# Het weelderige landschap van de meetkunde op het examen

**M. Kindt**
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Bladerend door de opgaven zoals die uit de diverse eindexamens van dit jaar zijn geknipt (zie hierna), waan ik mij een treinreiziger die door een gevarieerd landschap zoeft. Weelderig geboomte wordt afgewisseld door akker en weiland en dan doemt plotseling de betonnen bebouwing van een industrieterrein op. Af en toe stap ik uit om eens beter te gaan kijken, maar veel tijd is er niet en van de redactie krijg ik niet meer dan zo'n anderhalve pagina voor mijn reisverhaal.

Het reuzenrad reken ik tot de weelderige natuur. *De vragen 18 t/m 24 horen bij elkaar*, is het vetgedrukte opschrift. Een tamelijk overbodige mededeling want de context is bindend genoeg. Meer relevant zou zijn: *de vragen 18 t/m 24 verschillen flink in moeilijkheid.* Zo'n vraag 18, hoe lief ook bedoeld, is toch eigenlijk wat al te elementair en dat kan leerlingen wantrouwend maken (toch een strikvraag?). Bij 19 ga ik meteen enthousiast zo'n middelpuntshoek meten, maar later zie ik dat dit pas bij vraag 24 mag. Vraag 21 is ronduit prachtig en het zou heel mooi zijn als hier redelijk op gescoord is. Alles bij elkaar geeft het reuzenrad in een notendop bijna de hele meetkunde: verhoudingen en schaal, hoekmeting, aanzichten, meetkundige plaats, met als aktiviteiten: schatten, meten, redeneren, tekenen. Ik verwacht dat leerlingen, ook als ze draaiierig worden van het reuzentoestel, hier gretig zullen zijn ingestapt.

Ook de windroos op de brug mag er zijn. Mijn eerste gedachte is, leuke figuur, wat zouden ze daar over vragen? Niks dus. Het is kijkmeetkunde en de makers hebben zich beheerst. Waar ben je als leerling als je niet weet dat de zon dagelijks van oost naar west reist en niet andersom? Is dat een stelling die ze moeten kennen? Van militaire dienst herinner ik me dat op het commando linksom door een aantal dienstplichtigen averechts werd gereageerd, en dat deden ze niet expres, want de daarop volgende hoon van de sergeant was dodelijk. Ik moet bekennen dat ik zelf bij sommige binaire keuzemomenten ook twijfel. Maar voor zover ik weet is de associatie zuiden-zon voor iedere bewoner van het noordelijk halfrond erg sterk, het helpt mij in elk geval bij de reconstructie. Als ik mijn ogen sluit zie ik de draairichting voor me en met behulp van een windroos stel ik de zonnekoers vast. Zeg maar eens dat dit geen meetkunde is.

Wat rustiger van landschap is de opgave van de geit. De tekenopdracht is verrassend leuk. Al doende, verplaats je je in het beestje om direct daarna de vertaling naar cirkels te maken, met als beloning een leuk plaatje. De vraag naar de oppervlakte is minder interessant en stapelt bovendien. Ik mag hopen dat in de antwoorden geen $\pi$ voorkomt, hoewel dit tot een aardige variant op Leo Vromans versregels zou kunnen leiden:
*ik heb ruim $21\pi$ van het weiland afgegraasd*
*en nog is het niet kaal, droef ben ik en verbaasd.*

Een betonnen som tref ik aan in mavo-D experiment: de piramide. De tot in den treure bekende Pythagorastripels 6, 8, 10 en 5, 12, 13 , alsof er geen andere zijn. En dan die lelijke scheve-projectiefiguur. Ik leer mijn studenten hoe naar zo'n plaatje te kijken: hou het papier links of rechts, afhankelijk van de geschatte projectierichting en kijk er naar met een schuin oogje, en waarempel er komt een beetje diepte in. Op een examen zou zo'n handelwijze meteen de aandacht van de surveillanten trekken: je hoort je papier netjes recht voor je te hebben. Alleen al daarom zou op het eindexamen de loodrechte projectie verplicht moeten zijn. Maar met Vromans geit ben ik droef en verbaasd. Waarom zit zoiets kaals in het experimentexamen? Ik heb me laten vertellen dat het een soort gevangenenruil is met de zwembadsom die in het 'gewone' mavo-D-werk is terechtgekomen.

Nu het havo-werk. In de Volkskrant van vrijdag lees ik wat een meisjesleerling uit Winschoten ervan zegt: leuke opgaven, daar kun je wat aan puzzelen. Zij bedoelde de cable-table en het waterreservoir. Ik ben het daar van harte mee eens. Het bijzettafeltje geeft aanleiding tot tekenen, redeneren en rekenen, de drie componenten van goed meetkunde-onderwijs. En hoewel ik nooit zo dol ben op rekenopdrachten binnen de meetkunde, beveel ik hier toch het derde onderdeel bij de lezer aan. De bogen van het waterreservoir geven een aardige gelegenheid tot het combineren van ruimtemeetkunde en analyse, iets waaraan men op het vwo bij wiskunde B om onnaspeurlijke redenen nooit is toegekomen. Vraag 11 had wat natuurlijker gekund, zo van: toon aan dat de boog een stukje van een cirkel is, maar de examenmakers hebben hier kennelijk de helpende hand willen toesteken.

Voor de vwo-opgave raadpleeg ik nogmaals de Volkskrant. De leraar zegt ervan: het lijkt wel of de oude meetkunde ineens komt bovendrijven. De oude stereometrie uit de jaren vijftig, inderdaad. Dat gevoel heb ik al jaren en het is een persoonlijke frustratie. Ik ben destijds nogal in de weer geweest om, in overeenstemming met de Hewetdoelstellingen, een eigentijds soort ruimtemeetkunde te ontwikkelen en tot mijn genoegen hebben een aantal schoolboekauteurs die draad toen opgepakt. Zo niet de examencommissie. Bij een opgave als deze, die in zijn soort ook een paar aardige elementen heeft, bekruipt mij een gemene gedachte. Het gaat over het dak van een laag schuurtje, de loodlijn is een lantaarnpaal en de vraag is: waar bevindt zich de lamp in het geval dat de driehoekige vlakken net niet (of net wel) belicht worden. Wiskunde B moet er abstract uitzien, dus dat verhaaltje laten we weg.

## Eén groot plan?

Terugblikkend op dit (onvolledige) reisje, vraag ik me af: behoort dit alles tot één groot plan?
Wat me opvalt is dat de nieuwe meetkunde van 12-16 en die van de havo wiskunde B, duidelijk tot dezelfde wereld behoren. In het havowerk bijvoorbeeld zit er, met de fotograaf op de snelweg, een heuse kijkmeetkundevraag. En er is weinig fantasie voor nodig om het reuzenrad van het vbo-examen te laten dienen voor interessante opdrachten bij een toekomstig havo-examen. Wel constateer ik een niet te onderschatten sprong in moeilijkheidsgraad tussen mavo- en havo-opgaven. Gelukkig zijn er twee jaar onderwijs beschikbaar om dat hogere plateau te bereiken en per slot mag je aannemen dat het ook in de toekomst een tamelijk selecte groep zal zijn, die doordringt tot havo wiskunde B.

Tussen havo B en vwo B is er nog een wereld van verschil. Dat is minder een kwestie van niveau dan van sfeer. Ook dat verschil is natuurlijk wel overbrugbaar, maar willen we dat? Onlangs tekende ik op uit de mond van een havo-B-leerling die de overstap naar wiskunde B had gemaakt: *op de havo maakte je vraagstukken, hier maak je sommen.* Zo'n uitspraak zou door een buitenstaander vermoedelijk als zeer merkwaardig worden ervaren en ik vind niet dat ze door de examens '93 wordt weerlegd. En laten we wel wezen, het zou toch fantastisch zijn als in het vwo B programma van straks een meetkundige kroon op al dat mooie voorwerk wordt gezet. Het spreekt vanzelf dat dit ook voor de andere onderdelen van het programma geldt. Pas dan zal het grote plan eventjes af zijn.

## Selectie examenopgaven 1993

De opgaven op de volgende pagina's zijn afkomstig uit de examens:

| | |
|---|---|
| Dobbelsteen | Experimenteel examen vbo-B |
| Reuzerad | Experimenteel examen vbo-B |
| De windroos | Experimenteel examen vbo-mavo-D |
| Grasveld | Experimenteel examen vbo-mavo-D |
| Piramide | Experimenteel examen vbo-mavo-D |
| Zwembad | Experimenteel examen vbo-mavo-C en 'gewoon' examen vbo-mavo-D |
| Opgave 2 | Wiskunde B examen havo en vhbo |
| Opgave 3 | Wiskunde B examen havo en vhbo |
| Opgave 4 | Wiskunde B examen vwo |

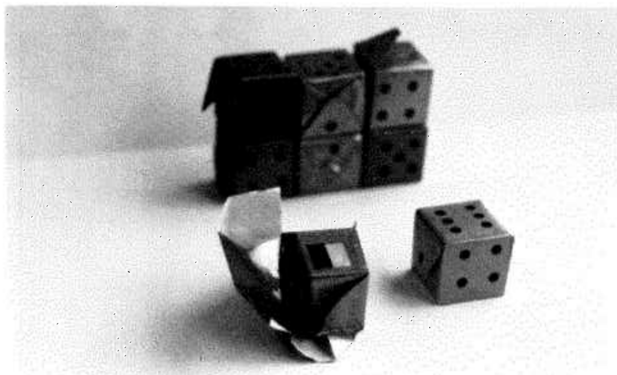
## Examenbundel

De experimentele examens vbo/mavo 1993 worden uitgebracht door het APS in:
*Examenbundel vbo/mavo CD 1993.*
De experimentele B-examens 1993 wordt uitgebracht door het APS in:
*Oefenbundel experimentele B-examens 1993.*

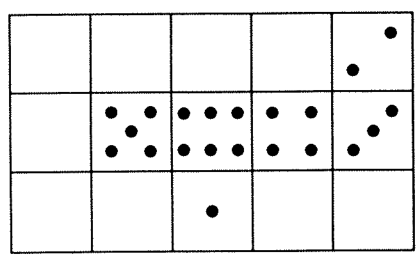
Algemeen Pedagogisch Studie centrum
Contactpersonen Marja Meeder en Hans Pouw
Postbus 85475
3508 AL Utrecht
tel. 030-856721/856722

## De vragen 1 t/m 4 horen bij elkaar.

*Dobbelsteen*
Een fabrikant maakt chocolade-dobbelstenen in de vorm van een kubus. Om elke kubus komt een wikkel met stippen erop.



Hieronder zie je een tekening van een wikkel van zo'n chocolade-dobbelsteen.
Een echte dobbelsteen heeft een regel: het aantal stippen op twee vlakken tegenover elkaar is steeds samen zeven.



1. Leg uit dat het aantal stippen op twee vlakken tegenover elkaar bij de chocolade-dobbelsteen nooit zeven kan zijn.
2. Teken in de uitslag van de dobbelsteen op bijlage 1 stippen zodat je van deze wikkel een echte dobbelsteen kunt maken.

De chocolade-dobbelstenen hebben de vorm van kubusjes met een ribbe van 2 cm. Ze worden verkocht in een plastic doos die ook de vorm van een kubus heeft.

3. Passen er in zo'n doos precies honderd chocolade-kubusjes?
4. De fabrikant wil een doos laten ontwerpen, waarin precies 60 chocoladekubusjes met ribbe 2 cm passen. Die doos kan niet de vorm van een kubus hebben maar wel van een balk. De hoogte moet 10 cm worden. Geef een voorbeeld van de maten die zo'n doos volgens jou kan hebben.
   Tip: Maak een tekening!

## De vragen 18 t/m 24 horen bij elkaar.

*Reuzenrad*
Je ziet op de foto een reuzenrad. Er kunnen vier mensen in een schuitje.
Er zijn 36 schuitjes.

foto 1

foto 2

18. Hoeveel mensen kunnen er in het reuzenrad?

19. Op de foto kun je het aantal schuitjes niet precies tellen.
    Hoe kun je controleren dat het er 36 moeten zijn?

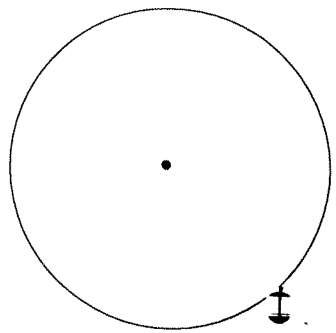
Jeroen probeert te schatten hoe hoog het reuzenrad is.
Jeroen zegt:

'Kijk maar op foto 2. Vooraan zie je een mevrouw.
Ik schat dat ze 1 meter en 70 centimeter lang is.
Ze past ongeveer vier keer op het reuzenrad.
Dat is dan vier keer 1,70 meter = 6,80 meter.
Mijn schatting van het reuzenrad is: zeven meter hoog.

Jeroen maakt een fout.

20. Maak zelf een schatting van de hoogte van het reuzenrad. Gebruik foto 2.

Als je uit de verte naar het reuzenrad kijkt zie je een grote cirkel.
Er is één schuitje bij getekend.

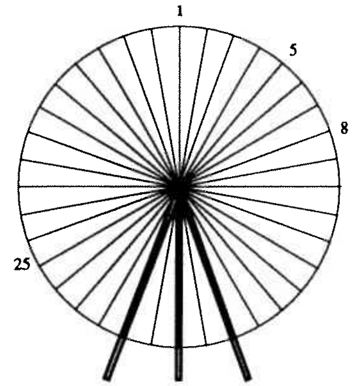


Als je in het schuitje gaat zitten draai je rond in een grote cirkel.

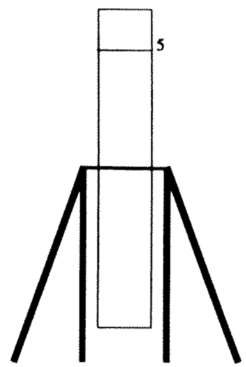
(21) Teken die cirkel op bijlage 5 in de tekening.

Op foto 3 zie je hoe ingewikkeld zo'n reuzenrad in elkaar zit.

Op de tekening hieronder staat een vooraanzicht met alleen de belangrijkste stangen. De schuitjes zijn weggelaten, de stangen zijn genummerd. Het zijaanzicht staat er naast.



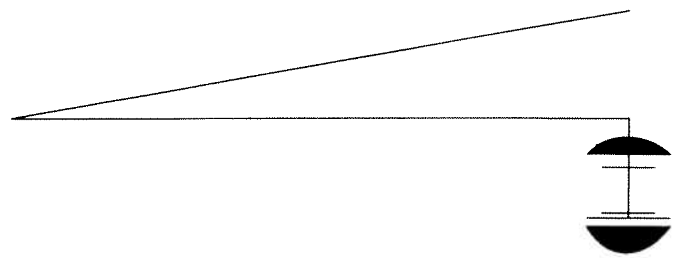

vooraanzicht




zijaanzicht

(22) Op bijlage 5 zijn vooraanzicht en zijaanzicht nogmaals getekend.
Teken in het zijaanzicht op de bijlage de dwarsstangen met nummer 8 en 25 waar de schuitjes aan hangen.

Een stukje van het vooraanzicht is hieronder getekend.
Er is ook een schuitje bij getekend.

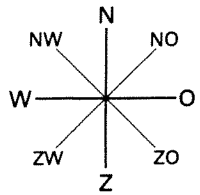


23. Leg uit waarom het schuitje niet goed op schaal getekend kan zijn.

24. Hoe groot zijn de hoeken tussen de stangen in het vooraanzicht?

# De windroos

figuur




Hierboven is een windroos getekend met acht richtingen.
In Monnickendam is een brug met een windroos op het wegdek. Aan het eind van één punt zit een donkere stip: die geeft de richting van het noorden aan. Zie de volgende foto's.

foto 1

2p **10** □ In welke richting rijdt de fietser op foto 1? (Schrijf een richting van de windroos op.)

Op foto 2 staat een meisje met haar schaduw. Om deze foto te maken stond de fotograaf tegen de brugleuning.

foto 2

Op de bijlage bij vraag 11 zie je een plattegrond van de brug.

3p **11** □ Geef op die plattegrond aan waar de fotograaf gestaan kan hebben.

2p **12** □ Op welk deel van de dag is foto 2 genomen: 's morgens, 's middags of 's avonds? Verklaar je antwoord.

Beide foto's zijn op dezelfde dag genomen.

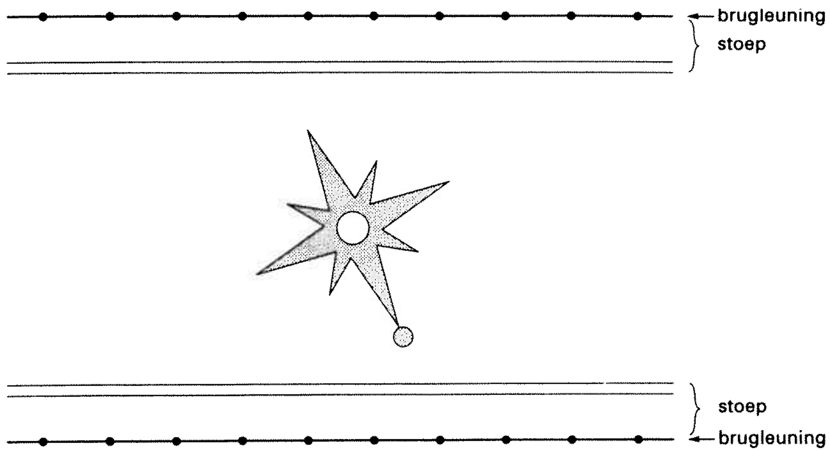
2p **13** □ Zijn de beide foto's kort na elkaar genomen? Verklaar je antwoord.

Op de bijlage bij vraag 14 zie je vier tekeningen.
De kruisjes stellen mensen voor en de streepjes hun schaduw (bovenaanzicht).
De vier tekeningen horen bij dezelfde dag, maar bij verschillende tijden.

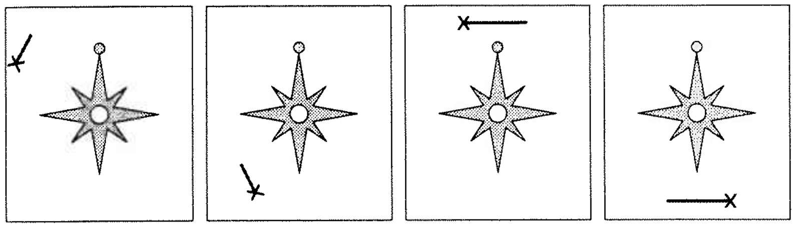
4p **14** □ Schrijf onder de tekeningen op de bijlage de nummers 1, 2, 3 en 4 om de goede volgorde in tijd weer te geven.

*Bijlage:*

**Vraag 11**



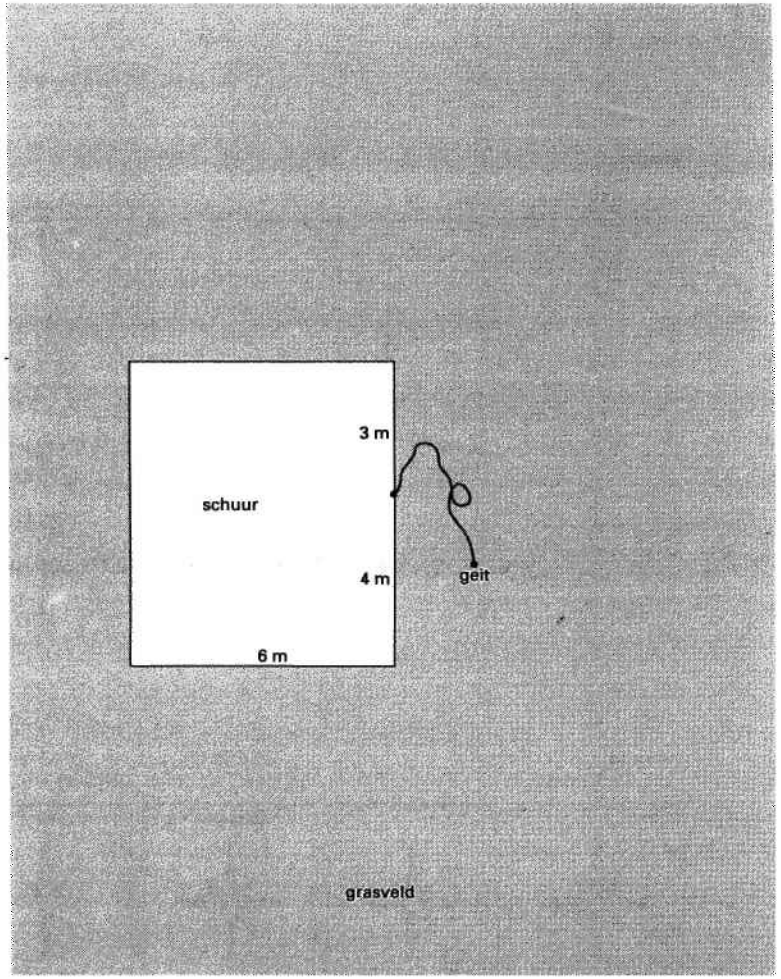

**Vraag 14**



## Grasveld

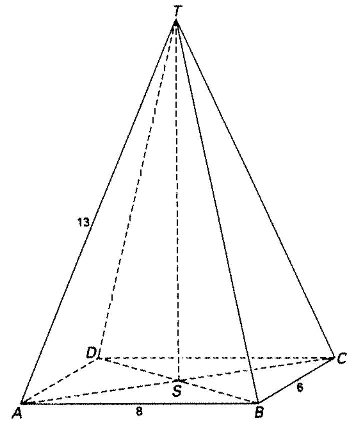
Op het grasveld van Janssen staat een schuur. Hij laat zijn geit daar grazen. De geit zit vast aan een touw. Dit touw zit met een haak onderaan de schuur vast.
Op de bijlage bij vraag 15 is het bovenaanzicht op schaal getekend.
De schuur is 6 bij 7 meter. De geit zit vast aan een touw van 6 meter lang.

6p **15** ☐ Teken in de figuur op de bijlage het gebied waar de geit kan grazen.
5p **16** ☐ Bereken hoeveel $m^2$ de oppervlakte van dit gebied is.




## Piramide

figuur




Van de hierboven getekende piramide $T.ABCD$ is het grondvlak een rechthoek van 8 bij 6 cm. $S$ is het snijpunt van $AC$ en $BD$.
$TA = TB = TC = TD = 13$ cm.

3p **25** ☐ Bereken de hoogte $TS$.

5p **26** ☐ Bereken hoe groot $\angle ATC$ is (afronden in graden).

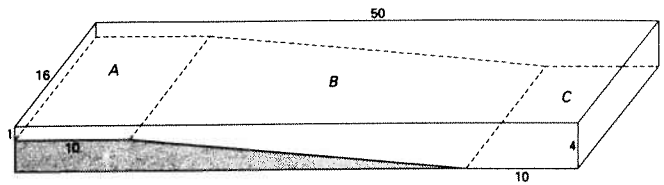
Op lijnstuk $TS$ ligt een punt $P$.
De inhoud van de piramide $P.ABCD$ is 128 $cm^3$.

5p **27** ☐ Bereken de lengte van $AP$ (afronden in mm).

## Zwembad

Een zwembad van 16 bij 50 meter heeft een ondiep deel $A$ (diepte 1 meter) en een diep deel $C$ (diepte 4 meter).
Daartussen neemt de diepte regelmatig toe van 1 meter tot 4 meter. Zie de figuur. Alle maten zijn aangegeven in meters.

figuur




Het bad is tot de rand gevuld. Het bad moet leeg.

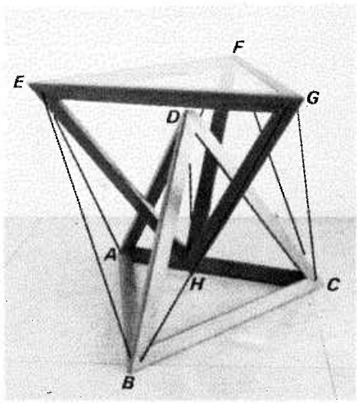
3p **26** ☐ Bereken hoeveel $m^3$ water weggelopen is als het water tot 1 meter onder de rand gezakt is.

6p **27** ☐ Bereken hoeveel $m^3$ water er in totaal uitgelopen is als het bad helemaal leeg is.

## Opgave 2

In 1991 kreeg in het kader van de Nederlandse meubelprijzen het bijzettafeltje Cable-Table van Willem Scholtens een eervolle vermelding.
Het bijzettafeltje bestaat uit twee even grote regelmatige piramiden waarvan alle ribben even lang zijn. De piramiden *ABCD* en *EFGH* worden door zeven stalen kabels van 1 mm dikte bij elkaar gehouden. De piramide *EFGH* hangt met de top *H* naar beneden aan een kabel die verbonden is met de top *D* van de piramide *ABCD*.
Deze verticale kabel *DH* is op de foto van figuur 3 net te zien.
De bovenkant van het tafeltje is van glas.
Op de bijlage is op schaal een deel van het bovenaanzicht getekend.

figuur 3




6p 4 □ Voltooi dit bovenaanzicht van de Cable-Table met de ontbrekende ribben en de kabels.

6p 5 □ Geef aan hoe de ligging is - evenwijdig, snijdend, kruisend - van de kabel *AE* ten opzichte van elk van de andere zes kabels.

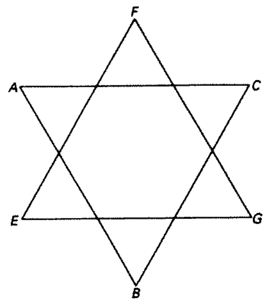
Een Cable-Table met ribben van 54 cm moet voor vervoer verpakt worden in een doos in de vorm van een regelmatig prisma waar de Cable-Table rechtop gezet precies in past met de glasplaat naar boven. De bodem van de doos is zeshoekig.

5p 6 □ Bereken de oppervlakte van de bodem van die doos in gehele $cm^2$ nauwkeurig.

De hoogte van een Cable-Table met ribben van 54 cm is 50 cm.

9p 7 □ Bereken de lengte van de kabel *DH* in gehele mm nauwkeurig.

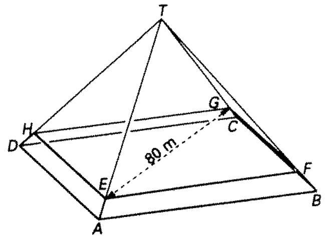
*Bijlage:*




## Opgave 3

Een betonnen drinkwaterreservoir is gedeeltelijk ingegraven en boven de grond afgedekt met aarde. Daardoor is een verhoging van het landschap te zien in de vorm van een afgeknotte piramide met een vierkant grondvlak.
Figuur 4 is een schematische tekening (niet op schaal) van de gehele piramide met daarin het vlak *EFGH*, dat het bovenvlak van het waterreservoir voorstelt. Dit bovenvlak bevindt zich op een hoogte van 3 meter boven het grondvlak *ABCD*.
De lengte van de diagonalen *EG* en *HF* is 80 meter.
De zijvlakken van de piramide maken een hoek van 37° met het grondvlak.

figuur 4

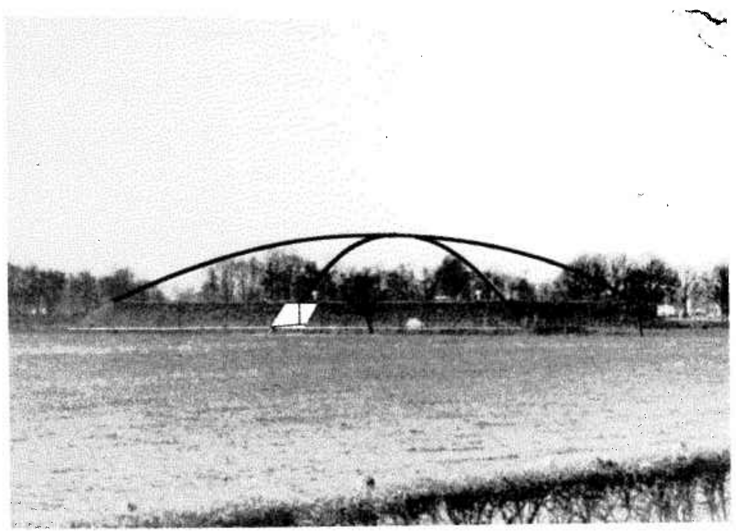



5p 8 □ Bereken de oppervlakte van het grondvlak *ABCD* van de piramide in gehele $m^2$ nauwkeurig.

6p 9 □ Toon door een berekening aan dat de hellingshoek van de opstaande ribben van de piramide bij benadering gelijk is aan 28°.

Op het drinkwaterreservoir is een kunstwerk geplaatst, gevormd door twee stalen bogen die elkaar midden boven het reservoir snijden.
De bogen zijn zo geplaatst dat zij zonder knik overgaan in de opstaande ribben van de piramide;
de hellingshoek van de bogen is daar dus eveneens 28°.

figuur 5



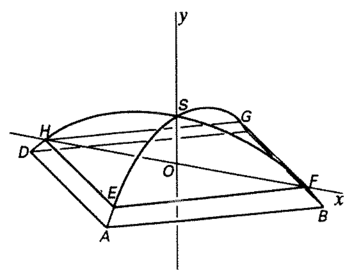
Op de foto van figuur 5 is de ingang van het reservoir in het midden van een zijvlak duidelijk zichtbaar. Door de wijze waarop de foto genomen is lijkt één van de bogen precies te eindigen boven de linkerkant van de ingang.
Op de bijlage is een plattegrond van het reservoir en de omgeving gegeven.
De fotograaf stond in de berm van de snelweg toen hij de foto van figuur 5 nam.

3p 10 □ Geef in de plattegrond aan waar de fotograaf stond en licht je antwoord toe.

Om een model van de bogen te kunnen maken, brengen we een assenstelsel $Oxy$ aan met de $x$-as op de diagonaal $HF$ van het bovenvlak en de $y$-as door het midden van $HF$ en het snijpunt $S$ van de bogen (zie figuur 6).
De vorm van de boog $HSF$ wordt gegeven door de vergelijking:

$$y = \sqrt{7225 - x^2} - 75$$

figuur 6



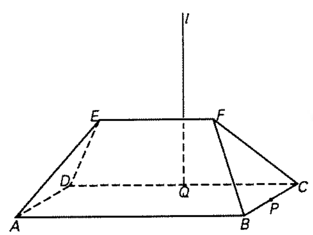

5p 11 □ Toon aan dat alle punten van deze boog op een afstand van 85 m liggen van het punt $(0, -75)$.

6p 12 □ Toon met behulp van de gegeven vergelijking aan dat de hellingshoek aan de voet van de bogen inderdaad 28° is, afgerond op gehele graden.

## Opgave 4

In figuur 3 en op de bijlage geldt voor het lichaam $ABCD.EF$:
- $ABCD$ is een rechthoek met $AB = 8$ en $AD = 4$.
- $EF \,//\, AB$.
- $AE = DE = BF = CF = EF = 4$.
- $P$ is het midden van $BC$.
- $Q$ is het midden van $DC$.
- $l$ is de lijn door $Q$ loodrecht op $ABCD$.

figuur 3




7p 11 □ Bereken de inhoud van het lichaam.

6p 12 □ Bereken de afstand van de lijnen $BF$ en $DE$.

Van een kegel $K$ met $l$ als as is $BCF$ een raakvlak.

7p 13 □ Bereken de halve tophoek van $K$ in graden nauwkeurig.

Door $P$ gaan twee raakvlakken aan $K$, waarvan $BCF$ er één is.

7p 14 □ Teken in een figuur van de bijlage de doorsnede van het andere raakvlak aan $K$ met het gegeven lichaam.
Licht je werkwijze toe.

*Bijlage:*

**Opgave 3**