

Het 'gelijk' van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

E. de Moor

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

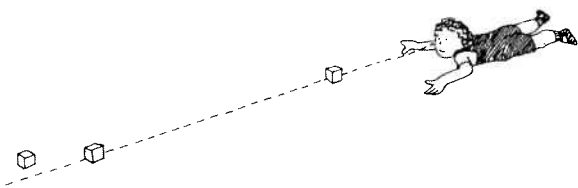
Inleiding

57. Es sollen sich drei Schüler längs einer Geraden vor die Klasse aufstellen – ohne irgend welche Hilfsmittel zu gebrauchen; ein vierter Schüler soll sie, ebenfalls ohne Hilfsmittel, kontrollieren. – Worauf beruht die Möglichkeit dieser Aufgabe?

anno 1931

VISEREN

anno 1991



“Hoe oud is nieuw?” of “Hoe nieuw is oud?” Beide vragen zouden als onderschrift kunnen dienen bij de eerste afbeelding van dit artikel. De eerste in het Duits gestelde opgave stamt uit 1931 en is afkomstig uit de beroemde *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest. Toen vond ze in het Nederlandse wiskundeonderwijs nog nauwelijks gehoor. Maar nu, meer dan een halve eeuw later, treffen we het zelfde vraagstuk in bijna alle meetkundeboeken aan. Het is door de karakteristieke vormgeving van het liggende jongetje, dat de drie blokjes in het vizier neemt, dat dit probleem als het ware het beeldmerk van de kijkmeetkunde is geworden. Dit voorbeeld is echter niet het enige uit de *Übungensammlung* dat uiteindelijk zijn beslag heeft gekregen in het meetkundeonderwijs van deze tijd. We zullen daarvan in het volgende nog meer frappante overeenkomsten zien, waarmee we tevens recht willen doen aan de unieke persoonlijkheid van mevrouw Ehrenfest en aan haar betekenis voor de ontwikkeling van het Nederlandse meetkundeonderwijs.

Tatiana en Paul

Tatiana Alekseevna Afanassjewa werd op 19 november 1876 in het Russische Kiev geboren. Zij was enig kind.

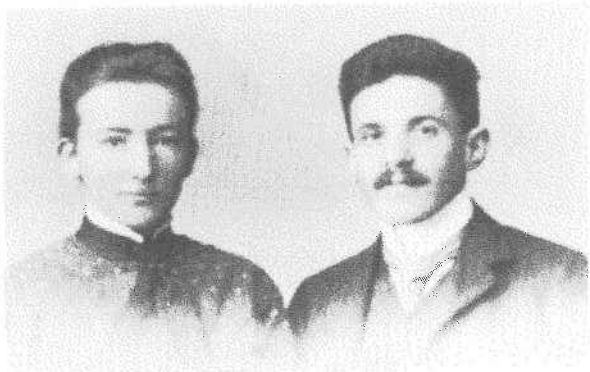
Haar vader, die zij al op jeugdige leeftijd verloor, was een civiel ingenieur. Zij groeide op in Petersburg bij haar oom Peter Afanassjev, een hoogleraar aan het Polytechnisch Instituut aldaar. Thuis leerde zij lezen, schrijven en rekenen, waarbij zij reeds op jonge leeftijd blijk gaf van een wiskundige aanleg. Vanaf haar tiende tot haar zestiende jaar ging zij naar de middelbare school. Daarna volgde zij een driejarige lerarenopleiding in de wis- en natuurkunde. Zij voltooide haar opleiding door middel van een vierjarige studie in de wis- en natuurkunde aan de Vrouwenuniversiteit van Petersburg. Alle opleidingen werden bekroond met een gouden medaille. In 1900 begon zij wiskundelessen te geven aan een particulier meisjessgymnasium en vanaf 1901 werd zij tevens assistente aan de Vrouwenuniversiteit om het practicum in de hogere wiskunde te leiden. In de zomer van 1902 vertrok Tatiana naar Göttingen in Duitsland om haar wetenschappelijke vorming te verdiepen en voort te zetten. Daar studeerde zij bij de vermaarde wiskundigen Felix Klein (1847–1925) en David Hilbert (1862–1943), die studenten uit de hele wereld aantrokken.

Hier leerde zij de Oostenrijkse fysicus Paul Ehrenfest (1880–1933) kennen, met wie zij in 1904 in het huwelijk trad. In het interessante boek van Martin Klein over Paul Ehrenfest lezen we over Tatiana:

Her sharp mind was combined with an absolutely independent spirit and a strong and stable approach to life that could and would withstand all that time would bring. Her personal code was a strict one, demanding the rigorous fulfilment of all obligations, and excluding indulgences like alcohol and tobacco. But this strong will and strict sense of duty were coupled with a lively interest in others and a real willingness to help them. She made friends easily and readily – among those whose intellectual and moral outlooks were compatible with her own. Her rooms were often the centre for student gatherings and lively discussions. Her Aunt Sonya, who had brought her up, and who accompanied her to Germany, knew how to make young people at home and set them at ease.

In Wenen studeerde het echtpaar bij Boltzmann, bij wie Paul ook promoveerde. Samen verbleven Paul en Tatiana nog een jaar (1905–1906) in Göttingen, waar zij op

verzoek van Klein een bijdrage leverden aan de *Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften*. Van 1907 tot 1912 woonden zij in Rusland, waar Tatiana weer in het onderwijs ging. Voor het eerst werd toen haar propaedeutische meetkundedecursus uitgetoetst. Ook werd zij gevraagd haar medewerking te verlenen aan de hervormingen van het wiskundeonderwijs aldaar. Tevens behaalde Tatiana gedurende deze periode nog een diploma aan de mannenuniversiteit van Petersburg, wederom bekroond met een gouden medaille.



Tatiana en Paul Ehrenfest, 1904 (Bron: Klein, 1970)

In 1912 nam het leven van de familie Ehrenfest een beslissende wending. Niet alleen voor Tatiana en Paul in persoonlijke zin, maar ook voor de Nederlandse wetenschappelijke en onderwijskundige wereld was hun komst naar Leiden, waar Paul de hoogleraarsstoel in de theoretische natuurkunde van H.A. Lorentz (1853–1928) overnam, van bijzondere betekenis.

Al spoedig zocht mevrouw Ehrenfest contact met de Nederlandse wiskundeleraren en vonden er onder haar leiding bijeenkomsten plaats. In 1915 verschijnt het eerste artikel van haar hand. In 1924 ontstaat een pennestrijd met E. J. Dijksterhuis (1892–1965). De *Übungensammlung* volgt in 1931 en in 1951 voltrekt zich een discussie met Hans Freudenthal (1905–1990). Ondertussen werd mevrouw Ehrenfest van 1926 tot 1933 weer naar Rusland beroepen om zich bezig te houden met de opleiding van de wis- en natuurkundeleraren. In die tijd deed zij opnieuw ervaringen in de schoolpraktijk op met haar propaedeutische meetkunde cursus.

In 1933 kwam onder dramatische omstandigheden een eind aan het leven van Paul Ehrenfest en haar jongste zoon Vassily. Ook kreeg Tatiana enkele jaren daarna nog het verlies van haar zoon Paul te verwerken. Vanaf 1933 bleef mevrouw Ehrenfest in Nederland. Vrijwel vanaf de oprichting van de Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (WVO) was mevrouw Ehrenfest lid van deze belangrijke groep. De meeste vergaderingen vonden plaats in het door haarzelf ontworpen huis aan de Witterozenstraat 57 te Leiden, dat volgens Pierre van Hiele

“tot haar dood toe (...) een plek (is) geweest, waarheen wis- en natuurkundeleraren zich begaven om nieuwe didactische inzichten te toetsen.”¹



Huis in de Witterozenstraat in Leiden

Tatiana Afanassjewa overleed op 14 april 1964, ze werd 87 jaar oud. In het door C. Visser geschreven *In Memoriam*, verschenen in *Vernieuwing voor Opvoeding en Onderwijs*, lezen we:

“Mevrouw Ehrenfest stelde in vele dingen belang. Altijd met hart en ziel en met een geestdrift die aanstekelijk was. Zij was een flinke vrouw. Einstein, die een goede vriend van Ehrenfest was, beschreef haar eens als een sterke en standvastige persoonlijkheid, die geestelijk de gelijke was van haar man, en preees haar evenwichtigheid, haar onafhankelijkheid, haar vastberadenheid in het gezicht van alle beproevingen, en de zuiverheid van haar denken, gevoelen en handelen.”

De ideale meetkundedecursus van mevrouw Ehrenfest

Toen mevrouw Ehrenfest rond 1916 met haar werkgroepsbijeenkomsten begon, waren ook hier te lande reeds pogingen gaande om de inleiding in de meetkunde te ontdoen van het harnas van de axiomatische start en de zogenaamde logisch-deductieve opbouw. Van de voorstanders voor een meer informele aanpak noemen we: Kleefstra, Hoestra, Wolda en Reindersma. Met de laatste kwam mevrouw Ehrenfest vrij snel in aanraking. Toch verschilden de uitwerkingen van de genoemde ‘informelen’ nog al met de ideeën van mevrouw Ehrenfest. Daarom bespreken we nu eerst de brochure *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?*, welke mevrouw Ehrenfest in 1924 aan het Nederlandse onderwijs presenteerde.

Mevrouw Ehrenfest maakt onderscheid tussen Ruimteleer en Axiomatiek. Ruimteleer betreft het ‘begrijpen’ van de ruimte en het kunnen toepassen van dit begrip, bij

axiomatiek wordt de meetkunde beschouwd als een formeel logisch systeem van axioma's en stellingen.

Verder onderscheidde zij drie stadia in het onderwijsleerproces: allereerst diende het aanvankelijk meetkundeonderwijs te beginnen met een zogenoemde propaedeutische of inleidende cursus, daarna moest een meer systematische cursus volgen om tenslotte met een strikt axiomatische leergang te besluiten. De propaedeutische cursus diende een intuïtief karakter te hebben. Het verschil tussen intuïtie en logisch werken omschreef zij als volgt:

"(...) bij ieder verwerven van inzicht zijn twee stappen uit elkaar te houden: het zien van een zekeren trek in het beeld, dat we in ons hoofd hebben, en het zich bewust worden daarvan. Het element van 'zich bewust worden' speelt een voornamelijk rol bij al de verschillende stappen van het denkproces: bij het vaststellen en het ordenen van hetgeen aanvankelijk ons intuïtieve beeld voorstelt, bij het ontdekken van gapingen en tegenstrijdigheden erin, bij het trachten om die gapingen aan te vullen en bij het nagaan van den oorsprong dier tegenstrijdigheden. Dit alles noem ik nu het 'logische' werk.

Datgene, wat zoo bewerkt wordt (of ook soms onbewerkt blijft), noem ik 'intuïtie'. Het ontwaren van iets zonder er zich rekenschap van te geven en ook het ordenen daarvan zonder bewustwording reken ik tot de 'intuïtieve' werkzaamheid."²

Als inleiding moest dus uitgegaan worden van intuïtieve meetkundige noties, die de kinderen uit de realiteit hebben verworven, waarbij vooral het voorstellingsvermogen – het vormen van mentale beelden zouden wij thans zeggen – ontwikkeld diende te worden. De intuïtieve werkzaamheid werd niet alleen van belang geacht voor het verwerven van begrippen en relaties tussen die begrippen, maar werd zelfs als een noodzakelijke voorwaarde gezien voor datgene waar het mevrouw Ehrenfest vooral om ging: leren denken. Dit werd zelfs tot een persoonlijk credo verheven, wanneer zij stelt: "Zonder intuïtie is geen denken mogelijk". Vanuit de intuïtieve basis zouden er betere voorwaarden geschapen worden om later tot een meer formeel meetkundeonderwijs over te gaan. Dit laatste betekende dat in de systematische cursus de nadruk meer op het logische werk zou komen te liggen. Niet echter volgens de traditionele Euclidische opbouw, maar aangepast aan het niveau van de kinderen.

Praktisch betekende dit dat evidente stellingen (zoals de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk) niet bewezen werden, maar (voorlopig) als axioma's werden opgevat. Verder dat de leerlingen zelf de stellingen dienden te formuleren én bewijzen, zij het dat zoiets wel onder leiding van de leraar zou moeten gebeuren. En tenslotte dat de inhoud van de cursus zo beknopt mogelijk hoorde te zijn. Alles diende in het teken te staan van de essentie van de theorie. Daartoe zouden ketens van stellingen opgebouwd moeten worden, ook wel stambomen genoemd, wat we tegenwoordig als 'lokaal deductief redeneren' zouden omschrijven. We zien hier-

uit dat mevrouw Ehrenfest grote waarde toekende aan het leren denken, hetgeen zij letterlijk als volgt onder woorden bracht:

"Ik behoor tot diegenen, die aan de tot 'logisch zijn' opvoedende werking van de Meetkunde wèl geloven."³

'Denken' betekende voor haar: zelfstandig opstellen van premissen en zelfstandig trekken van oordelen daaruit. De toen bestaande opvattingen over leren denken, waarbij de premissen (de Euclidische axioma's) gegeven zijn en de reeds geformuleerde stellingen moeten worden afgeleid, noemde zij 'rekenen'.

"(...) een in syllogismen geformuleerd bewijs (is) een teeken (...), dat men de stof (...) voldoende doordacht heeft. Het is echter onjuist, dat de syllogismen het instrument zelf van het denken zijn."⁴

Haar opvatting dat constructie van kennis te prefereren is boven reproductie doet evenals haar idee over een intuïtieve inleiding zeer modern aan.

"De kennismaking met de Axiomatica en ook met vragen van kennistheoretischen aard (natuurlijk niet in overdreven mate) zou veel meer op haar plaats zijn na de beëindiging van den systematischen cursus der Ruimteleer."⁵

Dit citaat maakt duidelijk dat mevrouw Ehrenfest tevens belang hecht aan het opbouwen van een formeel logisch systeem. Zij

"acht het van grote praktische betekenis, dat iemand zich niet alleen voor de juistheid van zijn opvattingen, maar ook voor den oorsprong en de logische reden daarvan interesseert;"⁶

In dit verband zij er aan herinnerd dat de studie van de grondslagen van de wiskunde in het begin van deze eeuw grote vooruitgang had geboekt; dat mevrouw Ehrenfest deze ontwikkelingen van zeer nabij had meegemaakt en vooral dat zij zeer geïmponeerd was geraakt door de ontdekking van de niet-Euclidische meetkenden met hun eigen axiomastelsels en bijbehorende modellen. Juist dit laatste zag zij ook als een mogelijk onderwerp van studie voor de middelbare school.

Bij herhaling benadrukte zij het programma niet te overladen, liever het essentiële diepgaand te behandelen dan veel op een oppervlakkige wijze. In de door haar voorgestane propaedeutische cursus diende plaats te zijn voor concreet handelend werk, zoals meten, tekenen, knippen, plakken en dergelijke. Uitdrukkelijk werd echter gesteld dat dit empirische werk – zelf sprak zij van de laboratorium-methode – niet een doel op zich mocht worden. Het diende altijd in dienst te staan van de ontwikkeling van het voorstellingsvermogen en gepaard te gaan met de denkhandelingen. Helaas is dit uitgangspunt vaak verkeerd begrepen, waardoor een intuïtieve cursus soms ietwat denigrerend gelijkgesteld werd met louter plakken en knippen. Het hier besproken artikel sloot af met een aantal voorbeelden van de door me-

vrouw Ehrenfest bedoelde propaedeuse, waarbij het stereometrische vertrekpunt opvalt.

Genoemde publikatie is de aanleiding geweest tot het ontstaan van een tijdschrift voor de didactiek van de exacte vakken, dat thans onder de naam *Euclides* zijn 68-ste jaargang beleeft. Het openingsartikel van dit tijdschrift was van de hand van Dijksterhuis en droeg als titel: *Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?* Het was een reactie op het geschrift van mevrouw Ehrenfest en zijn antwoord op de gestelde vraag is een hartgrondig neen. Hoe kon het anders; Dijksterhuis was een purist en wenste een wetenschappelijke implementatie van de meetkunde en was wars van elke vorm van een genetische aanpak. De discussie tussen hem en mevrouw Ehrenfest zette zich nog voort in genoemd tijdschrift. De strijd werd vooralsnog echter beslist in het voordeel van Dijksterhuis en de zijnen, die in feite de touwtjes in handen hadden, zowel bij *Euclides* – nomen est omen – als bij het opstellen van de officiële programma's.

Übungensammlung

Zette de discussie tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis het denken over doel en aard van het wiskunde-onderwijs aan, met de *Übungensammlung* uit 1931 gaf mevrouw Ehrenfest een praktische aanwijzing voor de uitwerking van de propaedeutische cursus. Dit boekje bevat 194 ideeën, geordend in 19 onderwerpen, zoals afstanden, lijn als lichtstraal, symmetrie, schaduw, perspectief en topologie. Het is geen lineaire leergang; de losse activiteiten zijn bedoeld als ideeën voor lessen, die door de leraar uitgewerkt dienen te worden. Het hoofddoel van de verzameling is het ontwikkelen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen, voorafgaande aan de latere systematische cursus. Mentale activiteiten (hoofdmeetkunde) worden gepropageerd boven het concrete handelen (empirie). Empirische activiteiten worden niet afgewezen, maar ze dienen betekenis te hebben voor het denken. Als voorbeeld hiervoor wordt het vinden van de constante verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel door middel van meten versus de methode van de ingeschreven zeshoek, twaalfhoek, enzovoort genoemd. Naast activiteiten in het platte vlak, wordt vooral ook in de ruimte gewerkt, ook op gekromde oppervlakken. De begrippen worden zoveel mogelijk ontleend aan objecten en verschijnselen uit de realiteit, met inbegrip van machines en werktuigen.

Bij het onderwerp afstanden komt het schatten, kiezen van een maat en de relativiteit van een maat aan de orde. Het begrip hoek ontstaat uit de beweging van de wijzers van de klok, waardoor meteen draaiing en draaiingszin ter sprake komen. (De in het Duits gestelde opgaven zijn door de auteur vrij vertaald.)

32. *De leerling moet op weg van huis naar school bij elke straathoek de hoek, die hij maakt opmeten en deze*

optekenen. Op grond daarvan moet hij de hoek bepalen die de voorgevel van zijn huis en die van de school maken. Dit controleren met de stadsplattegrond. Wat te doen als de wegen niet recht zijn? Iets analoogs als oefening vooraf binnen het schoolgebouw doen.

Het begrip kortste afstand wordt aan de hand van allerlei reële situaties ontwikkeld; bijvoorbeeld wordt gevraagd de lengte van een bergpad te meten, maar ook de werkelijk kortste afstand vast te stellen. Dit soort vraagstukken ook op een bol:

53. *Welke richting moet een vliegtuig in Berlijn nemen om via de kortste weg in Moskou te komen? En hoe van Berlijn naar Java? Maak gebruik van een globe en een touwtje. Is de boog van een parallelcirkel op de bol de kortste afstand?*

Aandacht voor de ontwikkeling van het begrip rechte lijn zagen we al in het in figuur 1 genoemde viseren en aandacht voor de ligging van lijnen ten opzichte van elkaar wordt gewekt door een opgave als:

69. *Waarom loopt de maan met je mee? Als je in een rijdende trein zit, waarom schieten de dingen die dichterbij zijn dan sneller voorbij dan die, welke verder weg zijn? Maak een schematische tekening.*

Bij dit soort activiteiten wordt vooral het construerende aspect (niet in formele zin) uitgebuit, zoals een verticaal vlak door een lijn aanbrengen, waarbij gebruik gemaakt wordt van een in gedachten genomen schietlood. De voorbeelden worden uit de realiteit gehaald, als bijvoorbeeld het roteren van een as, het maken van doorsneden met behulp van vloeistoffen in ruimtelijke vormen, het maken van perspectivische beelden en aanzichten, zoals:

101. *Houd een beker zó dat je de rand als een rechte lijn ziet. (Kijk met één oog). Daarna langzaam naar beneden bewegen. Wat gebeurt er nu met de vorm van de rand? Hoe moet je die tekenen? Zet een glasplaat tussen je oog en de beker en teken daarop de rand van de beker. Hoe moet je de beker houden opdat de rand precies een cirkel wordt.*

De onderwerpen 'Geometrie der Mechanismen' en 'Freiheitsgrade' verraden mevrouw Ehrenfests natuurkundige achtergrond. Onder 'Parallelenaxiom und seine Folgen' is als eerste activiteit opgenomen:

155. *Men wil een grote vloer met één soort tegels volledig bedekken. Welke vorm kunnen deze tegels hebben? Kunnen het driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken zijn? Kunnen ze ook willekeurige hoeken hebben?*

Maar ook:

162. Maak schematische tekeningen van de methode om de straal van de aarde te bepalen. Evenzo voor de afstand van de maan tot de aarde als je de straal van de aarde kent.

en bij het onderwerp 'De cirkel':

170. Je moet een rok en een broek van gelijke lengte naaien. Waarvoor heb je het meeste stof nodig? Je kunt dit ongeveer schatten, als je de rok als een koker opvat en de broek als twee kokers.

De aangehaalde voorbeelden maken duidelijk hoe de 'opgaven' qua inhoud en vorm afwijken van de gewone schoolboekopgaven. Ook het niveau van de verschillende oefeningen onderling is sterk verschillend. Redenen waarom dit boek bepaald niet erg geschikt was (en dat ook nu niet zou zijn) voor de modale leraar. Toch zou dit obscure boek een belangrijke betekenis gaan krijgen voor de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in Nederland. Freudenthal maakte P.M. van Hiele reeds in 1931 attent op dit boek. In 1951 schreef Freudenthal:

"(...) dat haar helaas tot verregaande onbekendheid gedoemde *Übungensammlung* het beste is dat ik op mathematisch-didactisch gebied ooit heb gezien (...)." ⁷

Vormende waarde

Op de hiervoor genoemde effecten zullen we aan het eind van dit artikel ingaan. Maar eerst zullen we een ander aspect van Mevrouw Ehrenfests opvattingen in het kort bespreken. De propaedeutische cursus diende slechts om de basis te leggen voor de systematische cursus. In deze systematische cursus zou samen met de leerlingen een beknopt systeem van stellingen opgebouwd moeten worden. Begrip van zo'n systeem en het zelf opbouwen daarvan zou volgens haar een sterk vormende waarde hebben, welk begrip zij voor een schoolvak als volgt omschrijft:

"Was ist 'bildender Wert' eines Schulfaches? – Wohl dieses, dass die Methode um die Probleme dieses Faches zu behandeln so sehr dem Schüler eigen wird, dass er sie auch auf andere Gebiete seines Denkens überträgt." ⁸

Mevrouw Ehrenfest heeft haar hele leven vastgehouden aan haar geloof in de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, of zoals zij het zelf ook wel noemde goede denkmanieren. Dit leidde in 1951 tot een officiële, maar 'georganiseerde botsing' met Freudenthal, die overigens haar ideeën over de intuïtieve inleiding in de meetkunde zeer waardeerde en die na de Tweede Wereldoorlog een belangrijke rol vervulde in de Wiskunde Werkgroep van de WVO. *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?*, zo heet de brochure uit 1951, een publikatie van de Wiskunde Werkgroep, waarin mevrouw Ehrenfest en Freudenthal in twee artikelen en twee wederwoorden hun discussie presenteer-

den. Waar mevrouw Ehrenfest in de elementaire meetkunde vanwege haar eenvoud juist een geschikt onderwerp zag om het leren denken te bevorderen, achtte Freudenthal om dezelfde reden de wiskunde daartoe juist het slechtste terrein.

"De wiskunde is in dat opzicht veel te weinig problematisch, omdat haar te eenvoudige structuur haar in hoge mate vrijwaart tegen het optreden van tegenstrijdigheden." ⁹

Zowel de stellingname van Freudenthal als die van mevrouw Ehrenfest heeft een subjectief karakter. Die van Freudenthal kan het best als volgt samengevat worden:

"(...) ik vrees, dat men op drijfzand komt, wanneer men de uren, die het één of andere schoolvak opeist, wil rechtvaardigen met een beroep op de denkoefeningen, waaraan die tijd zou worden besteed." ¹⁰

Toch neemt Freudenthal hier later een wat genuanceerder standpunt over in. In 1963 publiceert hij het artikel *Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben?*, dat in 1973 grotendeels ook in zijn bekende werk *Mathematics as an educational task* wordt opgenomen. Het antwoord op het tweede gedeelte van de door hemzelf gestelde vraag is bevestigend, mits axiomatic in de betekenis van axiomatiseren opgevat wordt. Hij bedoelt hiermee dat axiomatic niet via een geprefabriceerd systeem aangeboden wordt, maar als scheppende activiteit voor de leerlingen. Hij spreekt veelvuldig over 'lokaal organiseren' en/of 'lokaal ordenen'. In latere publikaties over 'lokaal deductief redeneren'.

Zo afwijzend stond Freudenthal dus toch ook weer niet tegenover mevrouw Ehrenfests rotsvaste geloof in de vormende waarde van het wiskundeonderwijs, immers ook haar ideaal was het in een derde ronde het meetkundeonderwijs af te sluiten met een axiomatische cursus. En in 1987 schrijft Freudenthal in zijn autobiografische boek *Schrijf dat op Hans* zelfs: "Nu, (...), sla ik de vormende waarde van het wiskunde-leren hoog aan, geweldig hoog." We moeten hierbij echter aantekenen dat hij op dat moment een geheel ander wiskundeonderwijs, de realistische aanpak, dan zo'n halve eeuw daarvoor op het oog had.

In zekere zin is mevrouw Ehrenfest de aanjaagster geweest voor de ontwikkeling van Freudenthals didactische opvattingen. Parallelliteiten zien we in het belang van het zelfzoekende van de leerling, het uitgaan van intuïtie, het aansluiten bij de realiteit, het lokaal deductief redeneren en het zelf axiomatiseren. Freudenthal liet geen gelegenheid voorbijgaan om mevrouw Ehrenfests ideeën te prijzen. Meermalen noemde hij haar *Übungensammlung* een meesterwerk. In feite waren zij slechts over het aspect van de vormende waarde voortdurend in discussie. De nadrukkelijkheid van de vormende waarde als motivering voor het wiskundeonderwijs zou echter

vanaf de jaren vijftig steeds meer naar de achtergrond verschuiven.

Mevrouw Ehrenfests invloed

Zoals eerder opgemerkt, is de Wiskunde Werkgroep (WW) van de WVO, die bestaan heeft van 1936 tot 1974, van cruciaal belang geweest voor de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in Nederland. Vooral in de beginfase en de periode vlak na de oorlog moet mevrouw Ehrenfest zeer actief geweest zijn en een stimulerende rol gespeeld hebben. Reeds in 1938 ontstond de samenwerking met de Commissie Kohnstamm, die de aansluitingsmoeilijkheden tussen l.o. en m.o. op het gebied van de wiskundige vakken, moest bestuderen. Daartoe werden drie commissies gevormd, met de volgende opdrachten:

1. de uitwerking van een propaedeuse op de grondslagen van die van mevrouw Ehrenfest,
2. ter uitwerking van een meetkundecursus die aangrijpt op wat het kind kan en wat zijn belangstelling heeft,
3. ter vaststelling van een minimumprogramma.

Na 1945 was de Wiskunde Werkgroep opnieuw met enthousiasme en grote werklust aan de slag gegaan. Tussen 1948 en 1952 werd door de WW een voorstel voor een nieuw wiskundeprogramma voor het vmo opgesteld. Door de verenigingen van wiskundeleraren WIMECOS en LIWENAGEL werd op dit voorstel ingespeeld en in 1954 namen zij dit rapport vrijwel geheel over als voorstel voor een nieuw leerplan voor gymnasium en HBS. In de meetkundecommissie zaten onder meer P.M. van Hiele en mevrouw Ehrenfest. Over de elementaire meetkunde stelt genoemde commissie dat zij 'een waardevol bestanddeel van het programma van het vmo' is. Verder motiveert zij de waarde als volgt:

"de eigenschappen der ruimte, waarin het leven zich afspeelt, beter leren begrijpen en beheersen" (...) "om een logisch samenhangend systeem van wetenschap op te bouwen" (...) "door zuiver nadenken tot vermeerdering van kennis te komen." ¹¹

Ziehier precies mevrouw Ehrenfests credo. Vanaf 1958, wanneer het programma van kracht wordt, komen er dan ook meetkundeboeken met een korte intuïtieve inleiding en een wat afgeslankte programma-omvang op de markt. Ze kunnen echter nog niet eens een zwakke afspiegeling genoemd worden van wat mevrouw Ehrenfest met haar *Übungensammlung* en systematische cursus bedoelde. Het dichtst bij haar ideeën stond de meetkundecursus van Dina van Hiele-Geldof (1911-1958), die op dat ontwerp en zijn didactische uitwerking in 1957 promoveerde. In deze cursus wordt gestart met concreet ruimtelijk materiaal, waarmee de grondleggende begrippen worden verworven. Sterke nadruk ligt op het symmetrie-begrip. Bij de constructies wordt uitgegaan van de ruit als basisfiguur. Centraal in het meer

systematische deel staat het betegelen van een vloer (vlakvulling) met driehoeken. Hiermee worden de fundamentele planimetrische stellingen afgeleid. Reeds in het *Werkboek de Meetkunde* uit 1947 dat Dina (Dieke) samen met haar echtgenoot Pierre van Hiele schreef, zijn duidelijk de invloeden van de trits 'intuïtieve inleiding - systematische cursus - axiomatisering' te herkennen. Van Hiele zelf zegt over deze beïnvloeding het volgende:

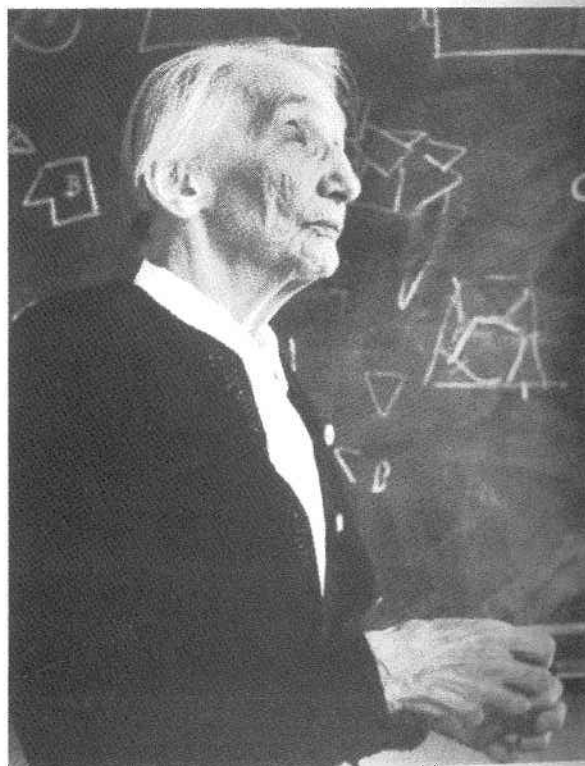
"We (Dina en Pierre, EdM) hebben in onze boeken verschillende malen gebruik gemaakt van ideeën uit de *Übungensammlung*, maar mevrouw Ehrenfest was daar nooit zo blij mee: wij gebruikten de gedachten in de wiskundige kontekst, terwijl zij meer de fysische kontekst op het oog had." ¹²

Ter gelegenheid van de 85ste verjaardag van mevrouw Ehrenfest in 1961, schreef Van Hiele hierover het volgende:

"De andere belangrijke gedachte van mevrouw Ehrenfest op het gebied van de didactiek der meetkunde is door niemand uitgewerkt. Deze houdt in, dat men de meetkunde zou dienen te beginnen met uit te gaan van de natuur: draaias, lichtstraal, gespannen touw, enzovoorts (...). Voor Nederlandse scholen lijkt mij deze methode onuitvoerbaar en ook ongewenst." ¹³

In haar dankwoord bevestigt mevrouw Ehrenfest dit:

"(...) ik heb niemand van de Hollandse wiskundeleraren van mijn opvattingen betreffende het wiskundeonderwijs overtuigd." ¹⁴



Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, circa 1960

Zij kon toen zelfs niet vermoeden dat precies tien jaar later haar *Übungensammlung* opnieuw als vertrekpunt gebruikt zou gaan worden voor het meetkundeonderwijs op de basisschool. Veertig jaar nadat Freudenthal dit boek onder de aandacht van de Van Hieles had gebracht, deden hij en met name Treffers dat opnieuw op het toenmalige IOWO (1971–1981) bij de medewerkers van de Wiskobasgroep, die in 1971 officieel startten met hun leerplanontwikkelingswerk voor de basisschool. Freudenthal, die na de Tweede Wereldoorlog een actief lid (voorzitter vanaf 1950) van de WW was en de WW voor zichzelf als de hogeschool van de didactiek beschouwde, is – zoals we al eerder zagen – een belangrijke bemiddelaar geweest voor de verspreiding van mevrouw Ehrenfests ideeën uit de *Übungensammlung*.

We zullen nu in het kort laten zien hoe deze ontwikkelingen hebben geleid tot het huidige 'realistische meetkundeonderwijs' voor de basisschool en vervolgens hoe deze tendens zich voortgezet heeft tot de 'kijkmeetkunde' voor de laagste klassen van het voortgezet onderwijs.

Realistisch meetkundeonderwijs

Sinds de start van de Wiskobasgroep hebben Freudenthal en Treffers ervoor geijverd dat meetkunde weer een plaats zou krijgen in het programma van de basisschool. Meetkunde werd daarbij opgevat als het begrijpen van de ons omringende ruimte en de verschijnselen die zich daarbij voordoen, zoals:

- waarom worden de schaduwen langer als je van een lantaarnpaal wegloopt en niet als je van de zon wegloopt?
- op grond van enkele foto's van een object bepalen waar de fotograaf stond.

Deze problemen zouden zo uit de *Übungensammlung* hebben kunnen komen.

Er werden hiervoor een aantal projecten, zoals Waterland, Schip Ahoi en de Vierkuber ontworpen, maar ook losse, meer op zichzelf staande activiteiten. Treffers en De Moor analyseerden het leervak en kenden er tien aspecten¹⁵ aan toe. Later werd dit aantal tot zes gereduceerd: viseren en projecteren, lokaliseren en oriënteren, ruimtelijk redeneren, transformeren, tekenen en construeren, meten en rekenen.¹⁶

De achterliggende leerpsychologische visie wordt als volgt beschreven:

"Er wordt als het ware in deze onderwijsfase een fundering van intuïtieve noties gelegd. Later wordt hierop voortgebouwd: het ordenen van de meetkundige werkelijkheid gebeurt dan meer beredeneerd en beargumenteerd met behulp van onder meer taalsymbolen, plaatjes, redeneringen. Er worden nu geëxpliciteerde begrippen ontwikkeld als punt, lijn, hoek, richting, symmetrie, driehoek, kubus, spiegeling, gelijkvormig en dergelijke, die een zekere samenhang bezitten en waarop in het vervolgonderwijs kan worden voortgebouwd."¹⁷

Het komt ons voor dat deze gedachtengang zeer wel gepast zou hebben bij de ideeën die mevrouw Ehrenfest over een intuïtieve inleiding koesterde. De motivering luidt thans echter totaal anders. Van algemeen vormende waarde wordt niet gesproken, wel menen de didactici dat een dergelijk meetkundeonderwijs wellicht een meer wiskundige attitude kan bevorderen, wat we vormende waarde in engere zin kunnen noemen. Bovendien dienen de meetkundige activiteiten niet als voorbereiding op een logisch-deductieve cursus, welke mevrouw Ehrenfest juist voorzag. Alle moderne basisschoolboeken voor rekenen/wiskunde bevatten thans meetkundige onderwerpen. Meetkunde is sinds 1990 ook weer officieel opgenomen bij de kerndoelen voor het basisonderwijs:

- De leerlingen beschikken over eenvoudige noties en begrippen, waarmee zij ruimte meetkundig kunnen ordenen en beschrijven.
- De leerlingen kunnen ruimtelijk redeneren. Zij bedienen zich daarbij van bouwsels, plattegronden, kaarten en foto's en gegevens over plaats, richting en afstand.
- De leerlingen kunnen schaduwbeelden verklaren, figuren samenstellen en bouwplaten van regelmatige objecten ontwerpen en identificeren.

Het leerplan voor het voortgezet onderwijs van 1958 heeft slechts tien jaar dienst gedaan. Vanaf 1968 werd een geheel nieuw leerplan van kracht, dat het tijdperk van het structuralisme inluidde. Met invoering van dit programma werd het doodvonnis voltrokken over het Euclidische meetkundeonderwijs; in één klap verdwenen de aloude planimetrie en stereometrie. Ervoor in de plaats kwam een inleiding in de (aanschouwelijke) transformatie-meetkunde (translaties, lijnspiegeling en puntspiegeling). Het doel werd daarmee verlegd naar aritmetisering van de meetkunde door middel van vectormeetkunde en lineaire algebra. Meetkunde als ruimteleer had afgedaan.

Vanaf het midden van de jaren zeventig kwam ook de leerplanontwikkeling voor het voortgezet onderwijs meer onder de invloed te staan van de fenomenologische visie op wiskunde en wiskundeonderwijs, die eerder ten grondslag lag aan het Wiskobaswerk. 'Wiskunde als menselijke activiteit' werd het motto. Toen ontstonden ook de eerste ontwerpen voor meetkunde voor het voortgezet onderwijs, die een geheel nieuwe kijk op dit vak zou doen ontstaan. Ontwerpers van het eerste uur waren A. Goddijn, G. Schoemaker voor de onderbouw en later M. Kindt met zijn ruimtemeetkunde voor de bovenbouw. Toen midden jaren tachtig de overheid – op aandrang van de beide vakverenigingen NVvW en de NVORWO – besloot dat een geheel nieuw programma voor de totale leeftijdsgroep 12–16 ontworpen moest worden, werd op deze basis verder gewerkt. In 1992 kwam dit leerplan gereed en de meetkunde is thans weer terug als onderdeel van het wiskundeonderwijs. Evenals

in het basisonderwijs is gekozen voor de term realistisch wiskundeonderwijs. De meetkunde in het voortgezet onderwijs wordt onderscheiden naar vier grote onderdelen:

- kijkmeetkunde
- vormen en figuren
- plaatsbepalen en
- rekenen in de meetkunde.

Deze indeling strookt vrijwel met de zes aspecten die we eerder voor de meetkunde in het basisonderwijs beschreven. Over de inhoudelijke keuze stellen de ontwerpers in het *Achtergrondenboek Band 2*:

"(...) praktijkgerichte meetkunde, zonder de weg naar pure meetkundige abstractie af te sluiten." ¹⁸

De legitimering wordt als volgt omschreven:

"Er wordt gezocht naar inhouden en methoden die scholieren ook nu zullen kunnen gebruiken. Het wiskundeonderwijs moest niet langer uitsluitend gericht zijn op de intellectuele ontwikkeling van de leerlingen en op het voorbereiden op vervolgopleidingen. Volgens deze opvatting moesten we ons richten op wat leerlingen nu motiveert, op wat zij nu aankunnen, op waar zij nu aanleg voor hebben, op wat zij nu kunnen gebruiken buiten de wiskundeles. Een en ander kwam neer op een verschuiving van structureel realistisch wiskundeonderwijs naar realistisch wiskundeonderwijs." ¹⁹

Analyse van leerstofpakketten leert dat we van doen hebben met aanschouwelijke en praktische meetkunde, met daarnaast ook enige aandacht voor het esthetische en historische aspect. Een aantal onderwerpen, zoals het viseren om de rechte lijn te introduceren, zijn letterlijke Ehrenfest-opgaven. In feite kunnen we van een ideale uitwerking en voortzetting van de *Übungensammlung* van mevrouw Ehrenfest spreken.

In de verantwoording (door Goddijn) wordt ook uitdrukkelijk verwezen naar dit werk. En zelfs wordt gerefereerd aan haar eerdere geciteerde omschrijving van logisch denken: "(...) naar het essentiële in een gegeven situatie te zoeken (...) dit scherp te formuleren (...) en nooit de totale situatie uit het oog te verliezen." Voor de goede orde moet echter opgemerkt worden dat zij dit naar voren bracht in een pleidooi voor de formele waarde van het wiskundeonderwijs. Hier heeft men dit ook toegepast op de materiële waarde.

Hoe het zij, we kunnen concluderen dat na meer dan zestig jaar na het verschijnen van de *Übungensammlung* er thans een op intuïtieve basis gestoelde inleiding in de meetkunde bestaat. En eigenlijk tweemaal, in eerste ronde op de basisschool en daarna meer systematisch in de onderbouw van het voortgezet onderwijs.

Conclusies

Mevrouw Ehrenfest heeft zich meer dan een halve eeuw ingespannen het aanvankelijk meetkundeonderwijs te wijzigen. Tot 1945 moest zij oproeien tegen de gevestigde orde van de logisch-deductieven, die de methode van

de 'wetenschappelijke implementatie' voorstonden en de door mevrouw Ehrenfest gepropageerde 'genetische methode' krachtig verwierpen. Het aantal medestanders dat zij voor haar methode won was gering. Onder hen bevonden zich echter belangrijke didactici als H. Freudenthal, P. M. van Hiele, D. van Hiele-Geldof en P.J. van Albada. Er zijn drie redenen te noemen waarom haar grondidee van de intuïtieve inleiding – bijna dertig jaar na haar dood – uiteindelijk toch z'n beslag heeft gekregen.

1. Er was concreet materiaal voorhanden in de vorm van de *Übungensammlung*. Een dergelijke rijke bron van praktische onderwijsideeën lijkt een absolute voorwaarde voor het slagen van een leerplanontwikkelingsexperiment.
2. De grondleggende ideeën werden uitgedragen door een krachtige persoonlijkheid, die in staat was discussie aan te gaan met vakgenoten zowel op wetenschappelijk niveau als op dat van het praktische onderwijs. Hierdoor slaagde zij erin voor- en tegenstanders met elkaar in gesprek te brengen. De vorming van een dergelijke discussie- en werkgroep had een stimulerende uitwerking op de verdere ontwikkelingen. Vooral het feit dat mevrouw Ehrenfest Freudenthal heeft kunnen winnen voor haar idee van de intuïtieve inleiding in de meetkunde is van doorslaggevende betekenis geweest.
3. Er is tenslotte een professioneel instituut nodig geweest om de ruwe ideeën verder te ontwikkelen, via experimenten te testen en te voorzien van een onderwijsleertheorie.

Daarnaast zijn ook nog redenen van maatschappelijke, onderwijsstructurele en pedagogisch-didactische aard te noemen, maar deze komen niet voort uit de opvattingen over het vak zelf.

Mevrouw Ehrenfest heeft dus op het punt van de intuïtieve inleiding gelijk gekregen. De uitwerking is echter veel breder uitgevoerd dan zij oorspronkelijk bedoelde. Er zijn inleidende meetkundige activiteiten voor het basisonderwijs ontstaan en een zeer ruime realistische meetkundecursus voor het voortgezet onderwijs, die wel vier jaren kan beslaan. Haar idee van de beperkte systematische cursus, waarbij strikt logisch-deductief gewerkt zou moeten worden, is echter niet in het programma voor de onderbouw terecht gekomen. Een meer formele aanpak kan wel plaatsvinden in de hogere leerjaren van het voortgezet onderwijs. Of dergelijke uitwerkingen ook zouden stroken met datgene wat haar toen voor ogen stond, kunnen wij nooit weten. Een dergelijke cursus zou haars inziens van belang zijn in verband met de vormende waarde die ervan uit zou gaan. Deze opvatting is echter geenszins overgenomen in de huidige programma's. Met andere woorden, op dit punt heeft zij het gelijk niet aan haar kant gekregen. Tenslotte is ook de door haar voorgestane derde ronde, namelijk die van het

axiomatiseren van het systeem, voor zover wij thans kunnen overzien, nergens gerealiseerd. Het ziet er ook niet naar uit dat dit in de nabije toekomst zal gebeuren. Dit alles doet echter niets af aan het uiterst belangrijke werk dat mevrouw Ehrenfest ten behoeve van de vernieuwing van het Nederlandse wiskundeonderwijs gedurende de eerste helft van de twintigste eeuw heeft verricht. Zij was de grondlegster van de vernieuwingsbeweging, die ons land na 1970 op het gebied van het wiskundeonderwijs wereldwijd faam bezorgd heeft. In het huis aan de Witterozenstraat te Leiden zijn twee gevelstenen geplaatst. Eén met de tekst: "Hier woonde en werkte professor Ehrenfest" en één, waarvan de tekst luidt:

"ZIJN VROUW TATIANA AFANASSJEWА – HAAR TIJD VER VOORUIT – MAAKTE DIT HUIS OPEN VOOR MENSEN EN IDEEËN"

Dit artikel is een samenvatting van een deel van een groter onderzoek, dat door de auteur wordt uitgevoerd over de historische ontwikkeling van het aanvankelijk meetkundeonderwijs (4-14 jarigen) in Nederland (1800-1990).

Met dank aan: H. van Bommel (Wijk bij Duurstede), mevrouw T. van Bommel (Amsterdam), V. Frenkel (St Petersburg), P.M. van Hiele (Voorburg), J. Koch (St Maarten), Museum Boerhave (Leiden), M.S.R. Nihom (Den Haag), mevrouw W.E. Ritzema-van Aardenne (Castricum), R. Troelstra (Hilversum).

Noten

- [1] Hiele, P.M. van (1963-'64). T. Ehrenfest-Afanassjewa. *Euclides*, 39, p. 259.
- [2] Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1924). *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* Groningen.
- [3] loc. cit., p. 4.
- [4] loc. cit., p. 8.
- [5] loc. cit., p. 15.
- [6] loc. cit., p. 14.
- [7] Ehrenfest-Afanassjewa, T. en H. Freudenthal (1951). *Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?* Purmerend, p. 24.
- [8] Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1931). *Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse*. Den Haag, p. 2.
- [9] Ehrenfest-Afanassjewa, T. en H. Freudenthal (1951). p. 25.
- [10] loc. cit. p. 10
- [11] Het Wiskundeprogramma voor het V.H.M.O. (1953). Purmerend. p.13.
- [12] Brief van P.M. van Hiele aan E. de Moor 4-2-1993.
- [13] Hiele, P.M. van (1961). De betekenis van het stre-

ven van mevrouw Ehrenfest voor de methodieken van de meetkunde, zoals die thans in Nederland bestaan. *Mededelingenblad WW*, 9 (nov.) p. 8.

- [14] Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1962). *Mededelingenblad WW*, 10 (jan.-feb.), p. 2.
- [15] Treffers, A. en E. de Moor (1974-1975). Het aanvankelijk meetkundeonderwijs (2). *Euclides*, 50(2) p. 59.
- [16] Moor, E. de (1991). Geometry instruction in the Netherlands (ages 4-14) – the realistic approach. In L. Streefland (ed.), *Realistic mathematics education in primary school*. Freudenthal instituut, Utrecht, 119-138.
- [17] Treffers, A., E. de Moor en E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, deel 1*. Zwijssen, Tilburg, p. 94.
- [18] *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16, band 2*, Fi/ SOL, Utrecht/Enschede 1992, p. 25.
- [19] Kok, D. e.a. (1992). *Wiskunde 12-16, een boek voor docenten*. Utrecht/Enschede, 1992, p. 72.

Literatuur

- Berkel, K. van (1992). E.J. Dijksterhuis en het onderwijs in de wiskunde. *Euclides*, 68 (4).
- Beth, E.W. (1937-1938). Doel en zin van het meetkundeonderwijs. *Euclides*, 14.
- Beth, H.J.E. (1936-37). Het nieuwe leerplan voor wiskunde (H.B.S.B). In *Euclides*, 68.
- Casimir, H.B.G. (1984). *Het toeval van de werkelijkheid*. Amsterdam.
- Commissie Herziening Eindtermen (1990). *Advies kern-doelen voor de basisvorming in basisonderwijs en voortgezet onderwijs*. 's-Gravenhage: Ministerie van O&W.
- Dijksterhuis, E.J. (1924-25). Moet het meetkundeonderwijs gewijzigd worden? *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen*.
- Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1960). *Didactische opstellen*. Zutphen.
- Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1915). De rol der axioma's en bewijzen in de meetkunde. *Weekblad voor voorbereidend en hooger onderwijs*.
- Ehrenfest-Afanassjewa, T. (jan.-feb.1962). Ingezonden brief in het *Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep van de WVO*, 10 (1-2)
- Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kan sie haben? *Mathematikunterricht*, 9(4).
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel, Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1987). *Schrijf dat op, Hans*. Amsterdam.
- Hiele-Geldof, Dina van (1957). *De didactiek van de Meetkunde in de eerste klasse van het V.H.M.O.* (diss.).

Utrecht.

Hiele, P.M. van en D. van Hiele-Geldof (1947-1948). *Werkboek der Meetkunde, 2 delen*, Purmerend.

Hoestra, P. (1907). *Inleiding tot de meetkunde*. Groningen.

Jacobs, H.J. (1961-1962). Welke ontwikkelingsmomenten zijn er in het werk van de Wiskunde Werkgroep van de afgelopen 25 jaar op te merken? *Euclides*, 37 (1).

Kleefstra, J. (1909). *Over het onderwijs in de wiskunde*. Haarlem.

Klein, M. (1970). *Paul Ehrenfest, The making of a theoretical physicist, Vol. I*. Amsterdam-London.

Mededelingenblad van de Wiskunde Werkgroep der WVO, Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs, jaarg. 1953-1967.

Meetkundewerkgroep W12-16 (1990). *Meetkunde: Ervaringen van leerlingen centraal. Nieuwe Wiskrant*,

10(1).

Publicatie uit de Wiskunde-werkgroep voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (1953). *Het Wiskunde-programma voor het V.H.M.O.* Purmerend.

Reindersma, W. (1912). *Beknopt leerboek der vlakke meetkunde, deel I*. Groningen, Den Haag.

Freudenthal, H. ed. (1958). *Report on Methods of Initiation into Geometry*. Groningen.

Schogt, H.J. (1929). *Beginselen der vlakke meetkunde (en oefeningen)*. Groningen.

Treffers, A. en E. de Moor (1974). Het aanvankelijk meetkundeonderwijs (1). *Euclides* 50 (1).

Visser, C. (1963-'64) In memoriam T. Ehrenfest-Afanassjewa. *Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding*, 22, p. 217.

Voerman, P.J., (1913). *Metten en teekenen*. Groningen.

Wolda, G. (1921-1923). *Meetkunde I, II, III*. Zwolle.

Werkgroep Wiskunde & Visueel Gehandicapten

In de schoolboeken wordt tegenwoordig veel van contexten uitgegaan en ook de examens gaan in die richting. Dat maakt wiskunde leren voor visueel gehandicapte leerlingen moeilijker. Voor slechtziende leerlingen zijn plaatjes vaak niet duidelijk genoeg. Voor volledig blinde leerlingen heeft een onderwerp als *kijkmeetkunde* geen betekenis.

Er is een werkgroep opgericht om problemen van visueel gehandicapte leerlingen met het leren van wiskunde beter het hoofd te kunnen bieden. In deze werkgroep zijn alle vso-scholen voor visueel gehandicapten vertegenwoordigd; al deze scholen hebben gekozen voor de methode *Moderne Wiskunde* van Wolters-Noordhoff. De werkgroep heeft nog weinig contact met 'gewone' scholen waar visueel gehandicapte leerlingen in augustus in de brugklas zitten.

Voor slechtzienden zijn niet zoveel veranderingen no-

dig: dikkere lijnen gebruiken in sommige tekeningen, een aantal tekeningen en foto's vergroten en storende achtergrondkleuren wegnemen. De werkgroep wil voor slechtzienden nieuwe werkboeken maken bij *Moderne Wiskunde* met de (waar nodig bewerkte) inhoud van het oorspronkelijke werkboek plus onderdelen van het boek die bewerking behoeven; de uitvoering is enkelzijdig, in zwart-wit, op A4-formaat.

Voor blinden onderzoekt de werkgroep in hoeverre *Moderne Wiskunde* in braille-uitvoering bruikbaar is, en waar welke aanpassingen nodig en mogelijk zijn.

Informatie over de werkgroep is te verkrijgen bij:

APS, Informatiepunt Wiskunde

Postbus 85475

3508 AL Utrecht

telefoon: 030-856721 of 030-856722

fax: 030-882499