Strips, spiralen, Euclidiennes

Puzzelrubriek

A.J. Goddijn
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Eigenlijk, leert Plato ons, gaat het alleen om schoonheid, liefde en wijsheid. Plato droeg de meetkunde een warm hart toe, zodoende.
Schoonheid staat centraal in de nu volgende meetkunde opgaven. Schoonheid die gevonden kan worden door het kijken naar voorwerpen of teksten en schoonheid die veroverd wordt bij het werken aan de wiskundige vragen die erbij horen.
We beginnen met stripverhalen, gaan via knopen en vazen dieper de meetkunde in en eindigen in spiralen naar boven of beneden, al naar gelang de liefde voor de meetkunde door dit alles is aangewakkerd of niet. Een schaduw van wijsheid besluit het geheel.

Haddock en Kuifje

In figuur 1 treft u drie plaatjes aan uit 'Kuifje en de Picaro's' (Hergé, 1976). De Zuidamerikaanse dictator Tapioca laat zich via de televisie tamelijk onvriendelijk uit over kapitein Haddock en de zijnen. Mijn favoriete prentje is het derde; de dictator in een soort perspectief tot de tweede macht verheven: de perspectivische afbeelding van de dictator op de televisie zelf weer perspectivisch afgebeeld. Perspectief afbeelden is centraal projecteren op een vlak. Nu ligt voor de hand:

Opgave 95
Kan het plaatje van de dictator, zoals dat in de derde illustratie te zien is, ook ontstaan door perspectief in de eerste macht?

Zie opgave 95 als een onderzoeksopdracht, waarbij u de dictator varieert tot een vlakke of ruimtelijke figuur, een vierkant of kubus.

In figuur 2 treffen we Lambiek (uit Suske en Wiske, De Blinkende Boemerang; W. Vandersteen, 1976) al volop in de problemen. Hij is het dak opgevlucht en moet dat op veilige wijze zien te verlaten. Tussen de getoonde illustraties in vouwt Lambiek tijdens de achtervolging door de politie een vliegtuig, maar dat duurt niet lang, slechts zeven plaatjes.

Opgave 96
De maan is in die tussentijd omgekeerd! Maar er is nog meer loos met de maan. Wat?

fig. 1

fig. 2

Dunne plakjes draaien

Voor een cilinder weten we het wel:
inhoud = opp. grondvlak × hoogte.
Maar een fietsband, hoe moet dat?
Figuur 3 doet een suggestie in bovenzicht; door herhaald halveren en verdraaien van stukken van zo'n torus ontstaat geleidelijk een cilinderachtig iets.

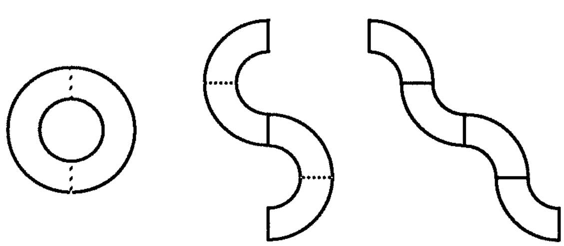


fig. 3

Dat suggereert: *inhoud = opp. ronde doorsnee × lengte hartlijn*, waarbij met doorsnede dan de kleine cirkels bedoeld zijn waarvan de stippellijntjes het bovenaanzicht vormen.
In figuur 4 zien we de knoop van S. Tajiri die in de beeldentuin van het Kröller Müller museum staat.
Een oppervlak dat ontstaat door het bewegen van een cirkel, steeds loodrecht op het vlak van de cirkel, heet een kanaaloppervlak. De cilinder is er een, de torus ook en Tajiri's knoop bestaat uit drie kanaaloppervlakken.

Opgave 97
Mogen we van de knoop van Tajiri ook de inhoud berekenen met de formule opp. ronde doorsnee × lengte hartlijn? Met andere woorden: geldt die formule voor alle kanaal-oppervlakken?

Nu we toch met inhouden bezig zijn, laten we eens naar de fraaie geometrische vaas van figuur 5 kijken. Bij zo'n bloemenvaas ligt inhoudsberekening voor de hand. Grond en bovenvlak van deze vaas zijn vierkanten van tien bij tien cm.

De vierkanten zouden grond- en bovenvlak van een rechthoekig blok van 10 cm × 10 cm × 20 cm kunnen zijn, ware het niet dat de opstaande ribben wat onverwacht lopen.

Opgave 98
Als alle horizontale doorsneden door de vaas vierkant zijn (dat is zo, maar is aan de foto niet direct te zien), wat is dan de inhoud van de vaas?

Echte rekenaars proberen ook de oppervlakte van de vaas te bepalen. Ik ben er knarsetandend mee opgehouden, maar misschien ontwijkt een lezer de adders die hier onder het gras liggen.

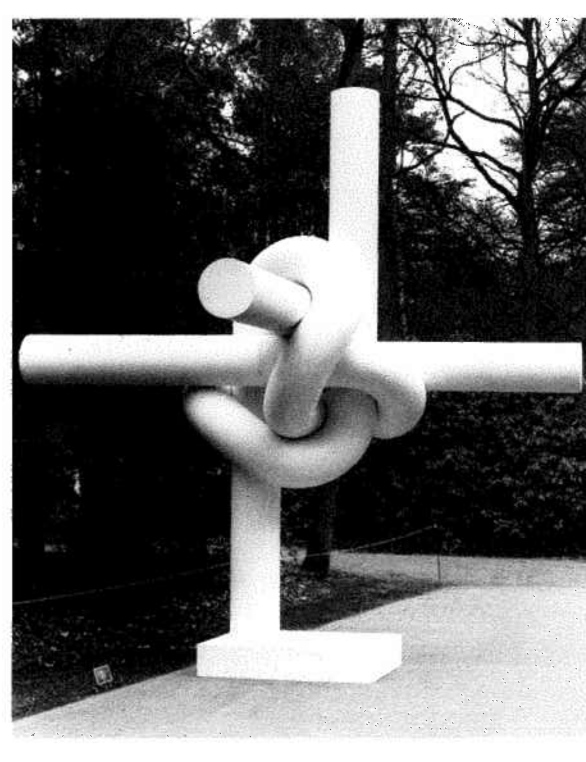


fig. 4

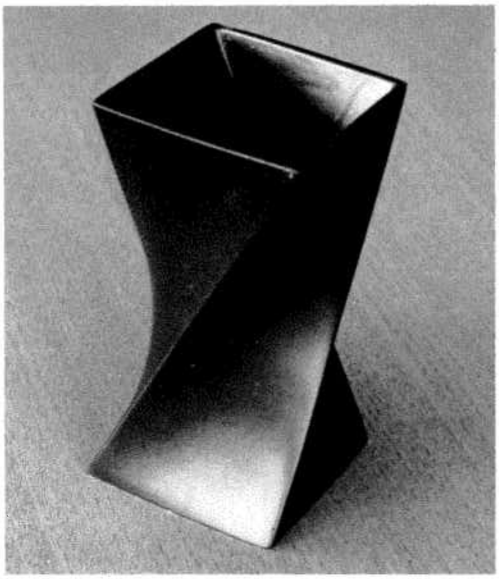


fig. 5

Maak hier een bestseller van!

In 1991 kwam uit: *The Penguin dictionary of curious and interesting Geometry.* (David Wells). Een goudmijn voor ongeveer 45 gulden. Het is een alfabetisch geordende lijst van meetkundige curiosa. (Onlangs verscheen ook een vertaling, uitgegeven door uitgeverij Bert Bakker.) Alles is prachtig en veel is onbekend. Het gaat van tamelijk eenvoudig tot behoorlijk geavanceerd. Ik kies een paar voorbeelden.
Velen zullen wel weten hoe een regelmatige vijfhoek uit een lange strook papier moet worden gevouwen:

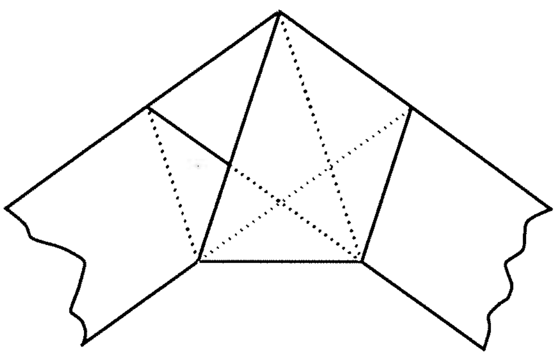


fig. 6

Opgave 99
Maar hoe maak je nu een zevenhoek!

Wells geeft een illustratie bij *polygonal knots.*

Bij de H vinden we Hénon's attractor. Daar hoort de transformatie

$$x \to y + 1 - ax^2$$
$$y \to bx$$

bij, waarin a en b vaste parameters zijn.

(Begin met $a = 1.4$, $b = 0.3$). Neem nu een beginpunt niet ver van de oorsprong. Bij herhaald transformeren springt (x, y) chaotisch op en heen en neer en weer. Als we de opeenvolgende punten (x, y) aanstippen ontstaat na enige tijd figuur 7.

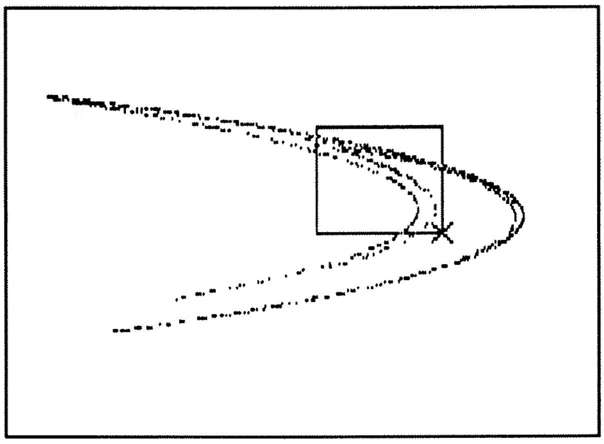


fig. 7
De figuur heet *Hénon's attractor.* Het hokje geeft aan waar we op inzoomen. Zie hier de fijnere structuur die na wat langer door itereren zichtbaar wordt.

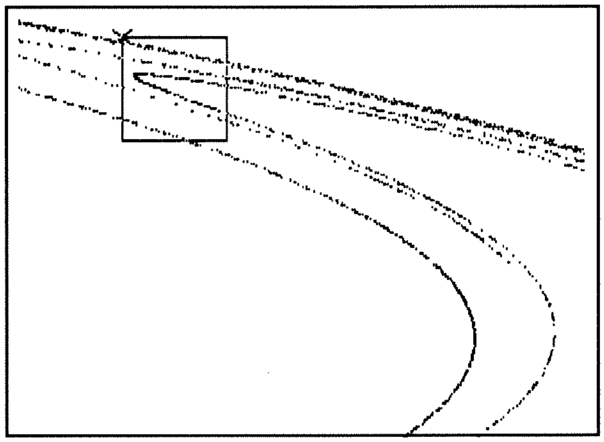


fig. 8
Nog verder ingezoomd:

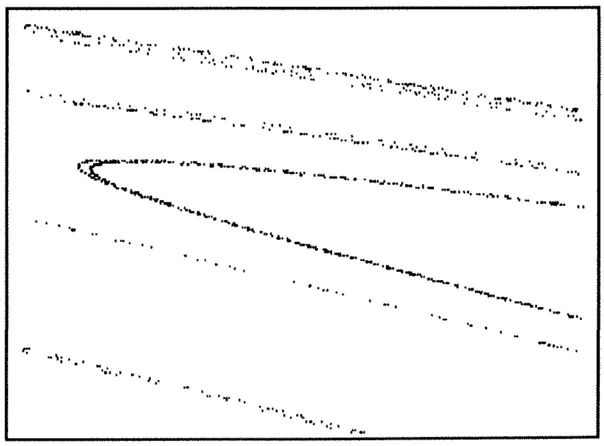


fig. 9

Opgave 100
Exploreer Hénon's attractor met bijvoorbeeld de TI 81. Varieer a en b, probeer mooie fijn gestructureerde delen te vinden.

Wells geeft veel onbekende stellingen rond cirkels en driehoeken. Bij de S staat het *six circles theorem*, dat in figuur 10 geïllustreerd is.

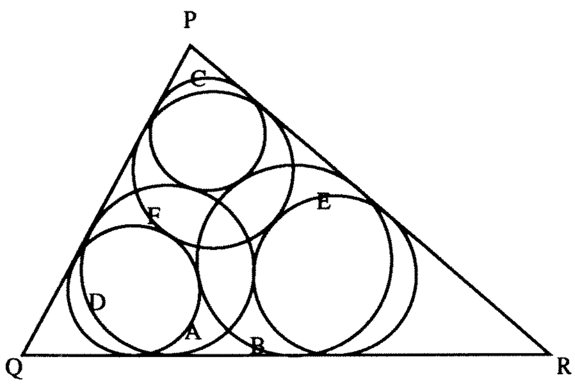


fig. 10

De driehoek PQR is gegeven. Cirkel A is rakend aan de twee zijden PQ en QR. Hier zit nog wat vrijheid in. Cirkel B raakt aan A en aan de twee zijden QR en RP, C raakt aan B en aan RP en PQ. Enzovoorts, tot F. F blijkt ook te raken aan de uitgangscirkel A! Wells geeft geen bewijs, wel een verwijzing.

Fraai, eenvoudig en toch pas van 1937 is de stelling die in figuur 11 is verbeeld: de middens van de vierkanten op de zijden van een parallelogram vormen zelf een vierkant.

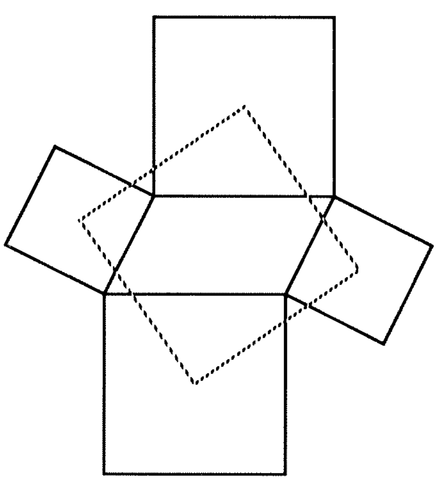


fig. 11

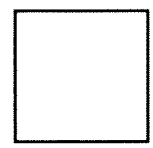
Opgave 101
Vind een bewijs voor deze stelling. En leid er een bewijs voor de cosinusregel uit af.

Dit stond bij de T van *Thébault's Theorem.*

Euclidiennes

In Frankrijk neemt de klassieke Euclidische vlakke meetkunde nog steeds een belangrijke plaats in het onderwijs in. Zou het daardoor komen dat de dichter Guillevic een bundel publiceerde onder de titel *Euclidiennes*? (Uitgave Gallimard). Aan het vierkant is dit gedicht gewijd:

carré



Chacun de tes côtés
S'admire dans les autres.

Où va sa préférence?
Vers celui qui le touche
Ou vers celui d'en face?

Mais j'oubliais les angles
Où le dehors s'irrite

Au point de t'enlever
Les doutes qui renaissent.

Opgave 102
Vertaal onderstaande Euclidienne en bedenk vooral wat de titel moet zijn.

On va, l'espace est grand,
on se côtoie,
On veut parler.

Mais ce qu'on se raconte
L'autre le sait déjà,

Car depuis l'origine
Effacée, oubliée,
C'est la même aventure.

En rêve on se rencontre,
On s'aime, on se complète.

On ne va pas plus loin
Que dans l'autre et dans soi.

Passerwerk

Anton Roodhardt – bekend door publikaties in dit blad – liet pas zien dat er zelfs bij het eenvoudigste spel met de passer nog verrassingen zijn te beleven.

Hij begon met twee lijnen, evenwijdig, en zette de passerpunt in A. Boogje BC werd getekend. Nu de passerpunt op B zetten en C omcirkelen. Zo gaan we door, er ontstaat een zigzaglijn van stukken cirkelboog.

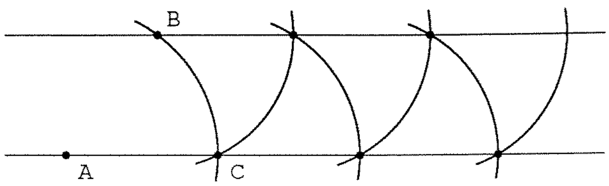


fig. 12

Opgave 103
Er ontstaat vrij snel regelmaat. Welke regelmaat? Wat gebeurt er als de lijnen niet evenwijdig zijn?

Probeer het eens en merk dat er bijna vanzelf een verband ontstaat met het itereren van een lineaire functie. Er valt hier zeker iets mee te doen in bijvoorbeeld vwo 4!

Tot slot: de helix

In figuur 13 zien we een prachtige Art Nouveau wenteltrap van Alfred Bellard. De lijn van de trapleuning vormt een schroeflijn, een helix.

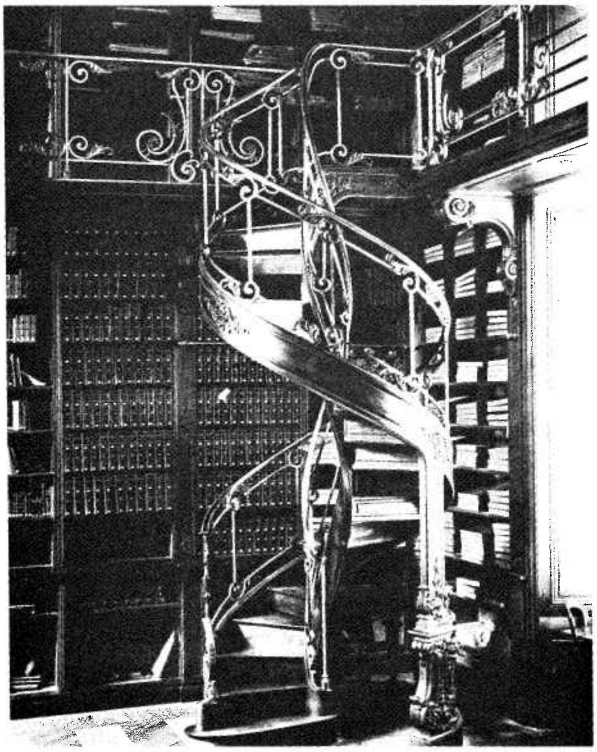


fig. 13

Bovenaanzicht van deze helix is een cirkel, dat is nogal eenvoudig. Iets lastiger, maar voor velen toch wel bekend, is dat horizontale projectie van deze helix een sinusachtige lijn geeft. In figuur 14 zien we een modernere variant in zijaanzicht.

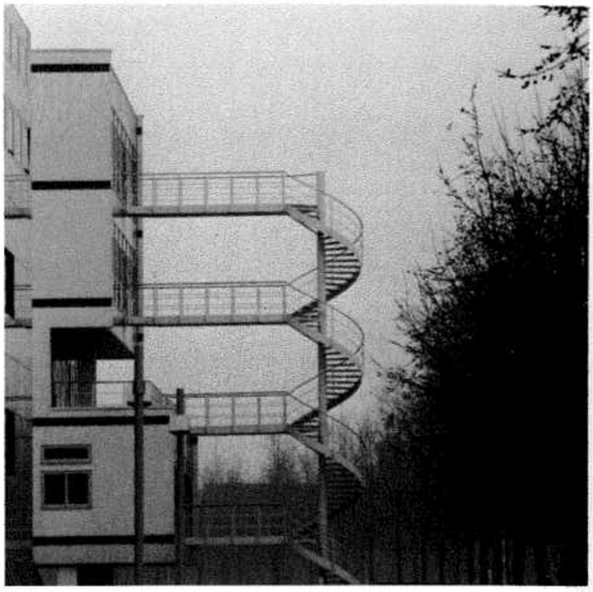


fig. 14

Daar lijkt de sinus toch niet zo vloeiend door te lopen. Dat komt natuurlijk omdat op de hoogten van de etages een van de treden van de wenteltrap veel breder is dan de gewone treden. Zo'n trede beslaat een bepaalde hoek vanuit de as van de trap gezien.

Opgave 104
Hoe kan die hoek vanuit het zijaanzicht bepaald worden?

Tot slot: we laten de zon zo'n helixlijn beschrijven. Dan gaat het om schuine parallelprojectie.

Opgave 105
Wat voor krommen kunnen bij schuin projecteren van een helix ontstaan?

Er is buiten de verticale en horizontale richting nog een bijzondere richting. Een volledig antwoord op vraag 105 begint waarschijnlijk met die bijzondere richting!

Liefhebbers van de meetkunde! Steek uw wijsheid niet onder stoelen of banken. Alle antwoorden, gedeeltelijke antwoorden en toevoegingen bij de opgaven zijn welkom en verrijken de schoonheid van deze rubriek.

Vorige en volgende aflevering

Er kwamen uitvoerige reacties binnen op de vorige aflevering, die over de Wet van Benford ging. In het volgende nummer van dit tijdschrift gaan we er op in. Nu is er geen ruimte en .... het was geen meetkunde!