Is dat echt een kubus?

J. van de Craats
Koninklijke Militaire Academie, Breda

Nu perspectieftekenen weer een bescheiden plaats begint te krijgen in het havo-B curriculum, duiken er van tijd tot tijd voor de hand liggende, maar niet zo gemakkelijk oplosbare problemen op. Zo zul je als leraar wel eens een perspectivisch plaatje van een kubus nodig hebben, en dan teken je zoiets als figuur 1.

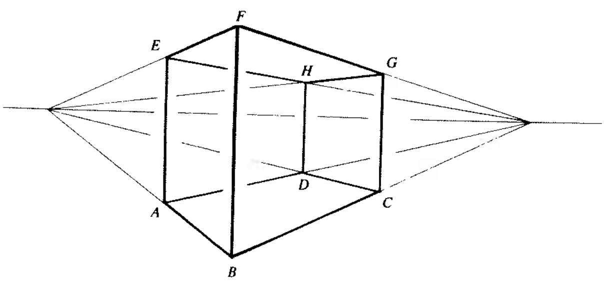

fig. 1: Is dit een kubus?

Je zorgt ervoor dat de horizontale ribben AD, BC, FG en EH allemaal netjes in één punt op de horizon samenkomen, en dat hetzelfde geldt voor de andere horizontale ribben BA, CD, GH en FE. Verder teken je de verticale ribben ook allemaal verticaal, en dan zal het wel goed zijn.

Maar is dat ook zo? Is zo'n plaatje dan inderdaad het perspectivische beeld van een kubus? Kun je, als een verticaal projectievlak (het *tafereel* τ) en een horizontaal *grondvlak* γ gegeven zijn, een kubus zó op het grondvlak neerzetten dat hij, vanuit een zeker *oogpunt O* bekeken, op het tafereel net zo'n perspectiefbeeld geeft als de tekening van figuur 1? Jan Breeman vroeg me dat laatst, en hij zal beslist niet de enige zijn die wel eens over dat probleem heeft nagedacht. Het gaat er dus om of een tekening die er zo op het oog uitziet als een perspectieftekening van een kubus, ook werkelijk het perspectivische beeld van een kubus is. Met andere woorden, kan figuur 1 ontstaan zijn op de wijze die in figuur 2 te zien is? En zo ja, hoe kun je dan de positie van het oogpunt ten opzichte van het tafereel terugvinden en de bijbehorende positie van de kubus op het grondvlak?

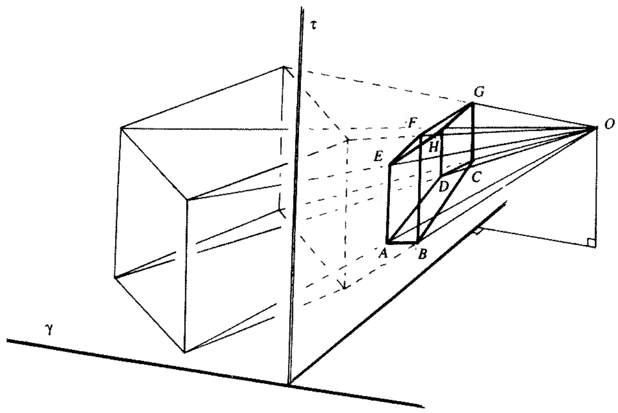

fig. 2: Zo ontstaat een perspectivisch beeld van een kubus

Enig nadenken overtuigt je er al snel van dat het hier inderdaad om serieuze vragen gaat. Neem maar het extreme geval van verticale ribben die in de 'perspectieftekening' heel erg lang (of juist heel erg kort) zijn getekend. Je kunt je moeilijk een 'goed' getekende kubus indenken waarbij de horizontale ribben van het grondvlak er net zo uitzien als in figuur 1, terwijl de getekende verticale ribben vele meters lang zijn. De lengte van de verticale ribben in de tekening kan dus niet helemaal vrij zijn.

Is dat wel een vierkant?

Redenen genoeg dus om de zaak eens nader te onderzoeken. We beginnen met het grondvlak. Zo'n min of meer willekeurig getekende vierhoek $ABCD$, zoals die deel uitmaakt van figuur 1, is die op te vatten als het perspectivische beeld van een vierkant? Het antwoord op die vraag zal bijna altijd 'ja' blijken te zijn.Neem eerst eens aan dat $ABCD$ inderdaad de projectie is van een vierkant $A_wB_wC_wD_w$ in het grondvlak γ op het tafereel τ

vanuit een zeker oogpunt O. De snijpunten S_1 van AB en CD en S_2 van AD en BC bepalen samen de horizon h. Stel verder dat de diagonaal BD de horizon h in een punt S_3 snijdt (zie de figuren 3 en 4). We zullen zien dat we aan de punten S_1, S_2 en S_3 genoeg hebben om de positie van het oogpunt O te reconstrueren.

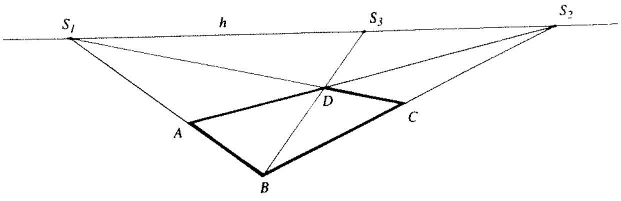

fig. 3: Een perspectieftekening van een vierkant?

Merk daartoe eerst op dat een lijn die van het oogpunt naar een verdwijnpunt in het tafereel loopt, evenwijdig is aan elke lijn waarvan het perspectiefbeeld dat punt als verdwijnpunt heeft. Immers, hoe ontstaat een verdwijnpunt? Door langs zo'n lijn 'naar het oneindige' te lopen en de limietpositie van de verbindingslijn met het oogpunt te nemen. De twee lijnen 'snijden elkaar dan in het oneindige', dat wil zeggen dat ze evenwijdig zijn.
Zo is de lijn OS_1 evenwijdig aan de zijden A_wB_w en C_wD_w van het 'ware' vierkant $A_wB_wC_wD_w$ in het grondvlak γ (zie figuur 4). Dat betekent dus dat de lijnen OS_1, OS_3 en OS_2 elkaar opvolgend snijden onder hoeken van 45°, want datzelfde geldt ook voor de lijnen A_wB_w, D_wB_w en C_wB_w in het vierkant.

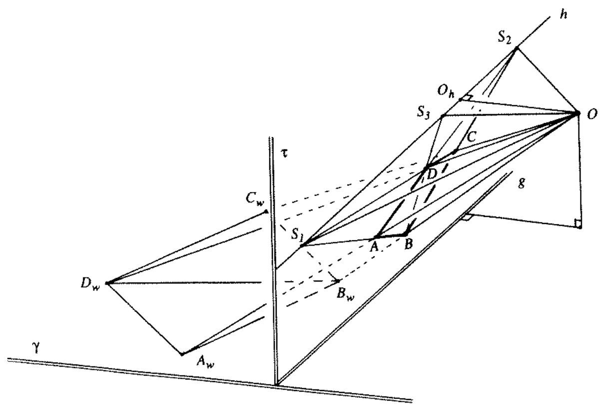

fig. 4: Een vierkant en zijn perspectivische beeld

Maar daarmee wordt het mogelijk om de positie van het oogpunt O te reconstrueren uit de drie punten S_1, S_2 en S_3 op de horizon, kijk maar naar figuur 5. Je tekent eerst de cirkel die S_1S_2 als middellijn heeft. Vanuit het midden van een van de twee halve cirkelbogen trek je vervolgens een lijn naar S_3. Het punt waar die lijn de cirkel voor de tweede maal snijdt, is het oogpunt O, tenminste wanneer je als tekenvlak het vlak door O en de horizon h neemt (zie ook figuur 4). Vanwege de stelling over omtrekshoeken en middelpuntshoeken in een cirkel maken de lijnen OS_1, OS_3 en OS_2 dan immers precies twee hoeken van 45° met elkaar.

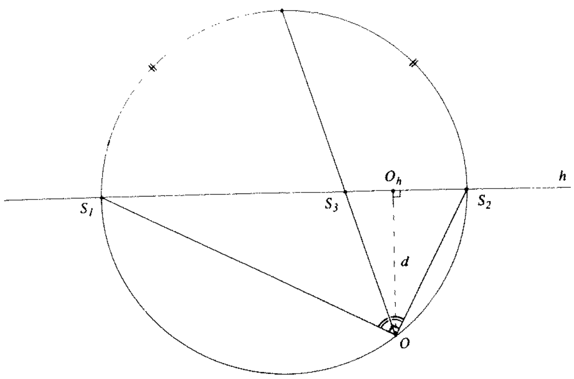

fig. 5: De constructie van het oogpunt

Je kunt verder opmerken dat de projectie O_h van O op h het verdwijnpunt is van alle lijnen die het tafereel τ loodrecht snijden, en dat de afstand $d = O_hO$ (de *distantie*) de afstand is van het oogpunt tot het tafereel. O_h en d samen leggen de plaats van O vast.
Het bovenstaande laat zien hoe we O kunnen reconstrueren wanneer $ABCD$ inderdaad de perspectieftekening is van een vierkant. Maar we zien ook dat deze methode voor vrijwel elke vierhoek werkt: als een willekeurige vierhoek $ABCD$ gegeven is, kunnen we op de zojuist beschreven wijze eerst de horizon bepalen met daarop de punten S_1, S_2 en S_3, en daarna de positie van het oogpunt van waaruit de projectie op het grondvlak een vierkant is. Alleen als $ABCD$ een *parallellogram* is, loopt het mis, want dan is er geen horizon. (Vraagje tussendoor: hoe zit het als $ABCD$ een trapezium is? En als $ABCD$ niet convex is?)

De positie van het vierkant in het grondvlak

We hebben bij een willekeurige vierhoek $ABCD$ (die geen parallellogram is) de positie geconstrueerd van het oogpunt O van waaruit die vierhoek de perspectieftekening is van een vierkant $A_wB_wC_wD_w$ in het grondvlak γ. Maar kunnen we dat vierkant $A_wB_wC_wD_w$ zèlf nu ook op ware grootte in het grondvlak construeren? Dat is inderdaad mogelijk, als tenminste in de perspectieftekening ook nog de *grondlijn* g, dat wil zeggen de snijlijn van tafereel en grondvlak, gegeven is. Die lijn loopt evenwijdig aan de horizon h, en de afstand tussen g en h is de *ooghoogte*, dat wil zeggen de hoogte van het oogpunt boven het grondvlak. De constructie is gemakkelijk te volgen wanneer je eerst figuur 6 bekijkt. Die is uit figuur 4 ontstaan; de loodlijnen vanuit de hoekpunten van het vierkant op de grondlijn g zijn erbij gekomen, evenals de verbindingslijnen van de voetpunten ervan met O_h.

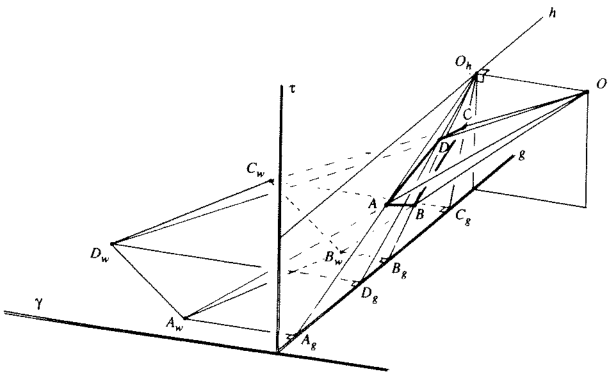

fig. 6: De 'X-figuren' in de perspectieftekening

Je ziet dan allemaal 'X-figuren' verschijnen, zoals bijvoorbeeld $OAA_wA_gAO_hO$. Die X-figuur laat zien dat $OO_h : A_wA_g = O_hA : AA_g$, etc. Daarvan kunnen we als volgt gebruik maken om het vierkant op ware grootte te construeren.

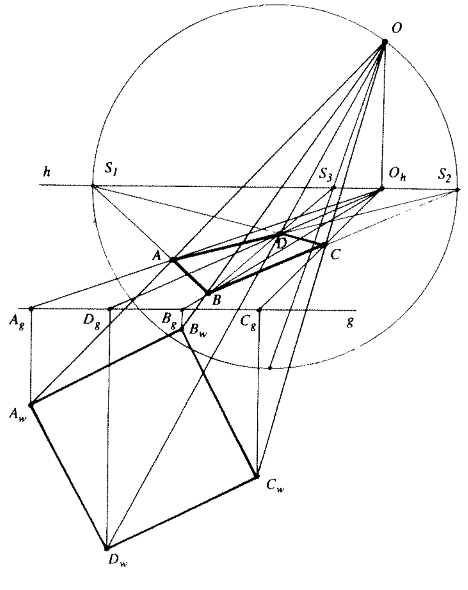

fig. 7: De constructie van het vierkant in het grondvlak

Klap het vlak door O en h om de lijn h omhoog, en het grondvlak γ om de lijn g omlaag, op zo'n manier dat ze beide in het tafereel τ terecht komen. We hebben hierboven al gezien hoe we O en O_h via de cirkelconstructie konden vinden. Met behulp van de lijnen O_hA, O_hB, O_hC en O_hD vinden we dan de punten A_g, B_g, C_g en D_g op de grondlijn g. Van daaruit trekken we loodlijnen naar beneden, en 'X-figuren' vanuit O (dat wil zeggen de lijnen OA, OB, OC en OD) voltooien de constructie van het vierkant $A_wB_wC_wD_w$.
Overigens, we kunnen de methode van figuur 7 natuurlijk ook gebruiken om, omgekeerd, bij gegeven horizon, grondlijn en oogpuntspositie, van een willekeurig vierkant $A_wB_wC_wD_w$ in het grondvlak het perspectiefbeeld $ABCD$ te construeren!

De hoogte van de kubus

We zijn een beetje afgedwaald van onze oorspronkelijke opgave: de vraag of figuur 1 wel een echte kubus voorstelt. Maar we weten nu dat het grondvlak in orde is: er is inderdaad een positie van het oogpunt te vinden (zelfs te construeren) waarvoor $ABCD$ bij een vierkant hoort. Alleen de hoogte van de getekende kubus kan dus nog roet in het eten gooien. We zullen nu laten zien hoe de correcte hoogte in de perspectieftekening via een uitbreiding van de cirkelconstructie gevonden kan worden.

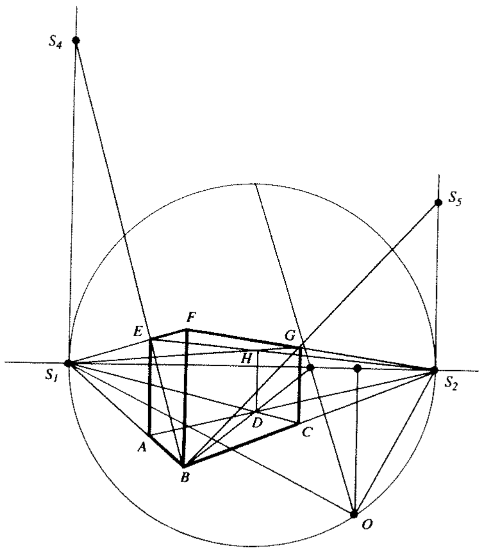

fig. 8: De uitgebreide cirkelconstructie

In figuur 8, een uitbreiding van figuur 5, zijn de zijvlaksdiagonalen BE en BG getekend. Dat zijn geen horizontale richtingen, en de verdwijnpunten ervan liggen dus ook niet op de horizon. Maar ze liggen wel op de loodlijnen vanuit respectievelijk S_1 en S_2 op h. We noemen ze S_4 en S_5. De lijn OS_4 is in werkelijkheid evenwijdig aan de zijvlaksdiagonaal B_wE_w, en de lijnen S_1S_4 en OS_1 zijn in werkelijkheid evenwijdig aan de ribben A_wE_w en

B_wA_w van de kubus. Je krijgt immers de 'echte' positie van het oogpunt O door driehoek S_1OS_2 langs de horizon omhoog te klappen; zie ook figuur 9.
Driehoek S_1OS_4 heeft dus in werkelijkheid een rechte hoek en twee hoeken van 45°, net als driehoek $A_wB_wE_w$. En hetzelfde geldt natuurlijk voor driehoek S_2OS_5. Maar de lijnstukken OS_1, S_4S_1, OS_2 en S_5S_2 zijn in figuur 8 op ware grootte getekend, en dat betekent dat ook in figuur 8 moet gelden dat $OS_1 = S_4S_1$ en $OS_2 = S_5S_2$. Daarmee zijn de verdwijnpunten S_4 en S_5 direct uit de cirkelconstructie af te leiden: zodra je S_1, S_2 en S_3 kent, kun je ook S_4 en S_5 construeren. Die constructie maakt alleen gebruik van de punten A, B, C en D, en dus kan de hele kubustekening geconstrueerd worden als alleen die vier punten gegeven zijn.
De lezer die nu nauwgezet deze constructie bij figuur 1 uitvoert, zal ontdekken dat die figuur geen correct getekende kubus kan zijn: de verticale ribben zijn daarvoor iets te kort getekend!

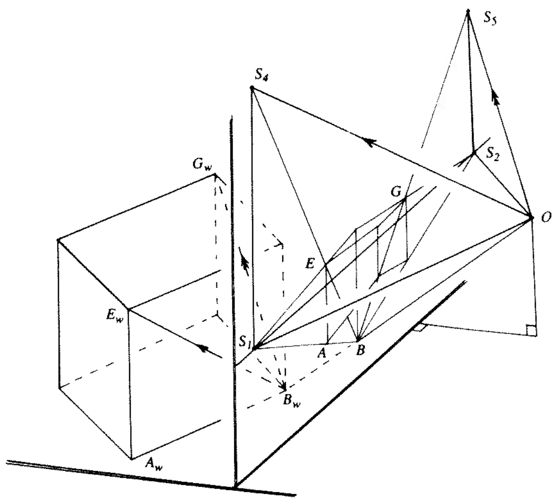

fig. 9: De driehoeken S_1OS_4 en S_2OS_5
