Grafieken classificeren met een grafische rekenmachine

Een lesverslag

P. Drijvers
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Bij het Freudenthal instituut wordt onderzoek gedaan naar de rol van de grafische rekenmachine in de wiskundeles. In dit project, dat de titel *De Grafische Rekenmachine in het wiskundeonderwijs* draagt, wordt lesmateriaal ontwikkeld waarin de leerlingen de Grafische Rekenmachine (afgekort tot GR) gebruiken.
Dit lesmateriaal vormt de basis voor de schoolexperimenten. Het doel van het onderzoek is om te komen tot aanbevelingen over het gebruik van de GR in de klas en over de invloed van de GR op curriculum en toetsing.

In het schooljaar 1991 –'92 heeft een aantal kortlopende experimenten plaatsgevonden. Daarover heeft u kunnen lezen in het artikel van G. Vonk[1]. Voor het schooljaar 1992 –'93 hebben we gekozen voor intensievere experimenten in twee wiskunde B-groepen van vwo5. Een impressie van een les op het Cals College in Nieuwegein verscheen in het vorige nummer van *De Nieuwe Wiskrant*[2].
Dit artikel is een verslag van een observatie op de andere proefschool, het Liemers College in Zevenaar. Ik beschrijf een experiment dat bestond uit een groepsopdracht waaraan de leerlingen één lesuur hebben gewerkt, en een klassikale nabespreking die de helft van de volgende les in beslag nam.
Hieronder beschrijf ik eerst de beginsituatie. Dan volgt het verslag van de les zelf en van de nabespreking. Om de feiten niet bij voorbaat in te kleuren, staan de ideeën en vragen die aan deze experimentele les ten grondslag liggen pas achter het verslag. Besloten wordt met enkele conclusies.

Situatieschets

Het Liemers College in Zevenaar heeft dit jaar drie wiskunde B-groepen in vwo5. De groep die wij volgen bestaat uit drieëntwintig leerlingen, zes meisjes en zeventien jongens. De indeling van de clusters hangt samen met het vakkenpakket: deze leerlingen hebben vrijwel allemaal ook natuurkunde in het pakket. Wiskunde A is door geen van hen gekozen. De wiskundedocent van deze groep is Gerard Stroomer.
Vanaf het begin van het schooljaar heeft iedere leerling elke wiskundeles de beschikking over een grafische rekenmachine, de TI-81 van Texas Instruments. In het begin hebben de leerlingen gedurende twee lessen kennisgemaakt met deze machine. Vervolgens zijn er drie lessen besteed aan werkbladen over grafisch differentiëren. Daarna zijn uit het boek (*De Wageningse Methode*, deel Analyse Wiskunde B 5 vwo) de hoofdstukken *Groeisnelheid* en *Regels voor differentiëren* behandeld. Hierbij waren de leerlingen vrij om de TI-81 naar behoefte te gebruiken. In het algemeen nemen ze het apparaat vaak ter hand, met name voor het tekenen van grafieken. Voor het gewone rekenwerk grijpen de meeste leerlingen liever naar hun eigen machine. Misschien zou dat laatste anders zijn als ze ook thuis de TI-81 konden gebruiken?

Verslag van het groepswerk

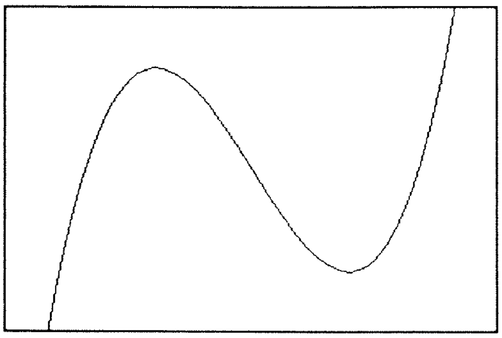
Het is 14 oktober, de laatste wiskundeles voor de herfstvakantie. Gerard heeft het afwijkende karakter van deze les vooraf niet aangekondigd. De leerlingen zijn wat verrast door de opstelling in viertallen. Gerard vertelt dat ze per groepje het werkblad (zie volgende pagina) moeten doornemen en dat de resultaten aan het einde van de les ingeleverd moeten worden. Dat zijn ze niet gewend en er ontstaat wat onrust: wat nu dan? Het werkblad wordt uitgedeeld en na de opmerking dat $a \neq 0$ in het functievoorschrift van een derdegraads functie gaan de leerlingen aan de slag.
Het groepje dat bestaat uit Mirjam, Femke, Marieke en Sevanne moet even wennen aan zo'n open opdracht. Met name Mirjam roept na enkele minuten: 'Wat heeft dit voor zin eigenlijk?'. Toch gaan ze, zoals meestal, rustig en constructief aan het werk. Allereerst tekenen ze met de GR grafieken voor enkele gevallen zoals $(a,b,c,d) = (1,5,5,5)$ en $(a,b,c,d) = (7,6,5,0)$. 'Als ze allemaal negatief zijn loopt de grafiek van linksboven naar rechtsonder.' Ze zien dat er niet zo heel veel verschillende vormen uitkomen: 'Dit is eigenlijk hetzelfde als wat

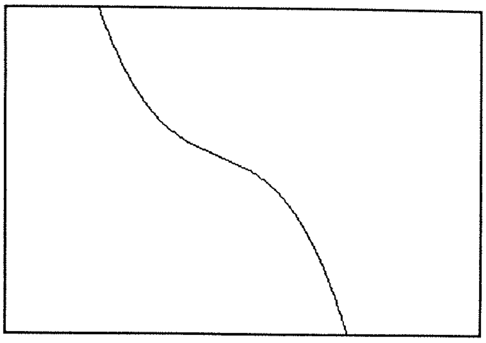
GRAFIEKEN KLASSIFICEREN

werkblad

Opgave I

Derdegraads functies zijn functies van de vorm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij a, b, c en d reële constanten zijn met $a \neq 0$. Hieronder staan de grafieken van twee derdegraadsfuncties. Zoals je ziet kunnen dergelijke grafieken nogal verschillende vormen hebben.





De vraag is nu: Hoeveel echt verschillende soorten grafieken van deze functies zou je kunnen onderscheiden? Beslis zelf wat 'echt verschillend' inhoudt.

Maak dus een indeling van alle grafieken van derdegraads functies. Lever een beschrijving in met voor elke klasse:

A de kenmerken die bij die klasse horen

B een tekening van de grafiek van een voorbeeldfunctie uit deze klasse. Welke waarden heb je voor a, b, c en d gekozen?

Opgave 2

A Bepaal de hellingfuncties bij elk van de voorbeeldfuncties die je bij opgave 1 hebt gekozen. Teken de grafieken van deze hellingfuncties. Wat voor soort krommen krijg je op het scherm?

B De hellinggrafiek van een derdegraads functie is een parabool. Teken nog meer parabolen. Schets bij elk van deze parabolen de vorm van de grafiek van de bijbehorende derdegraads functie. Zijn deze schetsen aanleiding om de indeling van de derdegraads functies die je bij opgave 1 gemaakt hebt te veranderen?

** Opgave 3*

De waarden van de constanten a, b, c en d bepalen de vorm van de grafiek van de functie $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

A Is de waarde van d van invloed op de klasse waarin een derdegraads functie valt?

B Ga voor elk van de klassen na welke voorwaarden er gelden voor a, b, c en d om $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lid van die klasse te laten zijn.

jij hebt'.
Ze kiezen nu de parameterwaarden wat kleiner: (1,1,1,1) en (-1, -1, -1, -1). Ze variëren wat met de plussen en de minnen en krijgen het idee dat er twee klassen zijn die overeenkomen met de voorbeelden op het werkblad. Het verbaast me overigens dat ze niet aanvoelen dat het ongebruikelijk is dat de leraar de hele oplossing al op papier cadeau geeft.
Ze denken ook een regel te hebben: als alle parameters positief zijn krijg je een grafiek zoals de linkerafbeelding, en als één van de parameters negatief is, de andere. Ze proberen dat te verifiëren, maar ze ontdekken daarbij niet dat het niet klopt. Hieronder ziet u hoe het antwoord opgeschreven wordt.

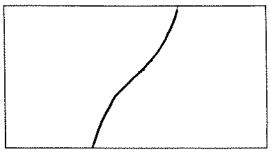
OPGAVE 1
alle getallen positief: grafiek 1
alle getallen negatief: grafiek 2
minimaal 1 getal negatief:
Grafiek 2
Er zijn dus 2 soorten:
- alle getallen positief (zoals 1)
- minstens één getal negatief (zoals 2)

Bij opgave 2 ontstaat er een complicatie. Enkele weken geleden hebben de leerlingen de TI gebruikt om grafisch te differentiëren. Omdat nu hetzelfde blauwe rekendoosje op hun tafel ligt, denken ze dat dat weer moet, maar ze weten niet meer precies hoe dat zit. Omdat ik vrees voor teveel ruis, suggereer ik ze om 'gewoon' (= exact) te differentiëren. Dat gaat vlot en er verschijnen parabolen. In het geval (1,1,1,1) komen ze tot de conclusie dat het een dalparabool wordt die helemaal boven de x-as ligt. Bij (-1, -1, -1, -1) is de hellinggrafiek een bergparabool die helemaal onder de x-as ligt.
Ook het geval (-1,1,1,1) wordt nog onderzocht.
Bij opgave 3 gebeurt er iets interessants: ze begrijpen dat de waarde van d voor de vorm niet uitmaakt. Dan zegt Femke terecht: 'Maar dan klopt onze regel dat de vorm verandert als er één van de getallen negatief wordt dus niet meer!' 'Dus we hebben alles verkeerd gedaan!' 'Dat zei ik al de hele tijd...' 'En je zegt net dat d alleen maar bepaalt waar de top ligt.' Uiteindelijk zijn ze het erover eens dat het niet klopt. Ze proberen het lek te dichten. Bij opgave 2 wordt bijvoorbeeld aan 'als één van de getallen negatief is' toegevoegd: 'maar niet d, die heeft geen invloed'. Vele hypothesen over de rol van de parameters passeren nog de revue: 'Misschien heeft b invloed op de breedte'. Tegen de tijd dat ze gaan nadenken over 'de formule van een parabool' gaat de zoemer.

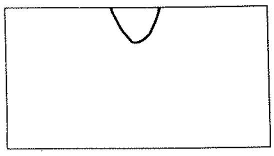
Bij elke groep verloopt de les anders. Sommige leerlingen komen tot een goede indeling, bij anderen is het resultaat mager. De samenwerking varieert van soepel tot stroef. Er is één groepje met grote niveauverschillen: twee leerlingen die goed in wiskunde zijn, zijn gekoppeld aan twee zwakker geachte klasgenoten. Eén van de beteren wil het onmiddellijk op een te hoog niveau aanpakken. Eén van de twee zwakke broeders begint concreet. Hij onderscheidt de gevallen $a > 0$ en $a < 0$, en hij ziet dat de waarde van d voor de vorm geen gevolgen heeft. Deze twee opmerkingen dragen zeer veel bij aan het uiteindelijke resultaat: samen komen ze tot een indeling in zes klassen zoals verderop vermeld bij het verslag van de nabespreking. Het 'speeleffect' van de grafische rekenmachine blijkt hier en daar nog niet uitgewoed te zijn. Sommige leerlingen vullen bijvoorbeeld voor de parameters hele grote getallen in, zonder dat dit veel oplevert. Een enkeling vult voor de parameters functies in als $\cos x$ of $\sqrt{x}$. Het geeft soms mooie plaatjes, maar de rest van de groep heeft er niet veel belangstelling voor.

Verslag van de nabespreking door de docent

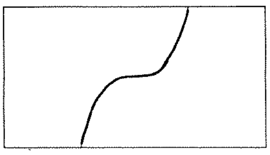
De volgende les begint Gerard met een korte nabespreking van het werkblad. Op het bord verschijnen de volgende grafiekenparen met de bijbehorende functievergelijkingen, evenals de 'gespiegelde' plaatjes bij $y = -x^3 - x$, $y = -x^3$ en $y = -x^3 + x$.



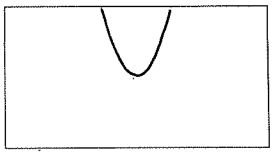
$y = x^3 + x$



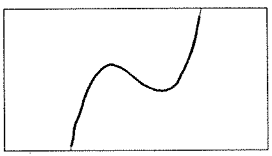
$y = 3x^2 + 1$



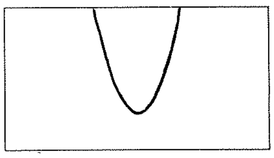
$y = x^3$



$y = 3x^2$



$y = x^3 - x$



$y = 3x^2 - 1$

Op de vraag van Gerard wat nu de verschillen tussen de parabolen zijn, komt als antwoord eerst alleen het verschil tussen de berg- en de dalparabolen. Dan richt Gerard de aandacht op de grafieken van de derdegraadsfuncties: wat zijn daar de verschillen? Op een gegeven moment zien de leerlingen het verschillende aantal punten met een helling 0. Dan kan in de rechterplaatjes de x-as ingetekend worden. De derde opgave is dan geen

groot probleem meer voor wie tenminste de formule van de discriminant nog weet.
Achteraf vinden de leerlingen dit alles eigenlijk vrij simpel. Ze snappen niet zo goed waarom ze het zelf niet zo bedacht hebben.

Wat waren onze verwachtingen en vragen?

Natuurlijk hadden wij bij het maken van het werkblad bepaalde ideeën in het hoofd. Achteraf kunnen we die verwachtingen en vragen als volgt samenvatten.

De opdracht draait om grafieken van derdegraads functies. Derdegraads functies zijn niet nieuw voor de leerlingen en we hopen zo redelijk aan te sluiten bij de 'wiskundige belevingswereld' van de leerlingen. Van de andere kant is het onderwerp niet zo uitgewerkt als bijvoorbeeld tweedegraads functies. De meeste leerlingen zullen niet zo snel bij een bepaalde derdegraads functie de grafiek voor ogen zien, en dan wordt de grafische rekenmachine handig: met zo'n apparaat kun je snel voorbeeldgrafieken genereren, waardoor de verzameling van functies meer tot leven komt. De eerste observatievraag is of dat in praktijk echt zo werkt.

Voor de tweede en derde observatievraag is het werk van A. Treffers e.a. van belang (zie bijvoorbeeld [3]). Zonder daar uitgebreid op in te gaan wil ik daar kort wat over zeggen. Treffers heeft een vijftal onderwijsleerprincipes van realistisch reken- en wiskundeonderwijs geformuleerd. Als één van die principes noemt hij het construeren en concretiseren. Het idee hierbij is dat bij het leren van wiskunde in feite iedere leerling zijn/haar eigen wiskunde (re-)construeert. Om daartoe gelegenheid te bieden is het belangrijk dat het onderwijs niet beperkt blijft tot het aandragen van kennis, maar dat leerlingen op eigen niveau eigen produkties maken. De opdrachten zullen dus ruimte moeten bieden tot het zelf doen van 'ontdekkingen', tot het zelf construeren van een wiskundig bouwwerk.
Met dit in het achterhoofd is de groepsopdracht erg open geformuleerd. Dit bevordert hopelijk dat elke leerling op zijn/haar eigen niveau een (deel van een) oplossing kan produceren. Er is ruimte voor een stukje eigen 'schepping'. Als eindprodukt hopen we dan ook meer een verslag te krijgen dan een verzameling uitkomsten.
Hierbij kan de GR nuttig zijn bij het concretiseren. Het zoeken van (tegen-)voorbeelden is met de GR bijvoorbeeld niet zo bewerkelijk. We hopen dus dat de grafieken van de machine aanleiding zijn tot redeneren, verifiëren en falsificeren, wat belangrijke activiteiten zijn bij het maken van de eigen produktie. De tweede observatievraag is in hoeverre deze verwachtingen realistisch zijn.
'Sociale context en interactie' is een ander onderwijsleerprincipe uit de indeling van Treffers. De gedachte hierbij is dat het leren van wiskunde gebaat is bij sociale interactie. Het verwoorden van gedachten en bevindingen, het bespreken van vermoedens en resultaten, het beoordelen van elkaars antwoorden, dergelijke activiteiten bevorderen het leerproces. Om dit aspect een plaats te geven, werken de leerlingen aan deze opdracht in groepjes. We verwachten dat elke leerling zijn/haar eigen voorbeeldfuncties zal intoetsen, waardoor er een grote variëteit aan grafieken bekeken wordt. De ervaringen zullen uitgewisseld moeten worden, en deze samenwerking heeft hopelijk een positieve invloed op het resultaat. Of de GR een stimulerende of juist een remmende invloed op de samenwerking heeft, is een derde aandachtspunt bij de observatie van deze les.

Wat is er van terechtgekomen?

Het groepje van Mirjam, Femke, Marieke en Sevanne moest, zoals gezegd, even wennen aan het werken in groepjes en aan de open vraagstelling. De derdegraads functies bleken voor hen inderdaad een vertrouwd uitgangspunt. De grafische rekenmachine wordt goed gebruikt als grafiekengenerator, die de vraagstelling echt voor hen tot leven brengt.

Hoewel de indeling die ze ingeleverd hebben nogal mager is, is er hier wel sprake van een eigen produkt op eigen niveau. Voorbeelden zijn bekeken, theorieën zijn gemaakt en ontkracht, er is geprobeerd structuur aan te brengen en er is geredeneerd. Veel wiskundige activiteiten dus! De grafische rekenmachine speelde daarbij inderdaad een nuttige rol: de voorbeeldgrafieken zijn uitgangspunt geweest bij hun redeneringen.

Het werken in een groepje had bij hen een positieve invloed. Hoewel vrij veel van Sevanne uitging, is er echt samengewerkt. Door met elkaar voorbeelden te bekijken en vermoedens te bespreken, corrigeerden de leerlingen elkaar. Ze namen elkaars bevindingen over en leerden van elkaar. Daardoor was het groepsresultaat beter dan de individuele prestaties vermoedelijk geweest zouden zijn.

Bij de andere groepjes in de klas waren de resultaten wisselend. Alle groepen konden na een korte gewenning goed met de opdracht uit de voeten, en de voorbeeldgrafieken van de GR hielpen hen bij het maken van een indeling. Overigens is het belang van de GR afhankelijk van het niveau van de gebruiker: een docent die zich de grafieken 'in het hoofd' voor kan stellen heeft bij het maken van deze opdracht de GR niet zo hard nodig.

Alle groepjes hebben op eigen niveau een eigen produkt gemaakt. Dat neemt niet weg dat dat niveau ons niet echt is meegevallen. Misschien speelt de onwennigheid met dit soort opdrachten een rol. In uiteenlopende mate was er sprake van wiskundige activiteiten zoals het analyse-