

# De Graphics Calculator in de klas

## Eerste jaar experiment

G.A. Vonk

Freudenthal instituut, RU Utrecht

### Aanleiding

Discussie over het gebruik van apparatuur in de wiskundeles stamt al vanaf de eerste rekenmachines, als we de nog eerdere geprogrammeerde instructie op 'leermachines' niet meerekenen. Ook over computers is het nodige gezegd. Nu dient de Graphics Calculator (GC) zich aan. Een apparaat dat de mogelijkheden van de gebruikelijke rekenmachine paart aan het vermogen grafieken en histogrammen in beeld te brengen.

Ook nu weer dreigt het onderwijkskamp zich te verdelen in voor- en tegenstanders. De gedachte dat het maken van een eindexamen wiskunde met het apparaat in een fractie van de tijd kan geeft de anti's reden om dergelijke apparaten te verbieden; waarom sta je anders nog les te geven? De pro's zullen aanvoeren dat eindelijk een examen aan wiskunde toe kan komen, omdat het routinewerk niet alle tijd opslokt.

Het Freudenthal instituut heeft nog geen uitgesproken standpunt ingenomen en wil eerst kunnen steunen op ervaringen in het onderwijs zelf. Het opdoen van ervaring moet wel geïnitieerd worden. Daartoe is door het Freudenthal instituut een meerjarig experiment opgezet. Dit experiment wordt mede-gesubsidieerd door het ministerie van O & W.

Het instituut voelt zich gesterkt door de gelijkgezindheid van het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de omvangrijke ondersteuning van een producent van GC's. Het eerste mag blijken uit het goedkope aanbod van GC's dat de vereniging voor haar leden heeft weten te bedingen (meer dan duizend exemplaren zijn afgenomen). Het tweede blijkt uit het beschikbaar stellen door de fabrikant Texas Instruments aan het instituut van TI-81's voor experimentele doeleinden.

### Opzet

Het experiment wil zoveel mogelijk merk-onafhankelijke ervaringsfeiten opleveren. Dit zou kunnen pleiten voor verschillende merken en het registreren van die ervaringen die gelden voor alle apparaten. Toch is gekozen voor één merk en type GC, waarmee voorlopig de variabele 'apparatuur' buiten het experiment is gehouden. Het ge-

vaar is dat het Freudenthal instituut wordt verweten een bepaald merk te promoveren. Er is echter geen gedegen vergelijkend onderzoek gedaan. De gekozen TI-81 heeft voldoende mogelijkheden om een gevarieerd experiment toe te laten, maar is ook weer niet 'zwaarder' dan nodig is, waardoor de bediening eenvoudig kan blijven.

Het schooljaar 91/92 was het eerste in het experiment. Aan een achttal scholen zijn voor enkele weken tot twee maanden GC's en een demonstratieset uitgeleend; voldoende leerlingmachines voor één klas. Een demonstratieset bestaat uit een normale GC gekoppeld aan een doorkijkschermje dat op een overheadprojector gelegd kan worden.

De opdracht aan de deelnemende scholen was nauwelijks duidelijker dan "doe er iets nuttigs mee in de wiskundeles en maak een verslag van je bevindingen". Het was niet alleen de korte voorbereiding die tot een zo weinig specifieke opdracht leidde; met opzet is gekozen voor minimale sturing van de inhoud, omdat wij instituut-medewerkers onze eigen ideeën niet voortijdig wilden ventileren. Wij hebben wel met grote belangstelling lessen bijgewoond.

Er is gekozen voor een experimenteerperiode per school die nogal kort is, om te grote afhankelijkheid van leerlingen van de GC te vermijden. Op het examen is het apparaat immers nog niet toegestaan. Dit is ook de achtergrond van de keuze door leraren van overwegend niet-examenklassen voor het experiment.

Er is door het Freudenthal instituut een uitgebreid practicum geproduceerd voor de voornaamste functies van de TI-81, als voorbereiding op vier toepassingsgebieden. Dit zijn, globaal aangeduid, 'grafisch functieonderzoek', 'parameterkrommen', 'matrixrekening' en 'beschrijvende statistiek'. De handleiding diende het schrijven van een inleiding door elk van de scholen te vermijden. Voor de eerste experimenten kwam de handleiding net te laat; één ander produceerde toch een inleiding, maar dan sterk gericht op het onderwerp dat daarna met de GC behandeld zou worden.

Na het eerste jaar zouden de ervaringen worden verzameld; u leest nu een deel van deze verzameling. Daaruit worden selecties gemaakt, verrijkt met ideeën zoals van



den dan voorheen en maakt de aanpak minder tijdrovend. De meeste voorbeelden ervan hebben betrekking op het effect op de grafiek (verschuiving, vervorming) bij wijziging van een parameter in het functievoorschrift. Een ander voorbeeld is het onderzoek naar de richtingscoëfficiënt van raaklijnen aan een grafiek en het karakter van sommige afgeleide functies.

*Een geslaagd voorbeeld was het zoeken naar de periode van functies van de vorm  $f(x) = \sin ax + \cos bx$ . Als vanzelf ontstonden in vwo-4 discussies over het kleinst gemeen veelvoud van  $a$  en  $b$ . Voorbeelden en nonvoorbeelden werden gezocht en de leerlingen waren op een exploratieve manier met wiskunde bezig.*

*Op een andere school werd een vergelijkbare vraagstelling voorgelegd over  $f(x) = a \sin x + b \cos x$ . Vanwege de strakke, systematische en vaste opbouw van de vragen om  $f(x) = R \cos(x-p)$  te berekenen, werd dit practikum door de leerlingen saai gevonden.*

*Het experiment waarbij leerlingen de richtingscoëfficiënt van snijlijnen moesten berekenen om zo tot de raaklijn te komen, was niet zo'n succes. Het gebruik van de calculator is hiervoor te complex. Hiermee is niet gezegd dat het onderwerp zich niet zou lenen voor een introductie met een GC, maar dan volgens een minder 'klassieke' aanpak. Het inpassen van een GC is een subtiele zaak.*

We verzamelen hierbij de volgende aantekeningen.

- Ruim erkend zijn de voordelen van een exploratiefase voor het wekken van interesse, voor de begripvorming en voor het vastmaken in het geheugen. Met een GC kan de exploratie dynamisch en snel worden uitgevoerd.
- Vaak wordt gemeld dat de GC (nog) zo obsedeert dat leerlingen niet toekomen aan de sorteerfase of aan generalisatie. Een langduriger gebruik van de GC zal deze klacht wel verminderen. Toch is dit een punt van nadere bezinning. Wiskundig denken komt vaak tot stand door een zekere (excusez le mot) luiheid. Die luiheid vindt nu zijn weg naar de GC, maar niet noodzakelijk naar verdere abstracties. Gelukkig zijn er ook tegenvoorbeelden gemeld. Omdat het intoetsen van functievergelijkingen toch nog wat bewerkelijk is, zijn er leerlingen die snel de algemene gedachtengang opsporen en het experimenteren afbreken.
- Slechts in één klas kon geconstateerd worden dat leerlingen de GC op de vuilnisbelt wensten, maar dat met inbegrip van alle andere zaken die met wiskunde van doen hebben.

### De derde aanpak

Er is helaas minder te melden over de derde aanpak. Als uitbreiding zien we meer realistische voorbeelden van bijvoorbeeld overgangsmatrices. Maar ook computergebruik had al dergelijke voorbeelden opgeleverd. Een enkel echt nieuw onderwerp is op enkele scholen uitgetest.

De tekst, die niet binnen de school is ontwikkeld, maakte de indruk te veel nieuws te willen aanbieden. Uit de massa niet altijd even positieve indrukken was de invloed van de GC nauwelijks meer af te leiden.

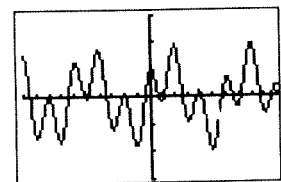
*De tweede en de derde aanpak lopen vaak in een les door elkaar. Als voorbeeld noemen we nog eens de periodiciteit van functies van de vorm  $f(x) = \sin ax + \cos bx$  voor diverse waarden van  $a$  en  $b$ .*

*Een van de laatste vragen luidde: "hoe zit het met de periodiciteit van  $f(x) = \sin x + \cos \pi x$ ?" Een nieuwe wending aan het onderwerp!*

*Dit leidde weer tot felle discussies. Uiteindelijk moest de leraar wel te hulp schieten met de sleutel tot het antwoord: de irrationaliteit van  $\pi$ .*

```

:Y1=sin X
:Y2=cos (πX)
:Y3=|Y1+Y2
:Y4=
  
```



Methoden van numerieke benadering kregen vaak ook een uitbreiding, zij het als neveneffect bij een ander onderwerp. Een voorbeeld hiervan is het benaderen van een snijpunt van twee grafieken. Bij een benaderde  $x$ -waarde kan men snel wisselend de beide functiewaarden in beeld krijgen en dan letten of de decimalen nog 'verspringen'. Jammer dat geen docent erop heeft gewezen dat ook de helling van beide grafieken een rol speelt in de nauwkeurigheid waarmee de  $x$  nu benaderd is.

Voorzichtige conclusies:

- Echt nieuwe onderwerpen moeten 'dicht bij GC' bedacht worden en niet te veel nieuws tegelijk inbrengen.
- De mogelijkheid meer voorbeelden van realistische aard te behandelen is een aantrekkelijke kant van de GC. Het gemak van de calculator verleidt ons misschien erg veel realistische contexten op te voeren waardoor de schoonheid van de wiskundige structuren en technieken onderbelicht blijft.
- Er zijn aanleidingen te over om numerieke benaderingsmethoden eens meer beeldend en misschien ook beter te behandelen.

### Bevindingen van meer algemene aard

Een aantal ervaringen staat los van de wijze van aanpak en het onderwerp. We noemen ze hier in willekeurige volgorde.

- Leerlingen adopteren de GC in het algemeen verrassend snel. Toch blijkt er een categorie intoetsproblemen hardnekkig, maar die zijn mogelijk gebonden aan het type machine.

- Bij computergebruik door leerlingen zijn docenten vaak onzeker over de beheersbaarheid van de leerprocessen (wat doen ze allemaal en is dat wel wat ik wil dat ze doen) [2]. Sommige opstellingen van computerlokalen laten nog wel toe dat men snel een indruk krijgt van de leerlingactiviteiten. Bij GC's is ook dat onmogelijk. De schermpjes zijn vrijwel alleen door de (leerling-)gebruiker te zien. Anderzijds is het gebruik en dus ook het misbruik van de GC beperkter dan van een computer. Wel is waargenomen dat leerlingen (zeer beperkte) correspondentie voerden door iets te programmeren dat het scherm met tekst vulde.
- Ook bij problemen tijdens het gebruik door leerlingen wordt hulp soms bemoeilijkt door de beperkte leesbaarheid van het scherm.
- Er zijn gevallen gemeld waarbij leerlingen het overzicht – op de grafiek, zowel als op het probleem – verliezen door de 'zoom in', het uitvergroten van een deel van het scherm waarbij het oorspronkelijke beeld verdwijnt. Dit zou aanleiding kunnen zijn tot groepswork, waarbij één GC bepaald wordt tot het weergeven van de overzichtsgrafiek.
- Een bijzonder geval van het voorgaande is het niet meer waarneembare verschil tussen grafiek en raaklijn bij flinke uitvergroting.
- Het gebruik van de GC hoeft niet te leiden tot solitair leerlinggedrag. Leuke klasgesprekken behoren tot de mogelijkheid, zeker rond projecties van de demonstratieset. Als meest extreme mening in deze geest is gezegd dat het gebruik van de GC zich zou kunnen beperken tot de demonstratieset.
- Hoeveel 'handwerk' moet een leerling doen om een bepaald begrip te krijgen? In het bijzonder: hoeveel grafieken moet je met de hand getekend hebben voor de begripsvorming van functiewaarde, domein, bereik en coördinaten? Neemt de GC dat leereffect weg of zet deze daar een andere en misschien effectievere leerweg tegenover? Het tweede experimentjaar hoopt daar meer zicht op te geven.
- Geen van de experimenterende scholen heeft de GC's aan de leerlingen mee naar huis gegeven. Redenen: vaak gebruikte men de apparaten in verschillende klassen of dekte de verzekering geen verlies buiten de school. Het is dus nog onbekend welk effect het op de

leerling heeft als deze 24 uur per dag over een GC kan beschikken. Vermoedelijk is het nieuwtje er dan wel snel af en wordt de GC minder een externe motivator maar zeker ook minder een afleider in de les.

- De GC zal niet het 'alleen-onderwijsmakend' hulpmiddel worden. Het is er een uit een arsenaal en zeker niet het minst belangrijke. Toevoeging van de GC als hulpmiddel zal zeker een meer gevarieerde didactiek toelaten en, zoals u weet, doet ook de verandering van onderwijsspijs eten.

## Conclusies voor het vervolg

Het eerste jaar heeft een schat aan gegevens opgeleverd, maar ook een serie open vragen. Hoe reageren leerlingen als het 'leuk-speeltje-effect' voorbij is? Is de begripsvorming beter met meer gemaakte oefeningen ondersteund door de GC dan met het gebruikelijke aantal voorbeelden met de hand uitgevoerd? Of algemener: is er een verbetering in leereffect te constateren bij inschakeling van de GC? Wat zijn de meest geschikte onderwerpen om met GC-ondersteuning te doen?

Hieruit zullen voor het tweede jaar de volgende conclusies getrokken worden.

- De GC's zullen tenminste een half jaar in gebruik blijven bij leerlingen. Daaruit volgt, met hetzelfde aantal apparaten, dat minder scholen zullen deelnemen. Hierdoor zijn er ook minder aanloopperiodes en voor zo'n periode kan iets meer tijd uitgetrokken worden om veel voorkomende 'knoppenfouten' te verhelpen.
- Er zal aan docenten gevraagd worden te letten op het rendement bij de begripsvorming, zeker aan hen die ook parallelklassen buiten het experiment onderwijzen.
- Aan de deelnemende docenten wordt een map met experimenteer-suggesties uitgereikt; een bloemlezing van de beste ervaringen en andere vruchtbaar lijkende ideeën. Maar dit punt was u aan het begin van dit verhaal al aangekondigd.

## Noten

[1] Zie: Euclides jg. 67 nummers 7 en 8

[2] Zie ook: 'Jan Timmer, Koplopers, SCO Amsterdam'