Een ander begin van de algebra

A. Roodhardt
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Het Freudenthal instituut werkt samen met de University of Wisconsin aan een nieuw wiskunde programma voor de Amerikaanse Middle School. In onze termen omvat die school de hoogste twee leerjaren van de basisschool en de eerste twee leerjaren van het voortgezet onderwijs (grade 5 tot en met grade 8). Hierbij komen ideeën en ervaringen uit rekenprojecten en uit het W12-16 project goed van pas. Omdat de algebra nu twee jaar eerder begint, is er alle reden om ons nog eens te bezinnen over de start van dit vak.

We denken dat kinderen op jongere leeftijd met algebra kunnen beginnen. Maar dan niet door het gebruikelijke programma twee jaar naar voren te halen.
In dit artikel willen we iets van de gedachtengang laten zien die tot deze andere aanpak voerde. Daarna vermelden we de hieruit voortvloeiende wensen voor het lesmateriaal. Een zeer groot deel is gewijd aan het tonen van de manier waarop we geprobeerd hebben de schone theorie in de praktijk te vertalen. Dit deel vermengen we met enkele ervaringen op Amerikaanse scholen. En tenslotte geven we een nabeschouwing.

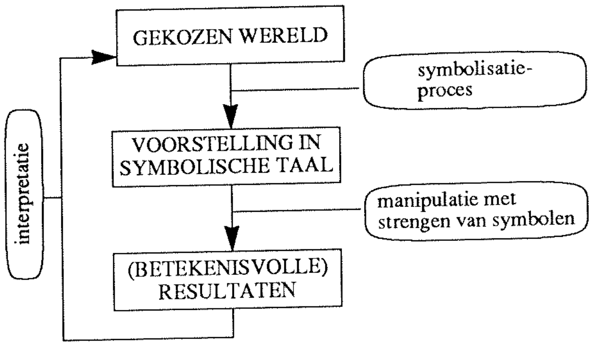
De overwegingen

Wat is er nu zo bijzonder aan de algebra? Laten we het vak eerst eens van buitenaf bekijken.
Erasmus schrijft in *De Lof der Zotheid* over de wiskundigen:

> 'Maar vooral dan zien zij laag neer op het oningewijde publiek, als zij drie- en vierhoeken, cirkels en andere dergelijke meetkundige figuren, de een over de andere tekenen en als in een doolhof dooreen laten lopen, vervolgens *letters als in slagorde scharen, die ze telkens en telkens weer nu eens op deze, dan weer op gene wijze rangschikken, om zo onervarenen zand in de ogen te strooien.*'

Een goede karikatuur moet iets wezenlijks treffen. En dat gebeurt hier door het manipuleren met symbolen aan te wijzen. Het werken met symbolen in plaats van het werken met echte objecten levert veel voordeel op. Dat voordeel wordt nog eens vergroot wanneer met kale symbolen geopereerd kan worden. Met kale symbolen bedoelen we symbolen die los gemaakt zijn van hun betekenis. Dat verklaart ook de algemene toepasbaarheid van de algebra. Maar algebra is meer dan een spelletje. De zin van het manipuleren wordt verkregen door de koppeling aan de werkelijkheid. Daarom nemen we deze karakteristiek van de algebra als uitgangspunt:
Algebra is het manipuleren met 'vervangers', tijdelijk los van de oorspronkelijke betekenissen. Maar die betekenissen zijn wel steeds oproepbaar.
Een overeenkomstig schema als voor het werken met modellen is hier bruikbaar:

de symbolisatiecyclus



De gekozen wereld kan een deel van de werkelijke wereld zijn, maar ook een fantasiewereld of een rijk van abstracties.

Het is gebruikelijk voor het begin van de algebra als *gekozen wereld* de vrij abstracte *getallenwereld* te nemen. Dat willen we veranderen. We kiezen onze objecten eerst op andere terreinen. Het symbolisatieproces is dan vaak beter te begrijpen en op een natuurlijker wijze in te voeren en zelfs uit te lokken. Het heen en weer springen tussen symbool en object is dan ook veel vanzelfsprekender. Dit alles natuurlijk onder de voorwaarde dat er geschikte terreinen te vinden zijn.
Nu komen we bij de kern van de zaak. Het moet een keer

menens worden met de algebra. We gaan dus eigenlijk uit van de veronderstelling dat de opgedane kennis kan worden toegepast op de zogenaamde 'echte' algebra. Dat is een riskante veronderstelling. Onderzoek naar transfer heeft laten zien dat er soms mooie resultaten mee te behalen zijn, maar ook dat de overdracht op onverklaarbare wijze kan mislukken.
Er is meestal voor gezorgd dat de te verbinden gebieden een sterk overeenkomende abstracte structuur hebben. Dat blijkt dus niet altijd voldoende te zijn. Hoe komen we hieruit?
De ontwikkelingen in de neurowetenschappen werkten inspirerend. De oudere studies over het denken hadden, met enige vereenvoudigingen gezegd, een sterk blackbox karakter: stop je dit erin, dan komt dat er uit. Onder invloed van gedetailleerd hersenonderzoek van de biologische kant en verworvenheden van het werken met neurale netwerken van de technische kant, probeert men het deksel van de doos op te tillen om er in te kijken. Centraal staat dan de vraag: als we die en die eigenschappen aan het denken toekennen, hoe zou dat dan in de hersenen gerealiseerd kunnen worden?

Om kort te gaan, men denkt dat door het aanbieden van series leerprocessen de neurale verbindingen geleidelijkaan daar op afgestemd raken en dat daardoor nieuwe processen die enige verwantschap hiermee hebben veel sneller kunnen worden geleverd. De al gevormde banen worden hergebruikt (conceptual redeployment).[1] Een aardig motorisch proefje: Twee proefpersonen moeten een ingewikkelde handeling met de linkerhand leren. De ene groep heeft dat al geleerd met de andere hand. Deze groep leert de linkerhandtaak beduidend sneller.
Dit alles hoeft niet de definitieve verklaring van leerporcessen te zijn. Elke tijd komt tenslotte niet verder dan de in die tijd mogelijke metaforen.
Maar voor ons was dit voldoende aanleiding om te proberen het symbolisatieproces op gang te brengen met een aantal sterk op elkaar lijkende processen die geleidelijk overgaan in de getalalgebra.

Welke ontwerpeisen stellen we aan het lesmateriaal?

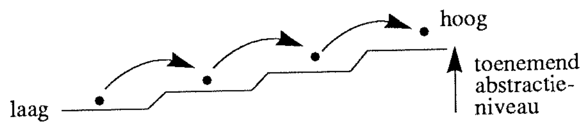
1. De manipulaties met de symbolen moeten lijken op die uit de algebra.
Een niet uitputtende beschrijving van de formele handelingen in de gewone algebra kan er zo uitzien.
Na vertaling of codering is meestal een streng van symbolen ontstaan, waarop toegepast kunnen worden:
- *hergroepering*
  volgorde veranderen
  sorteren
  genoemde combinaties van symbolen zoeken
  voorgeschreven combinaties proberen te maken
- *deletie*
  het tegen elkaar laten wegvallen
- *substitutie*
  één symbool wordt een nieuw symbool
  een symbool wordt vervangen door een combinatie van symbolen
  een complex van symbolen wordt vervangen door een vaak eenvoudiger complex.

Het zal duidelijk zijn dat in dit geheel volop plaats is voor algoritmen. In het symbolisatiemodel krijgen algoritmen juist hun passende plaats.

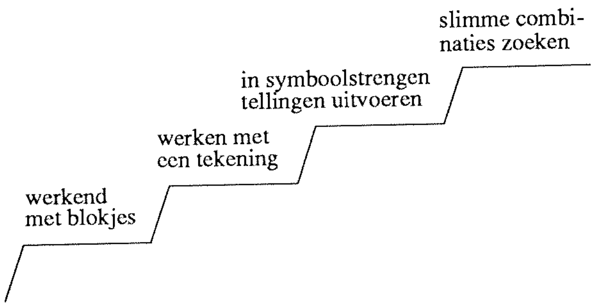
2. De gekozen werelden moeten gemakkelijk toegankelijk zijn, symbolisatie als voordelige handeling uitlokken en het wel of niet koppelen aan betekenissen mogelijk maken.

3. De gekozen werelden moeten de kiemen voor verdere uitbreidingen in zich dragen.

4. De *terrasmethode* moet ingebouwd kunnen worden. Dat leerlingen, afhankelijk van hun ontwikkeling, op verschillende abstractieniveaus opereren, is een feit waarmee al zeer lang rekening wordt gehouden. Dat we hier een speciale naam kiezen, is omdat we bepaalde accenten leggen.
Schematisch voorgesteld:



In het ideale geval stelt elk 'terras' een bepaald abstractieniveau voor. Bijvoorbeeld (al vast vooruitlopend op het vervolg):



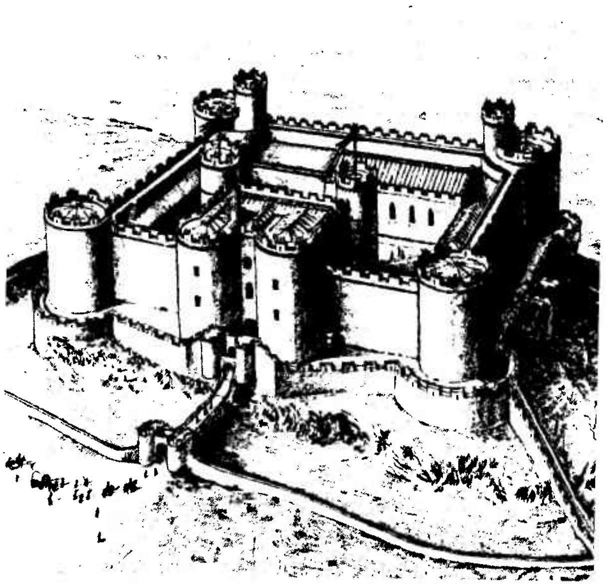
- vraagstukken moeten bij voorkeur op verschillende terrassen op te lossen zijn
- leerlingen kiezen *per opgave* het voor hen passende niveau
- bij moeilijkheden gaan ze een of meer stapjes terug
- leerlingen worden gestimuleerd hogere terrassen te bereiken.

De keuze van het terras en de snelheid van het klimmen geven nuttige informatie over de capaciteit van de leer-

ling. Ook in testen zou met deze zaken rekening moeten worden gehouden.
Het is niet niks wat we willen. Je zou je kunnen afvragen of het wel verantwoord is. Maar we wagen het erop, gesterkt door het adagium van de farmaceutische industrie: iets nieuws moet je verweg uitproberen.

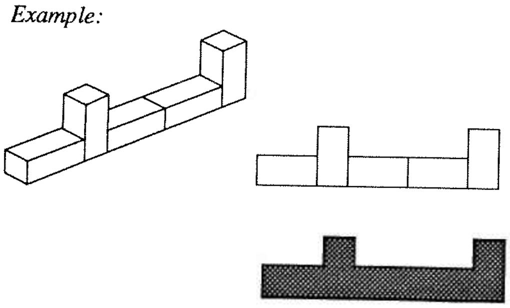
In het volgende laten we drie symbolisatielijnen uit het Amerikaanse boekje *Patterns and Symbols* zien.[2] Het eerste voorbeeld wordt daarbij zeer uitvoerig behandeld. We denken dat dat nodig is, want de uiteindelijke realiseerbaarheid van onze overwegingen is bepalend voor deze eerste stap.
We zullen niet elke mogelijkheid om terug te verwijzen naar deze algemene beschouwingen aangrijpen. De lezer kan zelf terugbladeren. Er moet ook bedacht worden dat dit geen zuivere lijnen zijn. Het geheel is vermengd met een groot aantal andere wiskundige activiteiten.

Castles and blocks

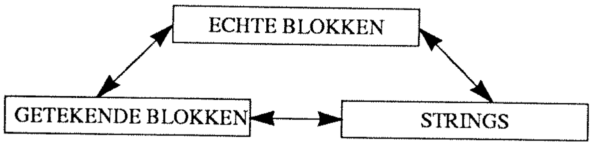


Ridders en kastelen zijn door film en televisie ook bekend bij Amerikaanse kinderen. Deze context is aanleiding tot het nabouwen van kantelen met blokjes die in twee standen geplaatst mogen worden: liggend en staand.

Example:



De symbolen L en S voor de twee standen worden ingevoerd en een rij blokken wordt geschreven als een *string*, bijvoorbeeld $LSLLS$.
In de klas wordt nu geoefend met de vertalingen tussen de drie soorten rijen.



Er wordt al een beetje vooruitgelopen op het hoofdonderwerp: bestuderen van de eigenschappen van strings en op grond daarvan het manipuleren ermee.

Voorbeeld:

How many blocks do you need to make the pattern below?

Mark the blocks and write the corresponding letters below. What string could stand for the drawing?

If this is the view from inside the castle, you will see a different pattern from outside the castle. Make a drawing of that pattern. What string of letters will stand for this drawing?

De oplossingen voor deze *spiegeling* vullen verschillende terrassen:
- sommigen 'zien' het meteen en bouwen onmiddellijk hun rij
- sommigen lopen naar de andere kant om het echt te zien
- en natuurlijk zijn er de slimmerikken die naar de oorspronkelijke rij van de overbuur kijken
- weer anderen schrijven het rechtstreeks vanuit de symbolen op en een enkeling doet dat vanuit het plaatje
- een meisje dat wat meer lichamelijke activiteit wil, stelt voor dat de kinderen zelf rijen uitbeelden door rechtop te gaan staan en languit op de grond te gaan liggen.

Het opmerken van herhaling van grotere eenheden in een string is het volgende onderwerp.

Voorbeeld:

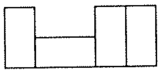
You are a spy and you have to memorize the string below:
SLLSLSSLLSLSSLLSLSSLLSLSSLLSLSSLLSLS
Because you're a spy it's dangerous to write anything down.
Think of an easy way to memorize the string.

En een beetje algebra:

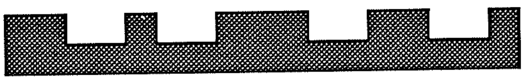
After a long journey with many adventures, another spy meets the man to whom he has to tell a message. He whispers:
5 *SSLS*.
What is the message?

Sommige lessen worden met een korte toets (quiz) afgesloten. Een van de opgaven uit zo'n toets:

Which pattern has repetition, *SLSSLSSLS* or *SLSSLSS*? Draw a picture of the repeated part.

De eerste vraag wordt door zestien van de achttien leerlingen goed beantwoord. Een paar leerlingen stappen terug op tekeningen, maar heel veel geven meteen de rij met deelstrepen. *SLS*|*SLS*|*SLS*. Ondanks de deelstrepen zijn er maar vijf correcte antwoorden op de tweede vraag.
Vaak zie je dit:  (Verklaring?)

Na de voorzichtige voorbereiding wordt het nu ernst met de symmetrie.



For this pattern it doesn't make any difference from which side you look at the wall. From left to right the pattern is the same as from right to left! Such a pattern is called *symmetric*.

Deze definitie gaf bij toepassing op tekeningen eerst problemen. In het eerste hoofdstuk van het boek hadden de begrippen even en oneven geleid tot het zoeken van paren. Dat werd ook hier gedaan en er ontstond onenigheid over het wel of niet toegestaan zijn van halve blokken. Na nog eens aandachtig kijken naar de definitie werd het strijdpunt afgevoerd.
Op het niveau van de 'symbolen' stelden we zulke vragen:

Complete these strings until they are symmetric:
LSSLS...
SLLLSLLS...
Explain how you found your solution.

Er werd niet alleen verdubbeld in omgekeerde volgorde! Een opgave uit een quiz:

Complete the string to make it symmetric.
LSLLSSSL
Find two solutions.

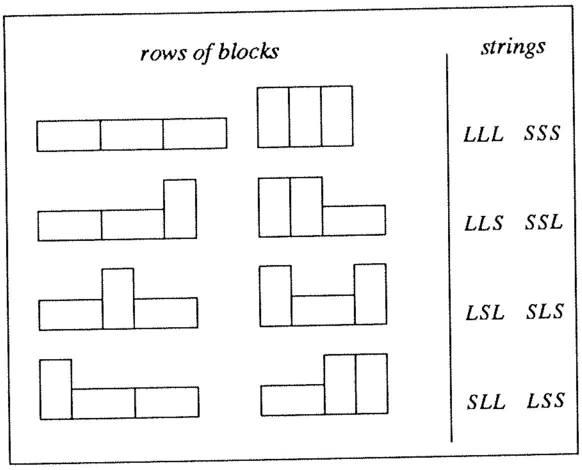
Oplossingen van de leerlingen:

LSLLSSSLLSL
en
LSLLSSSLLSSSLLSL

Een derde deel vond één oplossing en een derde deel twee. De eerste oplossing kwam het meest voor. In de pogingen voor de tweede oplossing zaten veel onnauwkeurigheden. Voor het vinden en voor de controle werden soms tekeningen gemaakt.

Na enkele hoofdstukken over andere onderwerpen worden de blokjes weer opgepakt. Meestal alleen in de vorm van tekeningen en strings. De mogelijkheden van strings met een gegeven aantal blokken worden bestudeerd. Bijvoorbeeld het ontdekken en formuleren van een relatie tussen strings.

Look at the following pairs:



Each pair has the same relationship. Make up a name for this relation.

Dit werd gevolgd door oefeningen als:

What string would have this relation with *LLSSLS*?

En vanzelfsprekend enige combinatoriek:

With more blocks, the number of patterns is much larger. Believe it or not, with 10 blocks you can make more than 100 different patterns! You can be sure the number of patterns is always even. Try to explain this mystery.

Write down all the possible strings for 4 blocks. Try to think of an easy way to do this.

Look at the table:

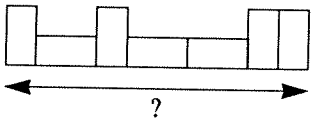
number of blocks	number of strings
2	...
3	8
4	16
5	...

Fill in the two missing numbers.

Perhaps you can now say exactly how many patterns you can make with 10 blocks.

Blokken en getallen

In het voorgaande lag de nadruk op het vertrouwd raken met de symbolische taal en het manipuleren in die taal. De symbolen waren daarbij vervangers voor zeer concrete objecten. In een kort hoofdstukje laten we de leerlingen kennis maken met het feit dat deze symbolen ook voor getallen kunnen staan. Veel meer dan kennismaken is het nog niet. Later volgt wel een systematische behandeling. Door het niveau en door de beknoptheid moeten de leerlingen af en toe wel eens op hun tenen staan.



This is a picture of a row of bricks. How long is this row?
One cannot answer this question.
What do you have to know to be able to answer?

We are not going to tell you what you want to know. Nevertheless, answer the next questions about lengths.

Deze vragen werden over het algemeen niet als zeer moeilijk ervaren:

Five strings of laying and standing blocks:
LSSLSLS (1)
LLSSLSS (2)
SLSLSLS (3)
SLLSLLS (4)
LLLSSSS (5)
From each string you can build a row of blocks.
Four of these rows have the same length.
Which ones and why?

Which row of blocks is longer:
LSSLSSLS or *LSLSSLSS*?
Answer the same question for: *LSSLSL* and *SLSLLL*.

To compare a row of blocks like *LLSSLLSSLLS* with other rows it might be smart to write something about the length in a short way. How should you do this? Describe two different rows of blocks with the same length as *LLSLLSSLLS*.

Een lerares gaat in op de wiskundige symbolen die de leerlingen in hun beschrijvingen hebben gebruikt. Ze moeten nu zelf eens iets doen met +, × en haakjes.

Crystal: $LLSLL + SSLLS = LLSLLSSLLS$
John: $LLSLLSSLLS = (LLS \times 3) + S$
Tara: divide by 2 $\quad 2L\ 1S\ 2L\ 2S\ 2L\ 1S$
$2\,|\,4L\ 2S\ 4L\ 4S\ 4L\ 2S$

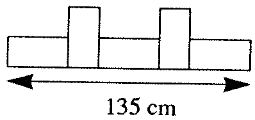
Jack built a wall of heavy stones in his garden, like the one in the picture.

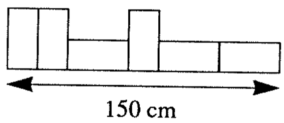
When he finished the wall he changed his mind. He thought it would look nicer if the standing blocks were laying down and if the laying blocks were standing up. He decided to change his wall in this way. What happens to the length of the wall?

De afmetingen van de stenen (blokken) worden gegeven. Hiermee worden lengten van strings berekend.

In volgende boekjes komen we hierop terug voor het expliciet maken van commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen en voor de behandeling van vergelijkingen.
In dit boekje beperken we ons tot dit stelsel vergelijkingen:
$3x + 2y = 135$
$3x + 3y = 150$
Dat gaat uitstekend. Maar de eerlijkheid gebiedt ons te bekennen dat we een andere presentatie van het probleem hadden gegeven:

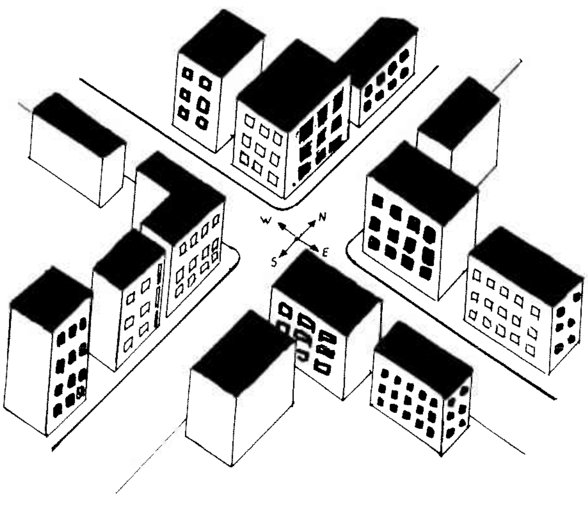
Here are new blocks with unknown measures.
What can you tell about the length and the width?





Delivery routes

De plaats van handeling is een stad met een rechthoekig stratenplan. De vier richtingen N, S, E en W zijn gegeven in een plattegrond. De leerlingen werken op coördinatenpapier.



close up of a crossing

The Italian Restaurant

The Italian restaurant, Gino's (*G* on the map), brings pastas and stuffed pizzas to your door. A new delivery boy, named Tony, is sent to Barbara's house (*B* on the map). The instructions for the route could be: First go north; after passing a church turn to the left. Tony gets this note on a little piece of paper:

If he follows the instructions will he deliver the pizza to the right address?

Na enkele vertaalproblemen worden eigenschappen van zulke strings bekeken, om het voordeel van het gebruik van symbolen boven het tekenen van routes te laten zien. Naar behoefte springen de leerlingen heen en weer tussen de kale symbolen en de symbolen als betekenisdragers.

Het opereren op symboolniveau wordt gestimuleerd door opdrachten als deze:

> How can you predict the number of turns from the string *WWNWNNW* without drawing a picture?
>
> Look at route *NNWWNWN*. The starting point is Gino's. Decide without drawing which of the next routes have the same endpoint:
> *NNWNWWN*; *NWNWNWN*; *WNWNWNW*; *WWWNNNN*.

Het manipuleren met symbolen gaat zelfs de boventoon voeren (boven het tekenen) in *verkortingsproblemen*.

Voorbeelden

> This is a route with detours: *NWNENEWWWSSSE*. Shorten this route.
>
> Make a string with 14 letters that will give you a route that ends where it begins.
>
> Another route followed by Tony is:
> *NENWWNWSWSE*. Tony says he took the shortest route. First try to answer these questions without drawing.
> Is Tony telling the truth?
>
> 1. Try to find a better route.

Het idee van het tegen elkaar wegvallen van *N* en *S*, *E* en *W* wordt later weer gebruikt bij positieve en negatieve getallen.

In een van de scholen schrijft een docent een gewichtige regel op het bord:

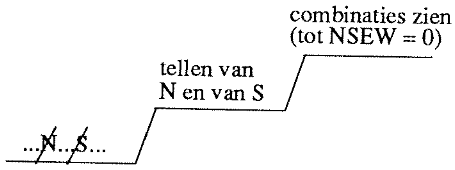
A string with opposite pairs is longer than a string with no opposite pairs.

De kinderen moeten dit in hun schrift noteren.

Jason: Can I give you a really long string?
Raglene: I don't think this always works.

Er wordt met grote animo naar tegenvoorbeelden gezocht. De voorgestelde tegenvoorbeelden zijn niet bestand tegen de kritiek van de rest van de klas.

In de oefeningen blijken weer duidelijke verschillen:

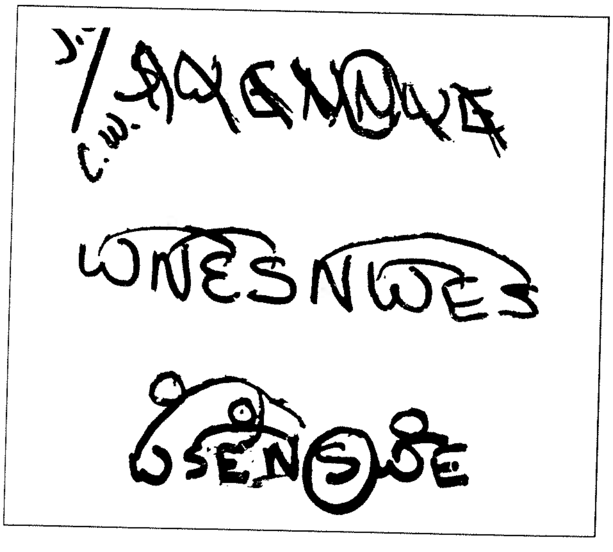


Dit hoofdstuk staat tussen de twee delen over de blokjes in. Er zijn dus nog geen straatlengten geïntroduceerd. Maar de stap naar getallen wordt blijkbaar wel uitgelokt. Een lerares geeft namelijk dit probleem:

> You deliver flowers for Stoughton Floral. You are paid by the number of deliveries you can make each hour.
> The city map is a grid, and each square in the grid is equal to five minutes travel.
> Here are the directions for three deliveries:
> A *SWSWSEENE*
> B *ENESSW*
> C *WSWSENE*
>
> Can you make all three deliveries in one half hour or less?

(In de oorspronkelijke opgave stonden enkele andere strings, zoals uit het leerlingenwerk te zien is.)

De leerlingen vinden hun eigen notaties uit, zoals blijkt uit dit werk op de overheadprojector.

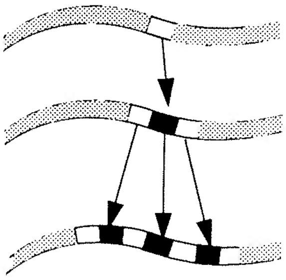


Dat je moest vereenvoudigen was voor iedereen duidelijk. En dat het om getallen ging was geen complicatie. De leerlingen trokken de discussie in de realiteit: sommigen vonden het stom om na elke aflevering weer terug te gaan naar de winkel. Ze zochten naar één route die elk eindpunt bevatte. Volgens anderen zou een fatsoenlijke zaak aparte afleveringen eisen, om niet met verlepte bloemen aan te komen.

Welcome to the imaginary land of Snakewood

This is a paradise for snakes. How many can you discover?

De slangen hebben een patroon van gekleurde ringen om hun staart. We laten die patronen volgens bepaalde regels groeien bij het ouder worden.
Voorbeeld



- It starts with a red ring,
- Then a black ring develops in the middle of the red ring,
- In the next round the same thing happens with the red rings, but the black rings remain black,
- The process continues in the same way as the snake grows older.

Dit groeien wordt gesimuleerd met behulp van een substitutieproces[3]:

Start: R

Produktieregels: $R \rightarrow RBR$
$B \rightarrow B$

Hiermee worden slangen gecreëerd. Als de resultaten in een tabel worden gezet, zijn er verschillende vragen mogelijk over regelmaat en over wat wel of niet kan.
De symbolentaal wordt dus gekoppeld aan andere delen van het wiskundeprogramma in een dienende functie.

Voorbeelden

a. Study the table and complete it.

	PATTERN	number of red rings	number of black rings	number of rings
1	R	1	0	1
2	RBR	2	1	3
3	$RBRBRBR$	4	3	7
4	...	8	...	...
5	...	...	15	...

b. Look at the strings. What is the relationship between the numbers of red and black rings?

c. Look at the numbers in the table. Predict the ring numbers for the 6th snake.
d. Of course the number of rings of any snake is limited. But now suppose there were no restrictions. Is it possible to stumble upon a snake of this kind with an even number of rings?
e. We find a snake with 128 red rings. How many rings does the snake have?
f. Another snake has 255 black rings. How many rings does the snake have?
g. Is it possible for a snake of this kind to have 499 colored rings?
Explain your answer.

Er wordt onderscheid gemaakt tussen gevaarlijke en ongevaarlijke slangen. De exemplaren van de plaat worden er vergroot uitgelicht en dan:

We know two kinds of harmless snakes now:
- the snakes with only three rings: BRB;
- the snakes with the growing pattern
$R \to RBR \to RBRBRBR \to \ldots$

All the other kinds are dangerous. You better find out for yourself. Which of the seven snakes below are dangerous? Be sure you do not pick one up to find out.

De laatste zin is niet bedoeld als grapje. In sommige streken van Amerika zou het heel riskant zijn als de leerlingen hun schoolkennis in praktijk zouden brengen. Vandaar ook het woord *imaginary* in de titel.
Er werd met groot enthousiasme aan de beestjes gewerkt. Interessant was de parallel met kinderen die pas hebben leren tellen: bij het classificeren van een ingewikkelde slang werd nogal eens begonnen met $R \to RBR$ in plaats van dat verder werd gegaan met een al eerder afgeleide slang.
Ook werden nodige maar niet voldoende voorwaarden opgesteld:
- er moet in ieder geval een B in het midden staan
- het aantal R's moet *supereven* zijn.

(Supereven getallen waren zeer populair bij de kinderen. We gebruikten deze naam voor machten van 2, die in veel toepassingen voorkwamen. Ze waren een logisch vervolg op even getallen: 32 is supereven, want
$32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$.)

Slotopmerkingen

Onze informatie is beperkt. De docenten die aan deze proefuitvoering meewerkten moesten veelal hun eigen weg vinden en moesten wennen aan deze nieuwe werkwijze. Toch waren ze zeer enthousiast en sommigen zeiden dat ze zelf veel algebra met dit boekje hadden geleerd. Ook de leerlingen waren goed te spreken over de opdrachten. Hoeveel van hun animo veroorzaakt werd door het loutere feit van het nieuwe, is moeilijk vast te stellen.

Het werken met symbolen, los van de betekenis, en het weer terugkeren naar de betekenis verliep heel natuurlijk. En het tempo bij de tweede en derde lijn lag, zoals we hoopten, duidelijk hoger.
Strikt logisch gesproken kunnen we zeggen dat we geen aanwijzingen hebben dat we op de verkeerde weg zijn. Er zijn nog veel vragen onbeantwoord en er zal nog heel wat gestudeerd en geëxperimenteerd moeten worden. Misschien ook eens in Nederlandse scholen.
We voelen ons in ieder geval gesterkt in de opvatting dat de algebra al vroeger van start kan gaan. Misschien zijn we wel te bang voor abstracte zaken en theoretische problemen in onze leerboeken.
Als illustratie van het laatste punt en als toegift kan deze episode dienen.
Een klas kwam zelf met het probleem of nul een even of een oneven getal was (grade 5! = groep 7). De leerlingen zaten op het puntje van hun stoel voor een ongevraagde, verhitte discussie. Er waren drie partijen: *even*, *oneven* en *het is onzin om hier van even of oneven te spreken*. De sterkste argumenten werden ontleend aan het principe van het voortzetten van het systeem. Andere argumenten: *even* kan in paren, hoe wil je van 0 paren maken? Bij *oneven* blijft altijd 1 over, bij 0 niet.
Dit klimaat nodigde uit tot een klein experimentje: op het bord stond al:

oneven + oneven = even
wat is $0 + 0$? $0 + 0 = 0$
Stel dat 0 oneven is, wat krijg je dan?

Deze reductio ad absurdum werd begrepen en geapprecieerd.

Noten

[1] Een niet te technische inleiding in dit begrippencomplex is P.M. Churchland: *A Neurocomputational Perspective*. 1989. Massachusets Institute of Technology.
Veel boeken over kunstmatige intelligentie wijden er enkele hoofdstukken aan.
[2] Roodhardt, A. and M. Kindt. *Patterns and Symbols.*
[3] Deze werkwijze is afkomstig uit de linguïstiek. Een bekende introductie is:
Levelt, W.J.M. *Formele grammatica's in linguïstiek en taalpsychologie.* 1973. Van Loghum Slaterus, Deventer.
Tegenwoordig worden zulke systemen veel gebruikt in de biologie, onder andere om met de computer groeiprocessen en verstoringen daarvan te simuleren.