

Meetkunde met je ogen dicht

M. Pranger

Christelijk Lyceum, Zeist

Inleiding

Een beroemd verhaal dat bijna twee eeuwen geleden gebeurde, gaat over 'meetkunde met je ogen dicht'. Het schoot mij een aantal jaren geleden te binnen, toen ik een blinde leerling begeleidde bij het meetkundeonderwijs in 4 havo (vóór het tijdperk dat de wiskunde in de bovenbouw van het havo verdeeld was in de richtingen A en B). In het onderwijs blijken soms onverwachte hulpmiddelen effectief te zijn voor het begrip van bepaalde leerstof.

Meetkunde met je ogen dicht kan zo'n hulpmiddel zijn bij het oplossen van bepaalde meetkundige problemen.

Anita

De eerste schooldag van het cursusjaar 1987/88 zal ik niet licht vergeten. Klas 4 havo komt binnen, 31 leerlingen waaronder Anita. Anita is blind vanaf haar geboorte. Ik had nog nooit een blinde leerling gehad en dan in zo'n volle bak, ik kreeg het er wel even benauwd van.

Op het blindeninstituut Bartiméus, dat in Zeist staat, worden blinden en slechtziende leerlingen van jongs af getraind en onderwezen, zodat ze met hun handicap de weg leren vinden in onze (ziende) wereld. Daarbij wordt van allerlei hulpmiddelen gebruik gemaakt. Ik liet me op het blindeninstituut Bartiméus voorlichten over de technieken die bij het blindenonderwijs gebruikt worden. Het grootste probleem bij het wiskunde onderwijs aan blinde leerlingen doet zich natuurlijk voor bij de tekeningen. Voor gewone tekst voldoet het Brailleschrift, maar voor tekeningen ben je feitelijk afhankelijk van professionele krachten die deze in reliëf maken. Zelf kun je met enige moeite een tekening produceren met behulp van boeklon. Het plastic dat overblijft, wanneer je daar een boek mee gekaft hebt, heeft een zodanige structuur dat je er met een hard voorwerp tekeningen in reliëf op kunt maken.

Anita bleek een goede leerling, die snel van begrip was. De eerste weken, waarin analyse behandeld werd, gaven geen problemen.

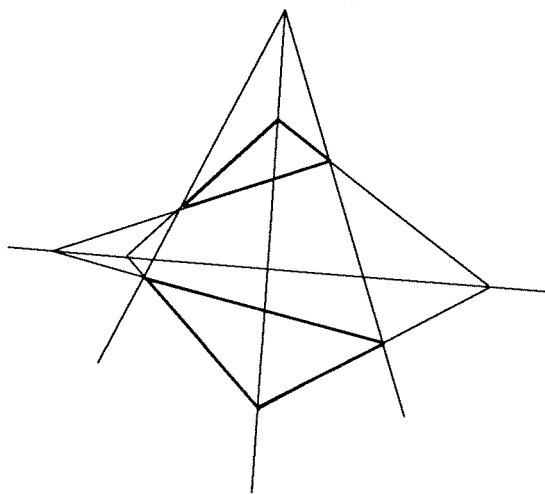
Na enige weken was het eerste meetkundehoofdstuk aan

de beurt. In het begin steek ik altijd wat extra tijd in het maken van tekeningen. Wanneer leerlingen een fatsoenlijke kubus kunnen tekenen, hebben ze daar bij het oplossen van de problemen veel voordeel van.

Wat is een fatsoenlijke kubus? Dat is een in het platte vlak getekende kubus, waarin de ruimtelijke figuur goed te herkennen is. Voor Anita toog ik aan het werk op mijn boeklonplasticjes. Ik zei het al, Anita is snel van begrip en kon ook mijn plasticjes met haar vingers lezen. Ze is echter niet alleen snel van begrip, maar ook kritisch. Op een gegeven moment zei ze: "Wat heb ik hier eigenlijk aan, ik kan die kubussen toch nooit tekenen." En ineens keek ik er heel anders tegen aan. Waarom besteed ik bij ziende leerlingen zoveel tijd aan het tekenen van een goede kubus? Een ruimtelijke figuur op papier krijgen is een hele klus, is dat eenmaal goed gelukt dan kun je over die figuur en zijn eigenschappen op een adequate manier communiceren. Voor Anita gold dat allemaal niet. Het verhaal van Jakob Steiner, die meetkunde doceerde in het donker, schoot mij door het hoofd.

Jakob Steiner en de stelling van Desargues

Voor een goed begrip van het verhaal is het nodig dat we eerst even naar een meetkundige stelling kijken.



De stelling van Desargues(1591-1657) heeft in de moderne projectieve meetkunde een belangrijke plaats. De stelling dateert van 1648, waar hij voor het eerst opduikt als aanhangsel in een boek van Abraham Bosse over perspectief. De stelling luidt als volgt:

Wanneer van twee driehoeken (in de ruimte of in een vlak gelegen) de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan, dan liggen de snijpunten van de overeenkomstige zijden op een rechte lijn.

De omgekeerde stelling geldt trouwens ook.

Het bewijs van deze stelling is voor het ruimtelijke geval simpel (zie de figuur op de vorige pagina). Immers de twee driehoeken liggen elk in een vlak. Deze twee vlakken snijden elkaar volgens een rechte lijn. Twee overeenkomstige zijden liggen altijd in één vlak vanwege het feit dat de driehoeken puntperspectief zijn. De zijden snijden elkaar dus altijd op de snijlijn van de vlakken waar de driehoeken in liggen.

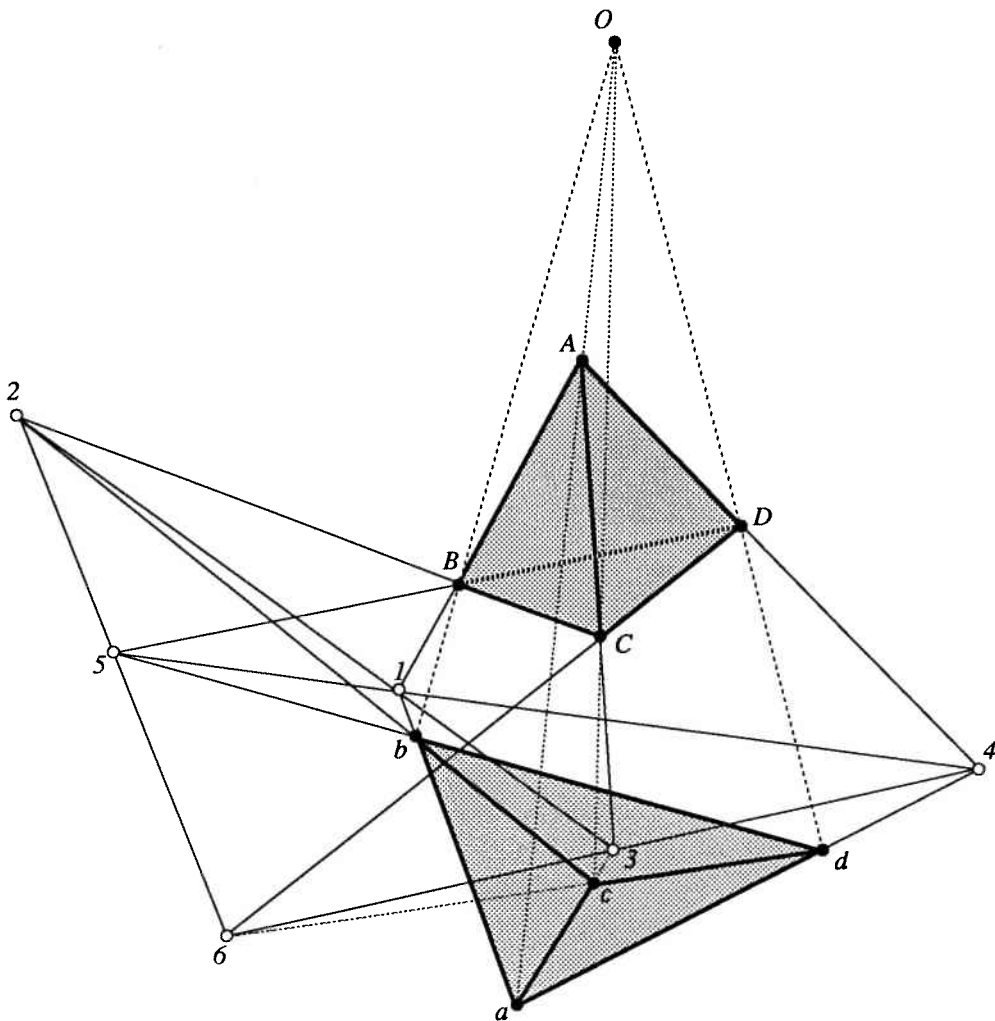
Voor twee driehoeken, die in één vlak liggen, is het bewijs een stuk ingewikkelder. Voor ons verhaal doet dat

bewijs niet terzake, dus zal ik u er niet mee vermoeien. Ik realiseer me dat het bovenstaande bewijs, dat ik simpel noem, dat niet voor iedereen is. De tekening die zowel voor de ruimtelijke als de vlakke variant kan dienen, geeft niet aan iedereen voldoende houvast om de redenering vlot te kunnen volgen. Wat helpt is: doe je ogen dicht en stel je twee driehoeken voor in de ruimte.

Wanneer de meetkunde iets ingewikkelder wordt, wordt dit 'doe je ogen dicht' steeds meer van belang. Wat te denken van de volgende stelling van Jakob Steiner (1796-1863), die in feite een uitbreiding van de stelling van Desargues is:

Gegeven twee viervlakken, $ABCD$ en $abcd$, waarvoor geldt dat Aa , Bb , Cc en Dd elkaar snijden in één punt S . Dan liggen de zes punten waarin de overeenkomstige zijden (AB en ab , AC en ac , BC en bc , BD en bd , CD en cd) elkaar snijden, in één vlak.

Het bewijs zal ik u besparen, hoewel het vrij eenvoudig is, maar het plaatje erbij is mooi.



1, 2, 3, 4, 5 en 6 liggen in één vlak

Steiner was een groot aanhanger van de synthetische meetkunde. In de twee eeuwen voorafgaande aan de zijne, had vooral de analytische meetkunde in de belangstelling gestaan. Hij daarentegen vond dat meetkunde ook op meetkundige wijze bedreven moest worden. Om zijn studenten de ingewikkelde stellingen die hij bedacht duidelijk te maken, gebruikte hij het 'doe je ogen dicht'. Maar zijn studenten konden het niet opbrengen om geheel zonder tekeningen te werken. Steiner besloot toen de gordijnen te sluiten, de lichten te doven en geheel in het donker les te geven. Je ziet het voor je. Zo moesten de studenten wel meedoen met de gedachtenexperimenten van hun leermeester.

Meetkunde met je ogen dicht

Zoals gezegd, toen ik Anita probeerde een ruimtelijke kubus, weergegeven op een plat vlak, te laten 'zien', schoot het Steinerverhaal door mijn hoofd.

De boeklonplasticjes gingen in de prullenbak en voortaan deed zij 'meetkunde met de ogen dicht'. En omdat ze een goede leerling is, deden wij soms het spelletje 'verbluf de klas'. Als ik iets in de klas vroeg en er kwam geen respons van de leerlingen, want ze vonden het moeilijk, vroeg ik het aan Anita. Prompt kwam tot verbijstering van de anderen dan het goede antwoord. Blind en het dan toch weten! Misschien hadden zij het ook met hun ogen dicht moeten proberen. Maar dan had ik, net als Steiner, de gordijnen moeten sluiten en het licht uit moeten doen.

Tot slot

Twee dingen komen uit dit verhaal duidelijk naar voren:

- Bij het onderwijs in de meetkunde kan het 'doe je ogen dicht' een goede hulp zijn voor ziende leerlingen. Zo kun je je een voorstelling van een ruimtelijke figuur maken. Het is aardig om te zien dat bijna twee eeuwen geleden ook al naar dit didactische hulpmiddel gegrepen werd. Maar ook ruimtelijke figuren, waaraan je kunt zien én voelen hoe bepaalde dingen in elkaar steken, kunnen een uitstekend hulpmiddel zijn. Die laatsten heb ik voor het gemak maar even weggelaten.

- Wij als docenten lijken toch vaak vast te zitten aan een eenmaal beproefde manier van uitleggen. Ik beging de fout door op boeklonplastic voor Anita ruimtelijke figuren op een plat vlak te tekenen. Ik vroeg me niet af of dit voor haar wel zinvol is. Met een blinde leerling merk je op een gegeven moment duidelijk dat je fout zit. Met anderen bega je dezelfde fouten, alleen kom je daar niet zo gemakkelijk achter. Telkens zou een docent zich af moeten vragen of de op dat moment gebruikte manier van uitleggen past bij de leerling die je voor je hebt. Of de op dat moment gebruikte uitleg antwoord geeft op de gestelde vraag.

Uit de praktijk van het blindenonderwijs wil ik daar nog één voorbeeld aan toevoegen. In het huidige programma wiskunde A voor de bovenbouw van het havo is een belangrijke plaats ingeruimd voor het werken met data. Dit gebeurt op verschillende manieren: tabellen, grafieken en formules. Blinde leerlingen kunnen goed uit de voeten met tabellen en formules. Aan grafieken hebben ze alleen iets wanneer ze de 'trend' van een grafiek kunnen voelen, maar het aflezen uit grafieken, dat voor zienden vaak een handig hulpmiddel is, is voor hen heel moeilijk. Dat kan beter op een andere manier. Hierbij moet de docent zich telkens voor ogen houden: de grafiek is een hulpmiddel bij het oplossen van een probleem, als de grafiek voor de leerling alleen maar een last is kan die net als mijn kubussen op boeklon in de prullenmand. Ook uit dit voorbeeld komt scherp naar voren, dat we ons telkens af moeten vragen 'wordt het hulpmiddel geen doel?'

Nogmaals, bij het onderwijs aan blinden worden we met onze neus op de feiten gedrukt, maar laten we dit ook voor onze ziende leerlingen in het achterhoofd houden. Ook meetkunde met je ogen dicht is alleen maar een hulpmiddel waarmee sommige leerlingen een probleem beter kunnen begrijpen.

Dit artikel is in een iets andere vorm eerder gepubliceerd in een liber amicorum voor Nol van 't Riet bij zijn afscheid van de schrijversgroep Moderne Wiskunde bovenbouw.