Een ander gezicht van de grafische rekenmachine

L.M. Doorman
Freudenthal instituut, Utrecht

Vooraf

Vanuit het project de Graphic Calculator[1] hebben dit jaar op twee scholen de wiskunde B leerlingen uit 5 vwo een grafische rekenmachine (de TI 81) te leen. Ze mogen dit apparaat alleen tijdens de wiskundeles gebruiken. Eén van de twee scholen is het Cals College te Nieuwegein. De docent, Ramiro Wanga, heeft ook nog een grafische rekenmachine voor op de overhead-projector tot zijn beschikking.
Hieronder volgt een verslag van één van zijn lessen. Tijdens deze les raken twee leerlingen nogal afgeleid door hun grafische rekenmachine. Ze proberen met behulp van grafieken een gezicht te tekenen op het schermpje. Bij het produceren en het aanpassen van de bijbehorende functievoorschriften wordt veel wiskunde gebruikt.
Het werk van deze twee leerlingen moet niet als typerend voor de lessen met de grafische rekenmachine worden gezien. Doorgaans gebruiken de leerlingen de grafische rekenmachine bij de opgaven uit hun boek. Het werk laat echter wel iets zien van de mogelijkheden van een (soms) inspirerend apparaat.

Ramiro laat de klas beginnen met de opgave over de afgeleide van $|x|$. Hij verwijst nog eens naar de eerste opgave van het practicum en zegt dat deze opgave precies zo moet: 'Benader de grafiek van de hellingfunctie door de grafiek van het differentiequotiënt $\Delta y / \Delta x$ te tekenen.'
De leerlingen gaan aan de slag.

De jongen naast me

De jongen naast me is al verder en wil met sin x beginnen.
'De afgeleide is toch cos x', zegt hij. Hij voert in:

$$Y1 = \sin(x + 0.1) - \sin(x)$$
$$Y2 = Y1 / 0.1$$

en laat de grafieken van $Y1$ en $Y2$ tekenen door op GRAPH te drukken.

Inderdaad, $Y2$ lijkt wel heel veel op cos x. Van $Y1$ is weinig te zien. Af en toe is slechts een streepje onder de x-as zichtbaar.
Hij is toch wel verrast door het resultaat. En gaat verder:

$Y3 = \cos(x)$, en GRAPH.

Ja, ze lopen bijna overal over elkaar. Zonder dat ik iets hoef te zeggen probeert hij nu:

$$Y4 = \cos(x) - Y2$$

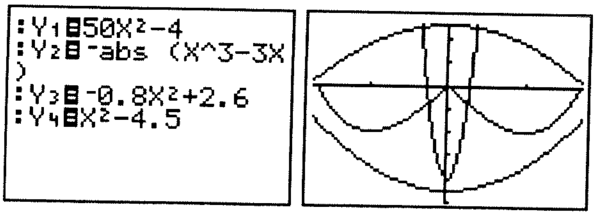
Van $Y4$ verschijnt weinig. Het lijkt een beetje op $Y1$, af en toe een streepje onder de x-as. Zou het kunnen dat die twee op elkaar lijken?
Hij laat alleen $Y1$ en $Y4$ tekenen. In ieder geval blijkt hierdoor dat ze niet precies hetzelfde zijn. Maar omdat ze af en toe over elkaar getekend worden is niet goed te zien hoeveel ze verschillen.
Hij verandert $Y4$:

$$Y4 = \cos(x) - Y2 + 1$$

en laat weer alleen $Y1$ en $Y4$ tekenen. Nu gebeurt iets vreemds. $Y4$ leek eerst af en toe te verspringen, maar na deze verschuiving is het een doorgetrokken horizontale lijn geworden. 'Hoe kan dat nou?', vraagt hij. Voor ik hem antwoord kan geven worden wij afgeleid door de twee jongens achter ons.

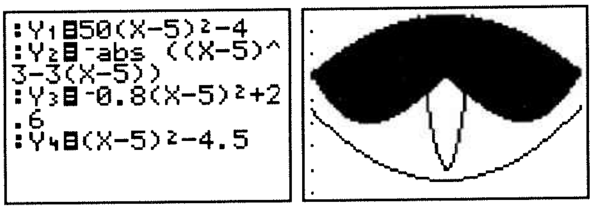
De twee jongens achter ons

De twee jongens achter ons proberen een gezicht te maken op het schermpje van hun apparaat.
Ze laten zien hoever ze zijn:



Dit lijkt al aardig. Nadat één van de twee op GRAPH gedrukt heeft, geeft hij nog de opdracht Shade (*Y*2, *Y*3) waardoor het gezicht een zonnebril krijgt, en de x-as niet meer te zien is.
Hij is echter nog niet tevreden: 'Die y-as staat in de weg. Kun je de grafieken laten tekenen zonder de assen?', vraagt hij.
Ik zeg dat dat niet kan, maar dat hij wel het hele plaatje kan verschuiven zodat de y-as niet meer in beeld is. 'O ja, ….. , dan moet ik x in $x - 5$ veranderen.'

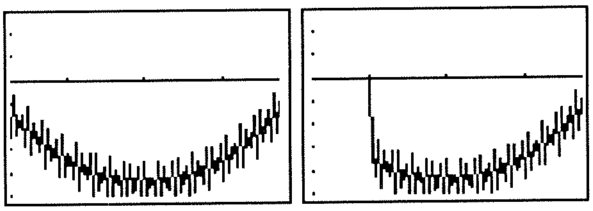
De andere jongen probeert nu samen met mij hem te volgen. Hij past deze transformatie bij de vier voorschriften toe en drukt op GRAPH. Het hele scherm blijft leeg. Hij kijkt hier even naar en beseft dan dat hij ook het zichtbare deel van het assenstelsel, de range, moet aanpassen. Op dit moment is $xmin = -1.75$, $xmax = 1.75$, $ymin = -5$ en $ymax = 2.6$.
Ik kan nu helaas niet goed zien wat hij doet. Hij verandert eerst een keer alleen *ymin* en *ymax*, dat gaat hopeloos mis. Hij kijkt mij aan: 'Je wordt bedankt hoor ...' Vervolgens bedenkt hij dat hij natuurlijk *xmin* en *xmax* moest veranderen.
Even rekenen geeft de juiste waarden, *xmin* wordt 3.25 en *xmax* wordt 6.75:



De mond is nog wat magertjes. Hij past *Y*4 aan:

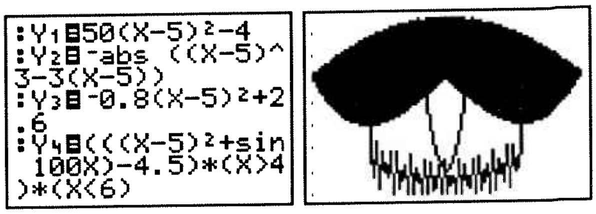
$$Y4 = ((x-5)^2 + \sin 100x) - 4.5$$

en bekijkt alleen de mond (het linker plaatje):



Dat lijkt naar wens. Alleen vindt hij hem nu toch wat breed. Ik wijs hem op de mogelijkheid van de TI-81 om een gedeelte van de functie te laten tekenen. Als je bijvoorbeeld de grafiek alleen getekend wil zien voor $x > 3$, dan moet je het voorschrift f(x) hiermee vermenigvuldigen: f(x) $*$ ($x > 3$). Dit werkt omdat ($x > 3$), afhankelijk van de waarde van x, gelijk is aan 0 of 1 .
Hij begrijpt het en vermenigvuldigt de mond met ($x > 3$). Er verandert niets op het schermpje. Hij kijkt mij vragend aan. Ik vraag: 'Wat is je range?'
'O ja,' begrijpt hij. Hij verandert de 3 in een 4, drukt op GRAPH, en inderdaad, een kwart mond is verdwenen (zie het rechterplaatje).

Dat staat echter niet zo charmant. Direct komt hij op een ander idee. 'Dan moet ik dus vermenigvuldigen met ($4 < x < 6$). Hij probeert dit. Nu wordt de mond weer helemaal getekend.
Hij kijkt even verbaasd. De ongelijkheid ($4 < x < 6$) wordt weer veranderd in ($4 < x$) om te kijken of dat nog wel volgens de verwachting was. Dit ging weer prima. Hij kijkt mij weer vragend aan. Ik zeg niets. 'O ja', zegt hij, '.... dan vermenigvuldig ik gewoon ook nog met ($x < 6$).' En inderdaad, hieronder is het uiteindelijke resultaat zichtbaar:

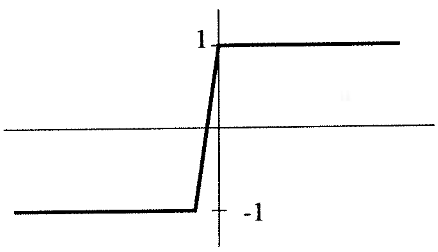


Ramiro

Op dit moment resten nog tien minuten voor de les. Ramiro neemt het woord voor een nabespreking van de absolute waarde.
Hij tekent op het bord de grafiek van $|x|$ en vraagt naar de richting van de raaklijn in nul.
Iemand roept: 'Die is nul!'
Ramiro houdt zijn lineaal in nul met richting ongeveer een half: '... en deze dan ...?'
'Dan raken alle lijnen met rico tussen -1 en 1 aan de grafiek!' roept een leerling.
Ramiro vraagt vervolgens naar *de* raaklijn. Ze komen tot de conclusie dat die er niet is. Maar nu vraagt een leerling hoe het dan met de parabool gaat: 'Daar is de rico toch ook nul.'
Ramiro vertelt een verhaal over skies. 'Je skies staan op de top van een parabool horizontaal, terwijl ze op deze punt wiebelen tussen -1 en 1.' De leerlingen lijken overtuigd.

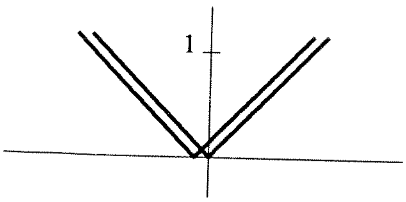
Nu tekent Ramiro op het bord met oranje de grafiek van:

$$\frac{|x + 0.1| - |x|}{0.1}$$



R: 'Hoe komt het dat deze grafiek zo loopt.'
Ll: 'Het is een benadering van de hellingfunctie.'
R: 'Maar hoe komt het dan dat de grafiek zo loopt.'

Hij tekent op het bord de grafieken van $|x|$ en $|x + 0.1|$:



Ramiro: 'En hoe ontstaat nu de oranje grafiek?'
De leerlingen staren naar het bord. Ramiro vraagt of iemand weet wat $|x + 0.1| - |x|$ is. Er komen verschillende reacties: 'abs (0.1)', '0.1' en tenslotte '0.1 of -0.1'. Ramiro gaat op het laatste antwoord in, en vraagt wanneer het nu 0.1 is en wanneer -0.1. Vrij snel is duidelijk dat voor x groter dan 0 er 0.1 uitkomt en voor x kleiner dan -0.1 komt er -0.1 uit.
Helaas gaat op dit moment de bel. Ramiro eindigt nog snel met de vraag:
'Maar wat nu voor x tussen -0.1 en 0?' Dit is het huiswerk voor de volgende keer.

Terwijl Ramiro de rekenmachines ophaalt zijn de twee jongens achter me nog bezig met het gezicht. Ze hebben ontdekt hoe je cirkels kan tekenen zonder parametervoorstellingen (!) en willen graag de volgende les ermee verder gaan. Ramiro vraagt welke nummers hun apparaten hebben. De nummers zijn 23 en 24. De andere klas heeft weinig leerlingen, dus Ramiro vermoedt dat ze de volgende les hun machine wel ongedeerd terug zullen krijgen.

Noten

[1] Zie G.A. Vonk (1992): 'De Graphics Calculator in de klas', *Nieuwe Wiskrant*, *12*, (1), 8-11.