

Wat je ziet, wat je weet, wat je tekent

A.J. Goddijn

Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Nieuw in het wiskundeprogramma 12-16 is het meetkunde onderdeel *kijkmeetkunde*. Kijkmeetkunde gaat over hoe je dingen ziet en hoe je ruimtelijke dingen afbeeldt. Typische onderwerpen die daarbij ter tafel komen zijn:

- de kijklijn (de lijn vanuit het oog naar een punt van het bekeken object)
- de kijkhoek (de hoek tussen twee kijklijnen)
- de rol van het standpunt op wat gezien wordt
- aanzichten (boven- en zijaanzichten voornamelijk)
- de relatie tussen werkelijkheid en afbeelding (vervormingen en verlies van informatie bij afbeelden van een driedimensionale tekening).

De meeste (niet alle) van de nieuw verschenen boeken voor de brugklas besteden er ruim aandacht aan in een of andere vorm. Ervaringen opgedaan in het W12-16 project – en ervaringen van vele anderen – leren dat het onderwerp voor sommigen (docenten én leerlingen) eenvoudig en helder is, maar voor velen (leerlingen én docenten) soms behoorlijk lastig. De problemen zitten niet zo zeer in de puur wiskundige activiteiten, maar hebben veelal te maken met hoe tegen de fenomenen kijken en tekenen wordt aangekeken en met de lenigheid waarmee men (leerlingen en docenten) bepaalde activiteiten als het denkbeeldig zich verplaatsen naar een ander waarnemingsstandpunt, kan uitvoeren.

Dat laatste, het oefenen van het ruimtelijk voorstellen van en het in gedachten bewegen rond een voorwerp, is typisch waar kijkmeetkunde leren over gaat. Het andere, de visie op wat kijken in relatie met afbeelden is, hoort met name voor de docent tot de nuttige achtergrondkennis. Vanuit die achtergrondkennis kan meer adequaat gereageerd worden op problemen die zich bij leerlingen voordoen.

Dit artikel gaat op onderdelen van die achtergrondkennis in. Het meeste ervan is eerder gepubliceerd in *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16*, band 2. [1]

Een hardnekkig misverstand

We beginnen met een ervaring met brugklassen die te denken gaf. Het gaat om wat in figuur 1 te zien is.



fig. 1: Bomen bekijken.

De bomen moeten zo geplaatst worden dat I van figuur 2 gezien wordt en daarna zo dat II gezien wordt.

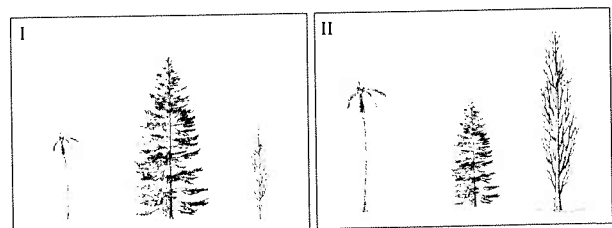


fig. 2: Schuif de bomen zo dat je dit (links) of dit (rechts) ziet.

Die opdracht blijkt onverwacht lastig. Het probleem is dat je blijft zien dat de populier de hoogste van de drie bomen is, hoe je ook schuift.

De bedenker van deze opdracht (de auteur van dit artikel, enige jaren terug) gaat er te gemakkelijk van uit dat zien in de ruimtelijke werkelijkheid vergaand uitwisselbaar is met zien op een vlakke afbeelding.

Dat is een misverstand, en omdat dit het hardnekkigste en storendste misverstand is dat bij kijkmeetkunde voorkomt, gaan we er wat dieper op in.

Het oog is meer dan een camera

Maar wat doet ons oog dan, dat gaat toch uit van een beeld op het netvlies, dat is in feite toch al een afbeelding op een vlakje, al is het dan gebogen? Biologisch gezien klopt dat wel en het is al vroeg ontdekt dat het zo werkt. Figuur 3 komt uit de *Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie* van R. Descartes. [2]

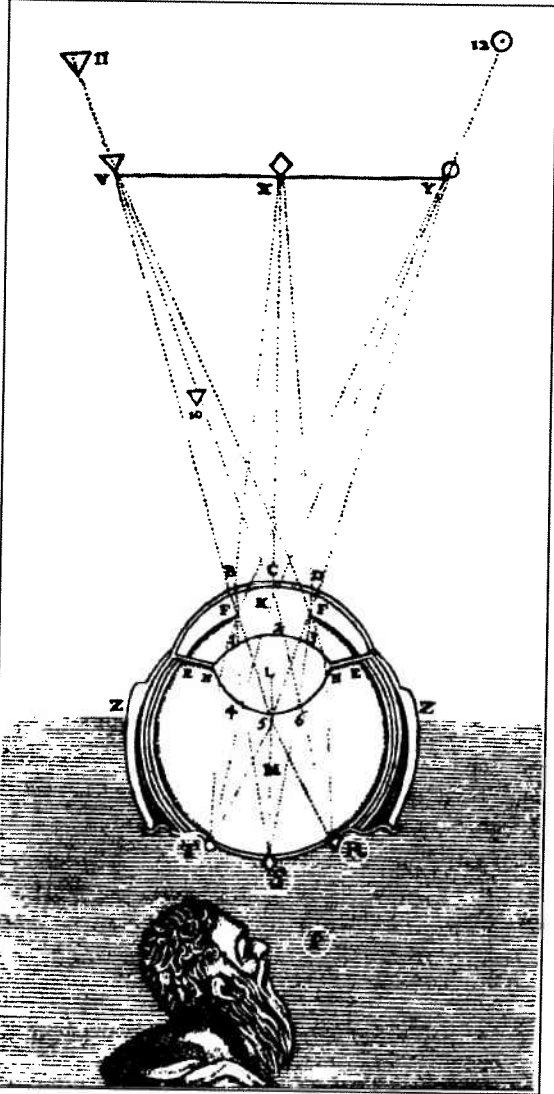


fig. 3

De lichtstralen vanuit y worden door de ooglenzen weer convergerend gemaakt en komen op het netvlies bij T samen. Oppervlakkig gezien lijkt het menselijk oog dus inderdaad op een fotooestel: er is een lens en een lichtgevoelig oppervlak (het netvlies), maar de volledige werking van ons gezichtsvermogen is zo anders dan het fotografieproces, dat de gelijkenis ons ook op een onjuist spoor zet. Onze hersens en ons oog vormen één geheel en leveren samen een ruimtelijk beeld van de werkelijkheid die we zien.

Het is in theorie wel zo dat onze hersens analyseren wat op het netvlies wordt afgebeeld, maar we zijn ons niet bewust van de gedaante van het netvliesbeeld, alleen van het resultaat: het ruimtelijk idee. Maar dat laatste is dus feitelijk een constructie van onze hersenen. Een recent artikel uit *Scientific American* (september 1992) gaat precies hierover en traceert welke hersenactiviteiten er voor nodig zijn. [3] Een citaat:

The visual stimuli available to the brain do not offer a stable code of information. The wavelengths of light reflected from surfaces change along with alterations in the illumination, yet the brain is able to assign a constant colour to them. The retinal image produced by the hand of a gesticulating speaker is never the same from moment to moment, yet the brain must consistently categorize it as a hand. An object's image varies with distance, yet the brain can ascertain its true size.

The brain's task, then, is to extract the constant, invariant features of objects from the perpetually changing flood of information it receives from them. Interpretation is an inextricable part of sensation. To obtain its knowledge of what is visible, the brain cannot therefore merely analyse the images presented to the retina; it must actively construct a visual world.

Kortom: onze hersens zeggen ons: die boom *is* hoger, en niet: de boom komt groter op het netvlies. Waarbij 'is' dan betekent: in de constructie die de hersenen maken op grond van het netvliesbeeld.

Hierbij komt nog dat onze ogen, optisch gezien, heel slecht zijn. Slechts een klein deel van het netvlies – het centrum – bevat voldoende zenuwcellen om het beeld redelijk scherp te kunnen maken. De buitenkant van het netvlies geeft slechts grove peilingen door, terwijl de gevoeligheid voor beweging en verandering daar juist groot is.

Daaruit merken we ook al dat onze hersens méér doen dan één kiekje bekijken. Ze verzamelen gegevens in de tijd, terwijl ons oog zich steeds ergens anders op richt. Er wordt uit het geheel een omvattend ruimtelijk beeld geschapen, dat voor onze gedachten overal scherp is.

Een klein experiment is voldoende om aan te tonen dat ons oog-hersenen systeem echt 'construeert' wat er niet is.

Sluit het linkeroog en neem de *Nieuwe Wiskrant* in uw handen. Breng het kruis van figuur 4 op zo'n 40 cm voor het rechteroog.

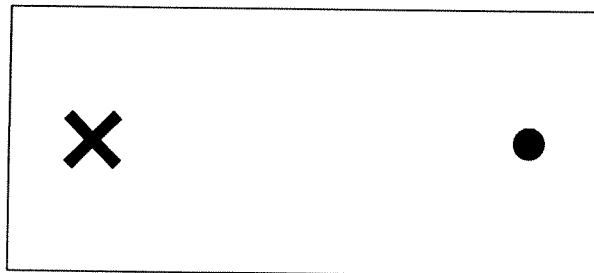


fig. 4

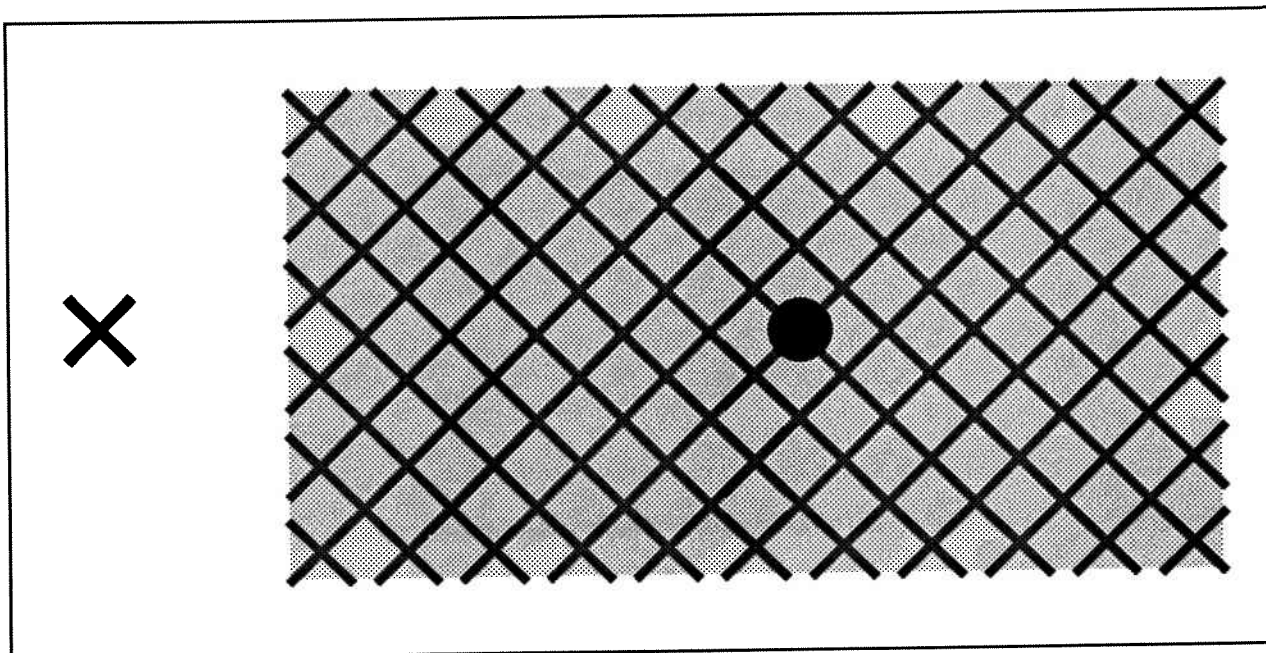


fig. 5

Houdt het rechteroog gericht op het kruis en beweeg de Nieuwe Wiskrant langzaam naar dat oog toe. Op zeker moment – bij mij als de afstand oog–kruis ongeveer 20 cm is – lijkt de stip weg te vallen.

Dit is het bekende experiment met de blinde vlek. Maar nu iets nieuws: doe het ook eens met figuur 5. Op zeker moment (iets verder van het oog) valt dan ook de stip weg, maar er ontstaat geen wit gat in het grijze veld: onze hersenen vullen het grijs en de ruitjes in het gat in. Mooier gaat dit alles in kleuren, zie [4].

Onze hersenen 'maken' iets van wat op het netvlies gevormd wordt. Voor het ruimtelijk kijken betekent dat: elk intuïtief omgaan met wat we zien gaat via een geconstrueerd ruimtelijk beeld, niet via een vlakke afbeelding. Bij het construeren van het mentaal ruimtelijk beeld gebruiken onze hersenen ook eigenschappen van objecten die we eerder geleerd hebben.

In figuur 6 ziet iedereen een muur met twee blokken erachter. Huizen misschien, tegenover elkaar.

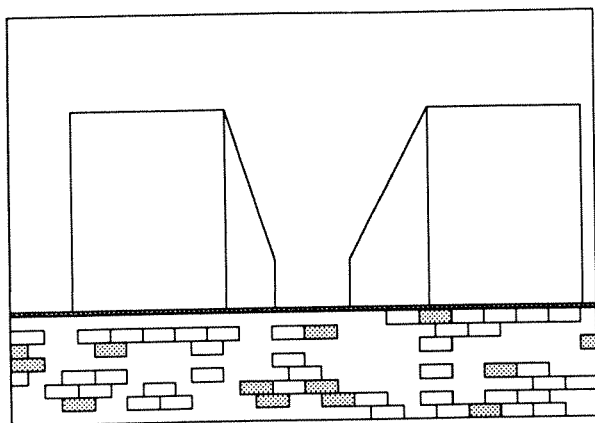


fig. 6

In figuur 7 kunnen we ons niet aan het afstandsverschil tussen muur en huizen onttrekken. Van onze kant van de muur kunnen we nog wel met een steentje een ruitje in het rechte blok ingooien. Links halen we dat nooit. De firma Vooruitgang zal nóg wel zo'n blok tussen die flat en de muur gaan plaatsen.

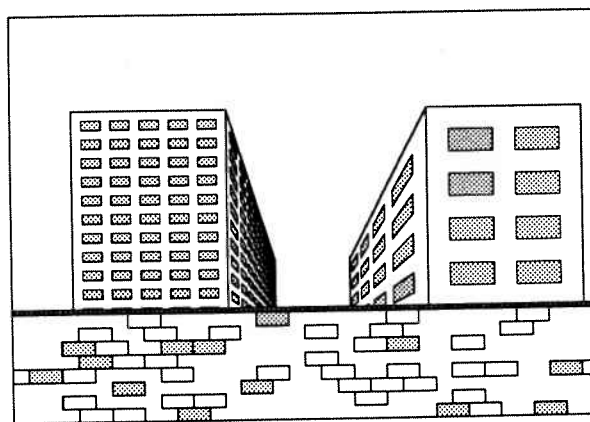


fig. 7

Terug naar de bomen. Dat 'verder weg' en 'kleiner' samenhangen is aan de leerling van figuur 1 heus wel bekend. Maar dat het meteen 'kleiner afbeelden' is, dat is iets anders. In de gegeven plaatjes zijn kleinere bomen getekend, maar er is juist vermeden aan te geven dat de afstand anders is.

Dat is het omgekeerde van 'wat je ziet': je ziet juist wel dat de bomen in werkelijkheid even groot zijn en op verschillende afstanden worden gezet.

Het mentaal ruimtelijke beeld dat opgebouwd werd heeft niet zo veel gemeen met de plaatjes.

Teken wat je ziet of wat je weet

We verwachten soms te gauw dat mensen (bijvoorbeeld leerlingen) bij 'tekenen wat je ziet' geneigd zijn tot de wetten van het perspectief. Laten we oppassen!

In figuur 8 zien we de oudst bekende afbeelding van een door paarden getrokken kar. Het is een in steen gekraste tekening uit Uzbekistan, van zo'n tweeduizend jaar voor Christus.

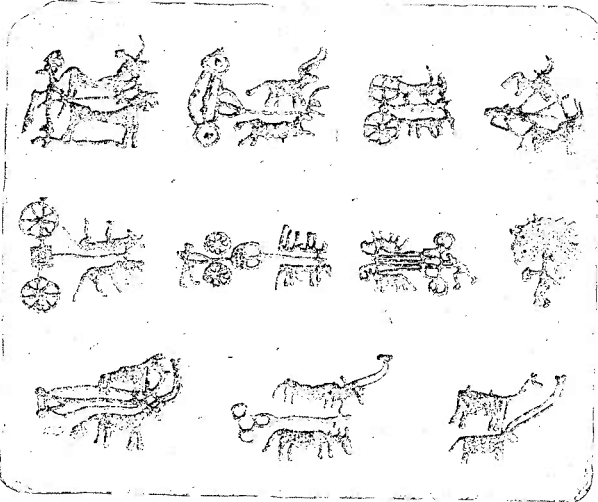


fig. 8: Paarden op een steen uit Uzbekistan; 2000 jaar v. Chr.

De 'tekenaar' laat zien dat er twee wielen en twee paarden zijn. De wagen met paarden is natuurlijk symmetrisch, dat is helder in de afbeelding te zien. De paarden met kar zijn op de gegeven manier afgebeeld om te laten zien hoe de kar met paarden in elkaar zit. Er is getekend wat je moet weten van de kar, niet hoe de kar geprojecteerd wordt. Er is echt getekend wat je nu van de kar weet en dat is precies wat je in Uzbekistan toen zag.

'Teken wat je ziet' is voor leerlingen ook niet zo'n geschikte opdracht als we iets willen in de richting van de perspectief-code. We herkennen dat in de volgende voorbeelden.

Voorbeeld: een cilinder tekenen

Zet eens een wc-rolletje rechtop op tafel. Laat kinderen dan 'tekenen wat je ziet'. Vaak komt er zoiets als in figuur 9.

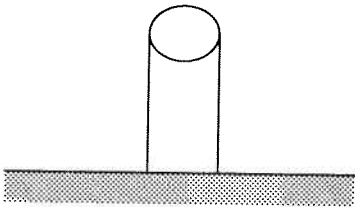


fig. 9: Een wc-rolletje getekend.

Je ziet immers dat:

- het rolletje plat op de tafel staat;

- het overall even dik is;
- het rond is.

Voorbeeld: een kubus tekenen

Een leerling van 13 jaar oud tekende de kubus van figuur 10. De leerling 'wist' hoe de voor- en bovenkant getekend 'moesten' worden. Bij het rechterzijvlak werd het volgens hem te gek. Merk op dat de naar rechts uitstekende hoek wel 90° is.

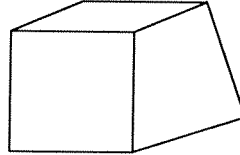


fig. 10: Een kubus.

In beide voorbeelden zijn de conflicten voelbaar. Conflicten tussen wat wel en wat niet aangepast wordt aan het platte tekenwerk.

Perspectief als techniek: een culturele keuze

De manier van tekenen die we 'perspectivisch' noemen probeert al die conflicten te vermijden door één keus te doen: zorg dat degene die naar de perspectieftekening kijkt, precies alles onder dezelfde hoeken te zien krijgt als de tekenaar zelf. Het middel daartoe is in feite simpel wat in figuur 11 is aangegeven. De tekenaar schetst op het doorkijkscherm wat zijn oog aftast. Als het scherm 'vol' getekend is, mag de bekijker van het scherm zijn/haar oog brengen waar het oog van de tekenaar was en zie daar: alle hoeken tussen kijklijnen naar de objecten achter het scherm worden door de kijklijnen naar de getekende objecten gegeven. Dat is alles, de rest (verdwijnpunten en zo) hoort tot de technische uitvoering, niet tot de kern.



fig. 11 (Albrecht Dürer, 1537)

Deze technische keuze is er dus juist op gericht tekening en werkelijkheid verwisselbaar te maken, zo lijkt het. In sommige Italiaanse kerken is het plafond bijvoorbeeld zó beschilderd, dat haast niet te zien is waar de echte architectuur ophoudt en het schilderwerk begint, als je maar op het juiste punt staat! Echter kan haast niet, perspectief als de volmaakte manier van afbeelden. Toch klopt er iets niet.

Neem een foto, gemaakt met een normaal fototoestel en afgedrukt op 9×13 cm. Dat is een handig gemaakte perspectiefafbeelding. De blikwijdte van het fototoestel is 40° , en om de foto onder die hoek te zien moet hij op ongeveer 21 cm van het oog (één oog!) gehouden worden. Dat doet niemand. Bovendien worden foto's zelden bekeken met één oog precies midden recht voor de foto. We gebruiken zulke perspectiefafbeeldingen echter niet op de manier van het kerkplafond. We lezen veeleer de foto als een 'code' voor bedoelde ruimtelijke objecten. Het heeft er mee te maken dat wij – West-Europeanen – al zó vaak foto's en perspectieftekeningen hebben gezien, dat we ook zonder het juiste standpunt in te nemen heel goed kunnen vaststellen wat de ruimtelijke betekenis van de afbeelding is. We doen al dit interpreterend onbewust en onmiddellijk. Dat moge blijken uit het volgende voorbeeld, waar we juist door al onze visuele ervaring op het verkeerde been worden gezet.

De meesten van ons zullen bij figuur 12 de indruk hebben dat de bovenste horizontale streep langer is dan de onderste.

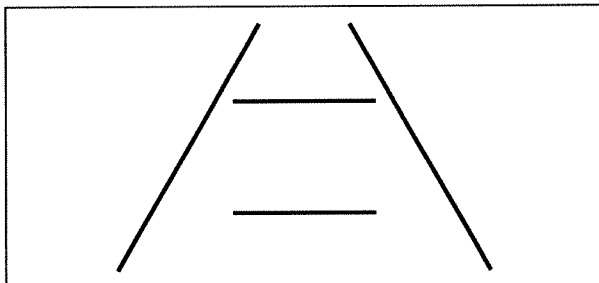


fig. 12: Gezichtsbedrog door dieptesuggestie.

Nameten leert dat dit niet zo is. De schuine strepen herkennen we onbewust als de code voor evenwijdige lijnen die van ons aflopen als bijvoorbeeld die van een spoorlijn. De voorste dwarslijn is dan half de spoorbreedte, de achterste lijn bijna de spoorbreedte. Met deze (en andere) figuren is onderzoek gedaan in West-Afrika onder mensen die niet blootgesteld zijn aan perspectieftekeningen. Die schatten de verhoudingen tussen de dwarslijnen correct in.

In onze samenleving word je verondersteld bepaalde afbeeldingen ruimtelijk te kunnen interpreteren, ook zonder dat je het juiste standpunt ten opzichte van de afbeelding weet.

Je moet als het ware de code van het perspectief tekenen impliciet kennen. Bij een bepaalde figuur op papier moet je direct weten: o, ze bedoelen een balk.

Er zijn verschillen tussen mensen in bedrevenheid met dit interpreteren volgens de heersende afbeeldingscodes; maar die treden pas naar voren in extreme situaties, als er weinig steun door herkenbare objecten op plaatjes is. Werken we met onnodig abstracte tekeningen bij kijkmeetkunde, dan zal dat merkbaar zijn. Het aanleren van de code van het perspectief zien we gebeuren in de kindertekening figuur 13.

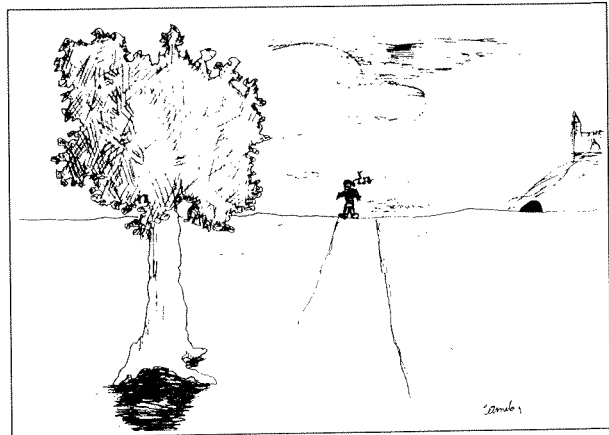


fig. 13: Fluitende Kaspar op weg.

Getekend door Camillo (11 jaar); de boom en de horizon waren al voorgetekend. De tekening was naar aanleiding van:

'...Vrolijk fluitend ging Kaspar weer op weg, nieuwe avonturen tegemoet.'

Camillo kent de codes voor vrolijk fluitend (♫) en voor 'weg' (lijnen naar elkaar toe). Hij gebruikt ze op zijn manier.

Het is voor ons soms moeilijk te geloven dat 'perspectief' ook een afgesproken code is en niet zonder meer natuurlijk. Dat komt omdat we het zo sterk gewend zijn. Net als schrijven van links naar rechts. Net als het aangeven van het Noorden naar boven op kaarten. Net als het aangeven van 'warmer worden' met 'stijgen' van temperatuur!

En laten we niet denken dat wij, wiskundig geschoolden, de code automatisch goed toepassen. Een typische uitzondering, ook bijna een ingeslepen code, is het tekenen van de aardbol zoals in figuur 14.

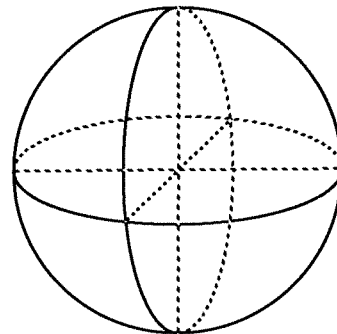


fig. 14

Volgens het perspectief hoeft de omhullende lijn geen cirkel te worden en als we zo schuin op het evenaarvlak kijken, liggen zeker niet beide polen op de omhullende lijn! (Zie de Nieuwe Wiskrant, 12de jrg. nr. 2, pagina 5, voor een 'correcte' boltekening).

Wat doen we hier mee?

Leerlingen, zoals die van de vreemde (?) kubus van figuur 10, vinden het prettig middelen aangereikt te krijgen, waarmee ze makkelijk tekeningen kunnen maken die aan de bestaande codes voldoen. Figuur 15 geeft een voorbeeldopgave uit het pakket *Kubus Make-up* van het W12-16 project. De bedoeling is de tekeningen aan te vullen tot tekeningen van een kubus.

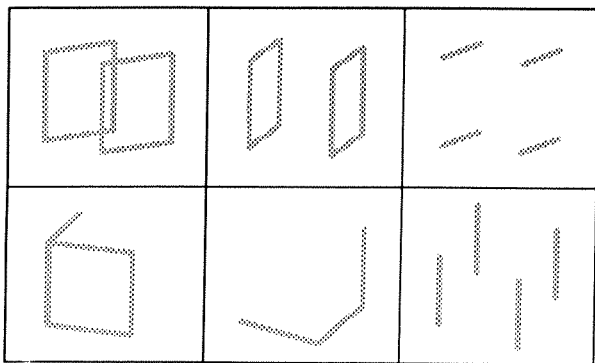


fig. 15

Er wordt (impliciet) op de ruimtelijke structuur van de kubus gewezen, met name op de vele evenwijdigheden. Het leidt tot parallelprojecties van de kubus, maar het projectieproces zelf komt niet aan bod. Het is het aanleren van een techniek, maar geleid door ruimtelijk inzicht.

Over figuur 16 ben ik minder enthousiast; het is de bekende manier van kubussen tekenen op een roosterveld.

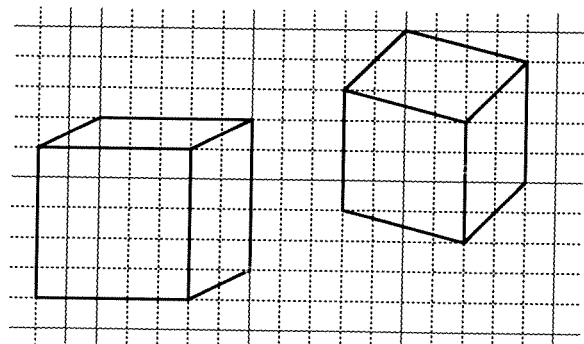


fig. 16

Het resultaat is weer een parallel geprojecteerde kubus, maar vanuit didactisch standpunt gezien lijkt het een schijnresultaat. Hier wordt het ruimtelijk tekenen afhankelijk gemaakt van een structuur in het platte vlak. Zul-

ke kubussen kun je tekenen zonder veel ruimtelijk inzicht. En het lijkt me bij wiskunde toch dáár om te gaan en niet om de uiterlijke kwaliteit van het tekenwerk.

Fundamenteler is natuurlijk iets echt te doen in de stijl van figuur 11. Dat kan met allerlei aanwezige middelen:

- een houten kubusje achter een ruit houden en met viltstift op de ruit tekenen
- met een doorzichtig velletje hetzelfde doen
- met zo'n raam als in figuur 11 zelf portrettekeningen maken.

Daarmee worden echte 'perspectief'-ervaringen gerealiseerd, zonder dat in techniekjes wordt vervallen.

Het feit dat het kijken naar ruimtelijke afbeeldingen in feite 'interpreteren' is, kan gemakkelijk aan de orde gesteld worden. Figuur 17 werd in een tweede klas gebruikt. "Wat zien we erin?" was de vraag. Met gemak vond de klas zes verschillende antwoorden!

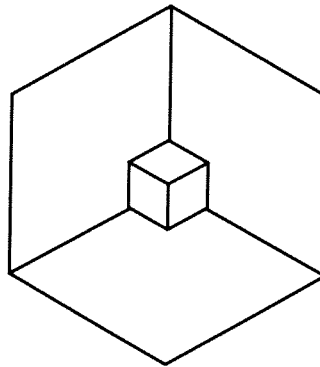


fig. 17

In een later stadium (derde klas bijvoorbeeld) kan ook ingegaan worden op de vraag welke informatie er behouden blijft of verloren gaat bij het projectieproces. Voorbeelden staan in [5].

Bij de hier gegeven voorbeelden wordt dus projecteren wél als 'goede' afbeeldingsmethode gepresenteerd, ondanks de wat relativiserende toon in het onderdeel over perspectief als cultureel bepaalde code. Er is namelijk niets verkeerd aan zo'n code, als we maar weten dat het een code is!

Samenvatting

In het voorgaande is van vele kanten gekeken naar de relatie plaatje - werkelijkheid. Er is gewezen op misverstanden die een goede didactiek van de kijkmeetkunde in de weg staan. Hier zijn nog even in het kort de belangrijkste punten:

- kijkmeetkunde is lastig, niet alleen voor leerlingen;
- oefening baart kunst, maar misverstanden moeten opgeruimd;
- onze ogen vormen een ruimtelijk beeld van de wer-

- kelijkheid door samenwerking met onze hersenen; ons gevoel zegt: we zien de boom zelf, niet een afbeelding van de boom op het netvlies;
- perspectief is een breed aanvaarde code voor het weergeven van ruimtelijke objecten op een vlak; het is niet de natuurlijke methode daarvoor, want die bestaat niet; het is een keuze;
 - leerlingen herkennen die code eerder dan ze deze kunnen toepassen; hulp bij dat toepassen moet aanvankelijk uitgaan van de ruimtelijke structuur die getekend moet worden en niet van pasklare technieken op het tekenvlak;
 - we houden ons niet altijd aan de perspectiefcode; dat mag!
-

Literatuur

- [1] Team W12-16 (1992). *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12-16, band 2*. Freudenthal instituut, Utrecht.
- [2] Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*. Leiden.
- [3] Zeki, S. (1992). 'The Visual Image in Mind and Brain', *Scientific American*, September.
- [4] Ramachondran, V. (1992). 'Blind Spots', *Scientific American*, May.
- [5] Goddijn, A.J. (1991). 'Je kunt niet met een boogje kijken', *Nieuwe Wiskrant, W12-16 Special, 11(1)*, 20-27.