Een drama van de derde graad

De formule van Cardano in dichtvorm

A. Hol / J. van Dijk
Studenten Universiteit Utrecht

Inleiding

Hoe heeft men vroeger een methode gevonden om oplossingen van derdegraads vergelijkingen te vinden? De ontstaansgeschiedenis van deze methode is een boeiend en leuk verhaal in de geschiedenis van de wiskunde. Die geschiedenis is het uitgangspunt van dit artikel; er is niet gepoogd om aan te geven hoe wij nu oplossingen van derdegraads vergelijkingen zouden berekenen.

Op welke wijze je kwadratische vergelijkingen moet oplossen is al lang bekend; de *abc*-formule wordt in feite al vanaf de Babyloniërs (2000 v. Chr.) gebruikt. Kubische vergelijkingen (vergelijkingen van de derde graad) zijn veel moeilijker. In de middeleeuwen wordt eeuwenlang geprobeerd ze op te lossen; helaas zonder succes.
Pas in het begin van de zestiende eeuw wordt de oplossing gevonden van het speciale geval $x^3 + px = q$, door Scipione del Ferro in Italië. Scipione publiceert de oplossing niet, maar geeft hem door aan zijn niet erg begaafde leerling Antonio Maria Fior.
Deze daagt Nicolo Tartaglia (= 'de stotteraar') uit voor een wiskundige wedstrijd, door hem een aantal vragen voor te leggen over derdegraads vergelijkingen. Tartaglia komt ook achter de methode (waarschijnlijk zelf gevonden) en geeft binnen de toegestane tijd van tien dagen de antwoorden zonder ze echt te bewijzen. Voor Girolamo Cardano is dat reden om aan te nemen dat hij via Nicolo Tartaglia de methode te weten kan komen en die dan kan verwerken in zijn nieuwste boek.

De dialoog[1]

Milaan (Italië), 25 maart 1539.
Nicolo Tartaglia is op bezoek bij Girolamo Cardano, na herhaaldelijke verzoeken hiertoe door Cardano.
Girolamo: "Ik ben zeer blij dat U gekomen bent, omdat we nu de mogelijkheid hebben om te praten over onze perikelen. Ik vind het zeer onvriendelijk dat U, ondanks de grote tegenprestaties die ik U aangeboden heb, mij de regel over een der gevallen[2] van de kubische vergelijkingen niet wil vertellen".

Nicolo: "Het is niet zo dat ik de regel niet kwijt wil, maar ik kan nu een heleboel dingen gaan ontdekken, omdat het een sleutel is die de deuren opent voor oneindig veel andere problemen. En als ik nu niet erg druk was geweest met het vertalen van de *Elementen* van Euclides in het Italiaans (ik ben nu al bij boek 13), dan had ik al lang een algemene regel gevonden voor vele andere gevallen."
Girolamo: "Ja, ja."

Girolamo Cardano

Nicolo, onverstoorbaar: "Als ik klaar ben met dit werk van Euclides, ga ik me helemaal bezig houden met kubische vergelijkingen. Dan ga ik een boek schrijven over de Praktijk van de Rekenkunst, samen met een nieuw soort algebra. In dat boek komen niet alleen de

Het gedicht[3]

Als x tot de derde macht en x maal c
Na optelling tezamen d geven $[x^3 + cx = d]$
Vind dan eerst twee and're getallen met verschil d $[u - v = d]$
Daarbij moet dan ook nog even
De één maal de ander gelijk zijn
Aan eenderde van c en dit tot de derde macht verheven $[uv = (\frac{1}{3}c)^3]$
De algemene regel is nu heel fijn:
Laat het verschil van de derdemachtswortels van deez' twee
De x die gezocht wordt zijn

$[x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}]$

Het tweede geval in dit procedee
Doet zich voor wanneer de derde macht afzonderlijk staat $[x^3 = cx + d]$
Ook dan weten we er wel raad mee:
Er zijn nu twee delen waaruit de d bestaat $[u + v = d]$
En wel zó, dat het ene maal het and're part
Gelijk is aan eenderde van c, dat weer tot de derde macht gaat $[uv = (\frac{1}{3}c)^3]$
De algemene regel is hieruit ontward:
Dat de derdemachtswortels van de delen
Tesamen de oplossing zijn, gezocht bij de start

$[x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}]$

Het derde geval kan nu geen tijd meer velen: $[x^3 + d = cx]$
Als het tweede geval kunnen we de x bepalen
U ziet dat ze van nature al niet veel schelen

Dit heb ik gevonden, met weinig dralen
In het jaar éénduizend vijfhonderd vierendertig[4]
alweer enige tijd geleê
Met stevige grondslag, zonder veel omhalen
In een stad omringd door de zee

dingen die ik al gevonden heb, maar ook de dingen die ik nog hoop te vinden; en meer, ik wil ook een handige regel publiceren waarmee je alle gevallen kunt onderzoeken."
Girolamo: "Zo, zo."
Nicolo: "Dat is dus de reden dat ik geweigerd heb de regel te vertellen. Ook omdat als ik de regel aan ieder geïnteresseerd persoon, zoals ook U, vertel, hij met de duidelijke informatie makkelijk alle andere oplossingen kan vinden en dan publiceren als ontdekker. Dat zou een streep door mijn plannen zetten."
Girolamo: "Maar ik......"
Nicolo, valt hem in de rede: "Ja, ik weet dat U als ontdekker mijn naam zou noemen. Maar dat zou me op geen enkele manier plezier doen omdat ik deze ontdekkingen in m'n eigen boek wil publiceren en niet in het boek van iemand anders."
Girolamo: "Ik heb ook gezegd dat als U niet wilde dat het gepubliceerd wordt, ik alles geheim houd."
Nicolo: "Het is genoeg om te zeggen dat ik gekozen heb dat niet te geloven."
Girolamo: "Ik zweer het U, bij Gods Heilige Evangelieen, en als een man van eer, dat ik Uw ontdekkingen nooit zal publiceren als U ze mij leert. Ik beloof zelfs, en zweer bij mijn geloof als een waar Christen, de ontdekkingen in code op te schrijven, zodat na mijn dood niemand in staat is ze te snappen."
Nicolo, is even stil, maar: "Als ik ondanks Uw eed niet zou toegeven, zou ik wel heel wantrouwig zijn. Maar omdat ik verder moet naar Vivegano naar Zijne Excellentie Signor Marchese en ik al een tijd hier ben en hem niet langer wil laten wachten, ga ik nu. Maar ik beloof U alles uit te leggen als ik terugkom."
Girolamo: "Ik zie dat U vastbesloten bent te gaan. Ik zal U een brief meegeven voor Signor Marchese, zodat hij weet wie U bent. Maar voordat U gaat wil ik graag dat U me de regel alvast geeft."
Nicolo: "Ja, daar zit wat in. Ik wil trouwens wel dat U weet dat, om het mogelijk te maken hoe dan ook de regel te onthouden, ik het als een gedicht in rijmvorm heb gemaakt. Als ik dat niet gedaan had, zou ik de regel al lang vergeten zijn. Ik wil ook het gedicht zelf voor U opschrijven, zodat ik zeker weet dat ik de ontdekking goed geef."

De belofte

Nicolo: "Dit gedicht is zo duidelijk dat ik geloof dat U zelfs zonder voorbeeld alles snapt."
Girolamo: "Dat denk ik ook, ik snap het nu al bijna. Als U wenst kunt U gaan. Als U terug komt zal ik laten zien dat ik het snap."
Nicolo: "Vergeet Uw geloofwaardige belofte niet! Als deze gebroken wordt beloof ik U dat ik meteen een ander boek publiceer waar U niet blij mee bent."
Girolamo: "Twijfel er niet over, ik zal m'n belofte houden. Ga, en geef mijn brief aan Signor Marchese."
Nicolo: "Vergeet het alstublieft niet."
Girolamo: "Gaat U nu maar!"

Uitleg over het gedicht

We zullen hier aan de hand van het gedicht de formule voor het vinden van oplossingen van derdegraads vergelijkingen uitleggen. Bij het uitleggen gebruiken we de huidige notatie, die in die tijd nog niet bekend was. Daarnaast werd nul niet als getal gezien en kende men geen negatieve getallen; daarom beschouwen we alleen positieve oplossingen en coëfficiënten.
Bovendien willen we nog opmerken dat een vergelijking $x^3 + lx^2 + mx = n$ tegenwoordig door de substitutie $x = 4y - \frac{1}{3}l$ vrij eenvoudig is om te werken tot een vergelijking $y^3 + cy = d$ (zonder kwadratische term), maar vroeger had men dat nog niet zo in de vingers.

De regels:

1. Als x tot de derde macht en x maal c
2. Na optelling tezamen d geven

duiden het eerste geval aan dat opgelost zal worden: $(x^3) + cx = d$. Dit gaat als volgt:

3. Vind dan eerst twee andere getallen met verschil d
4. Daarbij moet dan ook nog even
5. De een maal de ander gelijk zijn
6. Aan eenderde van c en dit tot de derde macht verheven

geven aan dat er een u en een v gevonden moeten worden
zodat $u - v = d$ en $uv = (\frac{1}{3}c)^3$.
Omdat c en d bekenden zijn, staan hier twee vergelijkingen met twee onbekenden, zodat u en v redelijk eenvoudig gevonden kunnen worden.

De regels:

7. De algemene regel is nu heel fijn:
8. Laat het verschil van de derdemachtswortels van deez' twee
9. De x die gezocht wordt zijn

geven dan direct de oplossing: $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.
We kunnen door het een en ander om te schrijven, een formule geven waarmee x direct uitgerekend kan worden (een formule die x uitdrukt in c en d in plaats van in u en v).
We bekijken de vergelijkingen $u - v = d$ en $uv = (\frac{1}{3}c)^3$.
Uit $u - v = d$ volgt $u = d + v$.
Dit invullen in $uv = (\frac{1}{3}c)^3$ geeft:

$$(d + v)v = (\tfrac{1}{3}c)^3$$
dus: $(v^2) + dv = (\frac{1}{3}c)^3$.

Met de *abc*-formule (waarin we alleen de positieve wortel bekijken) volgt:

$$v = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4\left(\frac{1}{3}c\right)^3}}{2}$$

en met behulp van $u = d + v$ volgt dan:

$$u = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}c\right)^3}$$

Merk op: ook hier worden dus alleen positieve wortels bekeken.
Uiteindelijk hebben we nu:

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}d + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}c\right)^3}} - \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}\right)d + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}c\right)^3}}$$

De regels:

10. Het tweede geval in dit procédé
11. Doet zich voor wanneer de derde macht afzonderlijk staat

geven aan dat hier het geval $x^3 = cx + d$ bekeken gaat worden. In:

12. Ook dan weten we er wel raad mee:
13. Er zijn nu twee delen waaruit de d bestaat
14. En wel zó, dat het ene maal het and're part
15. Gelijk is aan eenderde deel van c, dat weer tot de derde macht gaat

wordt uitgelegd dat we weer een u en een v moeten vinden, maar nu zo dat:

$u + v = d$ en $uv = (\frac{1}{3}c)^3$.

Met de regels:

16. De algemene regel is hieruit ontward:
17. Dat de derdemachtswortels van de delen
18. Tezamen de oplossing zijn, gezocht bij de start

vinden we dan de oplossing: $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.
Als we op dezelfde manier als voor het geval $x^3 + cx = d$ de u en v uitdrukken in c en d dan hebben we weer een formule waarmee x direct kan worden bepaald. We vinden dan:

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}d - \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 - \left(\tfrac{1}{3}c\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}\right)d + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}d\right)^2 - \left(\tfrac{1}{3}c\right)^3}}$$

In deze formule moet wel $(\frac{1}{2}d)^2 > (\frac{1}{3}c)^3$ zijn, want anders wordt de wortel uit een negatief getal getrokken.

Het derde geval bestaat uit slechts 3 regels:

19. Het derde geval kan nu geen tijd meer velen:
20. Als het tweede geval kunnen we de x bepalen
21. U ziet dat ze van nature al niet veel schelen

die aan zouden moeten geven hoe het derde geval: $(x^3) + d = cx$ opgelost moet worden. Deze regels zeggen dat dit geval eigenlijk als het tweede geval gaat: $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, waarin $u + v = -d$ en $uv = (\frac{1}{3}c)^3$. Maar als je daarover nadenkt dan zou dat betekenen dat je een negatieve oplossing krijgt. Want stel dat q een oplossing is van het tweede geval, dus $q^3 = cq + d$, dan is $-q$ een oplossing van het derde geval: $(-q)^3 + d = -cq$. Pas later vindt Cardano nog een andere formule om een oplossing van $(x^3) + d = cx$ te bepalen. Dit doet hij ook met behulp van de oplossing q van het tweede geval: $x^3 = cx + d$. Dan is dus $q^3 = cq + d$. Tel aan beide zijden x^3 op:

$$q^3 + x^3 = cq + x^3 + \text{d}.$$

We vullen nu hierin de op te lossen vergelijking $x^3 + d = cx$ in, en we krijgen dan:

$$q^3 + x^3 = cq + cx$$

en er volgt:

$$(q + x)(x^2 - qx + q^2) = c(q + x).$$

Dan is dus $q + x = 0$ of $(x^2) - qx + (q^2) = c$.
De vergelijking $q + x = 0$ geeft $x = -q$; dit is geen oplossing, want x is negatief!
De goede oplossing volgt uit $(x^2) - qx + (q^2) = c$. Dit is een tweedegraadsvergelijking in x en met de *abc*-formule volgt dan:

$$x = \frac{q}{2} + \sqrt{c - 3\left(\frac{q}{2}\right)}.$$

De afloop

Girolamo Cardano houdt zich niet aan zijn belofte als hij er achter komt dat nog veel meer mensen van de methode van Tartaglia op de hoogte zijn en publiceert de methode in zijn werk *Ars Magna*. Dit leidt tot grote ruzie tussen Tartaglia en Cardano. Van Cardano's verdere leven zijn nog enkele smeuïge feiten bekend.
In 1560 wordt zijn oudste en tevens lievelingszoon geëxecuteerd wegens het vergiftigen van diens nogal losbandige vrouw. Geschokt door deze gebeurtenis, lijdend onder de aanvallen van zijn jongste zoon, zoekt, vindt en krijgt Cardano een leerstoel medicijnen aan de universiteit van Bologna. In 1570 wordt Cardano gevangen genomen door de Inquisitie, beschuldigd van ketterij, vooral vanwege het trekken van de horoscoop van Christus.
Na een gevangenschap van een paar maanden, neemt hij gedwongen z'n horoscoop terug. Op de voorwaarde dat hij nooit meer les geeft komt Cardano vrij en gaat hij naar Rome. Daar ontmoet hij Paus Pius V, die hem levenslang een jaargeld geeft. In Rome, in het laatste jaar van zijn leven, schrijft Cardano *De propria vita*, een autobiografie. Hij sterft op bijna 75-jarige leeftijd op 21 september 1576.
Na deze affaire zit de wiskundige carrière van Nicolo

Tartaglia op een dood spoor. Tartaglia sterft op 13 december 1557, arm en eenzaam... Zelfs de formule voor derdegraads vergelijkingen heet nu de *Formule van Cardano*.

Noten

[1] Deze dialoog heeft Tartaglia achteraf opgeschreven. Wij hebben een Engelse vertaling (Fauvel and Gray, 1988) vrij vertaald.

[2] In die tijd kon men alleen werken met positieve coëfficienten, waardoor bijvoorbeeld de vergelijking $x^3 + kx^2 + m = lx$ als een ander type werd gezien als $x^3 + kx^2 = lx + m$.

[3] In deze vertaling van het gedicht is het originele Italiaanse rijmschema aangehouden. De notatie x, c, d is modern (17e eeuws).

[4] Venetiaanse jaartelling; in onze jaartelling 1535.

Literatuur

Boyer, Carl B. (1968): *A History of Mathematics*, Singapore: John Wiley & Sons.

Cantor, Moritz (1913): *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 2: 1200-1668*, Leipzig: B.G. Teubner.

Fauvel, John and Jeremy Gray, eds. (1988): *The history of Mathematics: a reader*, Houndmills: MacMillan Press in ass. with The Open University, pp. 254-256.

Gillispie, G.G. (ed. in chief) (1968): *Dictionary of Scientific Biography*, New York: Ch. Scribner.

Hieronymus Cardanus (1962): *The Book of my Life*; transl. from *De Propria Vita* by Jean Stoner, New York: Dover.

Scholz, Erhard, e.a. (1990): *Geschichte der Algebra; eine Einfuhrung*, Mannheim: B.I. Wissenschaftverlag.