetsen van hypothesen ten behoeve van docenten wiskunde in de bovenbouw van het VWO.

Doel van de cursus is het inzicht in het toetsen van hypothesen te verdiepen bij docenten wiskunde die in hun opleiding weinig statistiek hebben gehad.

Uitgangspunt van de cursus vormen de binomiale toetsen van het wiskunde A-programma.

De cursus biedt enige theorie en vooral praktische toepassing.

Postadres

Universitaire Lerarenopleiding Vrije Universiteit Amsterdam
De Boelelaan 1115,
1081 HV Amsterdam

Cursusinformatie

Data en cursusduur: zes bijeenkomsten op woensdagmiddag van 15.30 tot 17.30 uur
29 april; 6, 13, 20 en 27 mei; 3 juni
1992

Plaats: Vrije Universiteit Amsterdam

Docent: Prof.Dr. J. Oosterhoff

Kosten: f 35,- inclusief syllabus

Deelnemers: maximaal 30

Inlichtingen: Prof.Dr. J. Oosterhoff,
tel. 020 - 548 2418 (inhoudelijk)

Mw. C. Korenhof, secretariaat Vak-
didactische Nascholing

Universitaire Lerarenopleiding,
tel. 020 - 548 7360 (organisatorisch)