Wiskunde leren met Derive

J.M. Notenboom
Hogeschool Midden Nederland, Utrecht

Computeralgebra

Computeralgebra's bestaan al een aantal jaren. Het zijn computerprogramma's die meer kunnen dan alleen maar rekenen met getallen en het tekenen van grafieken: het manipuleren van formules hoort ook tot de mogelijkheden. Deze hulpmiddelen voor wiskundigen en gebruikers van wiskunde zijn de laatste jaren steeds krachtiger geworden en zijn niet alleen maar beschikbaar voor grote computers. Dat deze programma's een rol zullen gaan spelen in het wiskundeonderwijs is net zo vanzelfsprekend als het gebruik van zakrekenmachines in het wiskundeonderwijs nu.
Derive is zo'n programma dat toegankelijk is en waarvan de aanschaf gezien de prijs geen onoverkomelijk probleem zal zijn voor scholen. Verder is de omvang van het programma beperkt: het kan gemakkelijk op één schijfje. Het is waarschijnlijk dat in de nabije toekomst zakrekenmachines op de markt zullen komen met mogelijkheden van een programma als Derive; probleem is slechts de beperkingen van de display van de huidige zakrekenmachines.

Het lesmateriaal

Bij Wolters-Noordhoff is een pakket verschenen met de titel *Wiskunde leren met Derive*, bestaande uit een uitgebreid docentenboek, een leerlingenboek, een schijfje met hulpprogramma's en een algemene hulpkaart Derive met een overzicht van veel gebruikte commando's. Het programma Derive is niet bij het geheel inbegrepen. Het pakket is geschreven voor leerlingen van de klassen 4 en hoger van havo en vwo.
De opzet van het pakket is duidelijk uit de titel: het gaat om leren van wiskunde met behulp van lesmateriaal dat gebruik maakt van het programma Derive.
De tekst bestaat uit vijftien hoofdstukken, die elk een wiskundig probleem of onderwerp behandelen. Sommige onderwerpen zijn onderdeel van het huidige wiskundeprogramma, andere onderwerpen niet. Het docentenboek is het meest uitgebreid: daarin staat in elk hoofdstuk een aantal docentenbladen, een aantal opdrachtenbladen en meestal een Derive(werk)blad.
Het leerlingenboek is een deelverzameling van het docentenboek: het bevat niet de docentenbladen maar alleen de opdrachtenbladen en de Derive-bladen van de vijftien hoofdstukken.
Het docentenboek bevat bovendien een uitgebreide inleiding voor de docent en twee bijlagen.

De inleiding voor de docent bevat veel stof ter overdenking. Speciaal de paragraaf *Uitgangspunten en discussie*. Daar noemt de schrijver vragen die gerezen zijn bij het schrijven van het boek. Een aantal punten noem ik hier expliciet omdat ze bij de bestudering van de verdere tekst onvermijdelijk naar voren komen:
- Computeralgebra in het voortgezet onderwijs, ja of nee?
- Gebruik van de programma's als gereedschap en/of als leermiddel?
- Welke onderwerpen? Bestaande onderwerpen uit het wiskunde-curriculum of nieuwe die zich goed lenen voor aanpak met computeralgebra?

Met deze publikatie zegt de schrijver op de eerste vraag: ja. Eenzelfde vraag werd destijds gesteld over zakrekenmachines. Die hebben al een plaats gevonden in het onderwijs, al was het alleen maar omdat ze goedkoop, snel en makkelijk te gebruiken zijn.
Het antwoord op de tweede vraag ligt veel gecompliceerder. De computeralgebra's zijn niet gemaakt om wiskunde mee te leren. De programma's zijn gemaakt als een stuk gereedschap om zaken die gealgoritmiseerd aangepakt kunnen worden door de machine te laten doen. Dat geldt dan in het bijzonder ook voor zaken die tot nu toe als algoritme geleerd en geoefend moeten worden, zoals ontbinden in factoren, haakjes wegwerken, afgeleide bepalen etc. De auteur wil het programma ook duidelijk een rol geven bij het leren van wiskunde. Vandaar dat de opdrachten in de hoofdstukken sterk voorgestructureerd zijn, waarbij voorgedefinieerde files bij de diverse hoofdstukken nodig zijn. Wat betreft de wiskundeonderwerpen in dit boek neemt de schrijver (naar eigen zeggen) een tweeslachtig standpunt in. Enerzijds staat er een aantal onderwerpen uit het be-

12 INTEGRALEN VAN MACHTEN VAN SINUS X
opdrachtenblad

In dit practicum ga je machten van de sinusfunctie over het interval $[0,\pi]$ integreren. De uitkomsten kun je gebruiken om π te benaderen. Door regelmaat in de uitkomsten te ontdekken kun je een mooie formule vinden waar π in voorkomt.

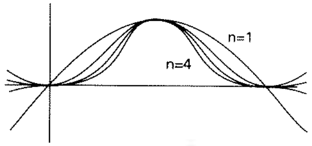
Eerst nog even wat voorkennis opfrissen.
Bij het berekenen van integralen kan het handig zijn om partieel te integreren: een moeilijke integraal kun je daarmee soms omzetten in een die eenvoudiger is. In formulevorm ziet dit er zo uit:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,d(x)$$

We definiëren een rij a door: $a(n) := \int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$

1 Bereken a(1), a(2), a(3), a(4), a(5) en a(6). Welk verschil valt je op tussen de even en de oneven termen van de rij?

2 Zie de afbeelding hiernaast. Wat gebeurt er met $\sin^n x$ als x vast is en n groter wordt? Verklaar dit.
Wat betekent dit voor de oppervlakte van het gebied ingesloten door de x-as en de grafiek van f als n toeneemt?



3 De rij a is dus dalend, waaruit volgt dat bijvoorbeeld a(20) tussen a(21) en a(19) ligt. Tussen welke grenzen ligt dus p? (Overigens: er zijn andere manieren om sneller en nauwkeuriger p te benaderen.)

4 Met welk getal moet je a(3) vermenigvuldigen om a(5) te krijgen? Met welk getal moet je a(4) vermenigvuldigen om a(6) te krijgen? Probeer te ontdekken met welk getal je a(n-2) moet vermenigvuldigen om a(n) te krijgen. Controleer je vermoeden voor een zelfgekozen waarde van n.

5 Er is nog een tweede manier om een verband tussen a(n) en a(n-2) te ontdekken. Schrijf $\sin^n x$ als $\sin x.\sin^{n-1}x$ en gebruik partiële integratie. Klopt het met vraag 4?

6 Voor hele grote waarden van n nadert het quotiënt van a(n) en a(n-1) tot 1. Probeer hiermee de volgende formule af te leiden:

$$\frac{2*2*4*4*6*6*8*8*\ldots\ldots}{1*3*3*5*5*7*7*9*\ldots\ldots} = \frac{\pi}{2}$$

Deze formule is voor het eerst beschreven in het boek Arithmetica Infinitorum van John Wallis uit 1655.

12 INTEGRALEN VAN MACHTEN VAN SINUS X
Derive-blad

De volgende aanwijzingen kunnen van pas komen bij dit Derive-practicum. De vetgedrukte hoofdletters geven de commando's aan zoals ze achtereenvolgens vanuit het Algebra-hoofdmenu gegeven moeten worden. Voor meer aanwijzingen kun je op de algemene hulpkaart kijken.

Wat wil je?	Hoe doe je dat?
een functie invoeren, b.v. $F(x):=\sin^n x$	**A**uthor intypen: F(x):=(sin x)^n
een integraal berekenen	**C**alculus **I**ntegrate lower limit: ondergrens invullen spring met Tab-toets naar upper limit: bovengrens invullen **S**implify
het getal π intypen	Alt-toets vasthouden en p indrukken
een getal decimaal benaderen	zet de lichtbalk op het getal appro**X**
een getal voor een variabele invullen	**M**anage **S**ubstitute de gewenste waarde over de variabele heen typen

staande curriculum in, anderzijds zal het bestaan van computeralgebra's de inhoud van het wiskundeonderwijs wel eens kunnen veranderen omdat veel algoritmische zaken 'uitbesteed' kunnen worden aan de computer, vandaar dat er ook wiskundeonderwerpen aan de orde komen van buiten het bestaande curriculum.

De inhoud

Hoofdstuk 1 bevat een aantal opdrachten voor kennismaking met Derive. Daar staan mooie voorbeelden van wat Derive allemaal kan. Exact met breuken rekenen, exact met hele grote getallen rekenen, ontbinden in factoren etc. Juist voor leerlingen die gewend zijn te rekenen met een zakrekenmachine valt hier ontzettend veel te exploreren. Ook merkwaardige produkten, ontbinden van veeltermen etc. en natuurlijk het oplossen van vergelijkingen. Aan die mogelijkheden zou ik meer aandacht besteden (verschil tussen exacte oplossingen en benaderingen).
Tenslotte het tekenen van grafieken van functies, tweedimensionaal en ook driedimensionaal.

De hoofdstukken 2 t/m 14 behandelen een bonte verscheidenheid van allerlei wiskundeonderwerpen. Bij veel van de onderwerpen die aan de orde komen bekruipt me het gevoel dat dat ook op andere manieren kan en dan beter: hoofdstuk 2 over snijlijnen en raaklijnen kan handiger met programma's die daar speciaal voor gemaakt zijn (VU-grafiek!!) vanuit een didactische achtergrond. In hoofdstuk 5 en 6 met fraaie problemen (vegetaties in de Biesbosch en insektenpopulatie) gaat het om modellen opstellen met overgangsmatrices. Het rekenwerk aan die matrices kan ook met veel andere programma's gedaan worden (hewet bijvoorbeeld) die daar speciaal voor geschreven zijn. Derive kun je dan wel gebruiken om de n-de macht van de matrix uit te rekenen voor grote waarden van n.
In hoofdstuk 7 over functies van twee variabelen komt de kracht van het programma goed tot zijn recht: het snel en fraai tekenen van driedimensionale grafieken gekoppeld aan opdrachten waarbij leerlingen moeten experimenteren.
De hoofdstukken 8 t/m 12 gaan over 'geheide' onderwerpen uit de analyse: Riemannsommen, het getal e, $a\cdot\sin(x)+b\cdot\cos(x)$, Taylor, integralen van $\sin^n(x)$. Hier komt een degelijk stuk wiskunde aan de orde. De stof wordt sterk voorgestructureerd gebracht. Als je al weet wat bijvoorbeeld een veeltermbenadering volgens Taylor is, dan is Derive pas leuk omdat je van 'onmogelijke' functies die benadering zo kunt vragen. Het boek maakt de benadering van Taylor aannemelijk voor de functie $\sin(x)$ in 0, laat daar bijvoorbeeld een limiet mee benaderen, geeft de algemene Taylorformule (in 0) en daarna als enige toepassing $g(x) = \frac{1}{1-x}$. In hoofdstuk 13 komt een leuk onderwerp: slaklijnen via parametervoorstellingen met als klapstuk de illustratie van de stelling dat kegelsneden en slaklijnen in elkaar overgaan onder inversie. Moeilijk en mooi onderwerp, maar erg veel denk ik voor de geplande lesuren.
Hoofdstuk 14 gaat over het uitdrukken van $\cos(nt)$ in $\cos(t)$. Dat is een onderwerp waarbij Derive erg goed te gebruiken is: manipuleren met gonioformules van deze soort.
In hoofdstuk 15 (*Probleemoplossen*) staan een aantal losse problemen waarbij gebruik gemaakt kan worden van Derive. Dat is overigens niet noodzakelijk, maar het werkt over het algemeen wel sneller! Dit hoofdstuk eist het instrumenteel gebruik van Derive. Iedere leraar zou naast het maken van deze vraagstukken ook zelf vraagstukken moeten aandragen voor oplossing met Derive.
Een opmerking over hoofdstuk 3 tot slot van de bespreking van de inhoud: Een meetkundig probleem (*Bekijk alle rechthoekige driehoeken met een vaste hypotenusa; welke heeft de grootste oppervlakte?*) dat een fraaie en eenvoudige meetkundige oplossing heeft, moet niet analytisch met Derive opgelost worden. Bij het wiskunde leren hoort ook leerlingen gevoelig maken voor wat mooie oplossingen zijn.

Ten slotte

Ik spreek duidelijk mijn voorkeur uit voor het gebruik van Derive zoals dat in hoofdstuk 15 expliciet aan de orde gesteld wordt. Ik denk dat structurering in opdrachten nodig is om leerlingen duidelijk te maken wat je wel en niet met Derive kunt, maar dat de nadruk zal moeten liggen op het aandragen van problemen waarbij met Derive naar oplossingen gezocht kan worden en vaak ook oplossingen gevonden zullen worden.
Het wiskundeonderwijs zal zeker veranderen door programma's als Derive. Zakrekenmachines gingen Derive daarin voor (vergelijk: rekenen met de zakrekenmachine en vermenigvuldigen etc. met de logaritmentafel).
Wiskunde leren met Derive? Ja, maar dan 'wiskunde leren' niet zo zeer in de betekenis van statische kennis verwerven van een aantal onderwerpen als wel van 'wiskunde leren' in de dynamische betekenis van zelf bezig zijn met problemen, die problemen vertalen in wiskundige termen, en bij het zoeken naar oplossingen het 'algoritmische slavenwerk' op een verstandige manier laten uitvoeren door Derive.

Wiskunde leren met Derive. Docentenboek, Leerlingenboek. 1992
Auteur: P. Drijvers
Uitgever: Wolters-Noordhoff, Groningen
ISBN: 90 01 25992 8, 991 X
Prijs: Docentenboek *f* 39,40,
Leerlingenboek *f* 19,70