James Bond, de wet van Snellius en wiskunde B

M. Kindt
Freudenthal instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

In het tijdschrift Euclides [1] schreef ik onder de titel *Het functieonderzoek begint met de grafiek* een artikel over mogelijkheden van het gebruik van de grafische zakrekenmachine in de bovenbouw van havo/vwo en dan vooral bij wiskunde B.
In dat artikel formuleerde ik een aantal wiskunde-didactische stellingen. Een daarvan luidde: *optimaliseringsproblemen met een meetkundige achtergrond kunnen technisch met behulp van de grafische zakrekenmachine worden opgelost om daarna op hun wiskundige merites te worden bekeken; aldus kan er op natuurlijke wijze een dwarsverband worden gelegd tussen analyse en meetkunde.* Dit idee was voor het projectgroepje Graphic Calculator van het Freudenthal instituut aanleiding om een proefpakketje te ontwerpen onder de titel: *Optimaliseren met behulp van de grafische rekenmachine.* [2]
Het pakket zal op grond van de ervaringen in twee scholen (het Liemers College in Zevenaar en het Cals College in Nieuwegein) nog grondig worden gereviseerd en voorzien van een tamelijk uitgebreide docentenhandleiding. De bedoeling is dat het boekje vanaf oktober a.s. bij het Freudenthal instituut verkrijgbaar zal zijn.
In dit artikel zal ik (niet al te systematisch)

a. een schets geven van de (didactische) sequentie van een paar problemen uit dit pakket
b. kort aangeven hoe de TI-81 hierbij zo goed mogelijk kan worden gebruikt
c. iets laten proeven van de ervaringen in de klas
d. een beetje dieper ingaan op de wiskundige inhoud van de problemen.

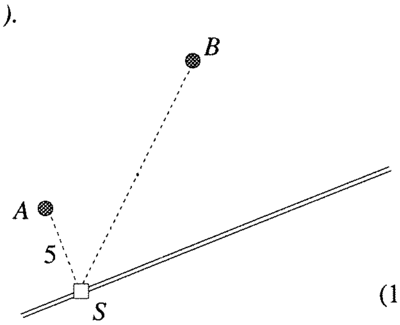
Aan het slot wil ik een duit in het zakje doen bij de discussie rond wiskunde B vwo.

Een nieuw station

In het tweede hoofdstuk van het boekje wordt een vermaard klassiek probleem gestoken in een nieuw jasje.

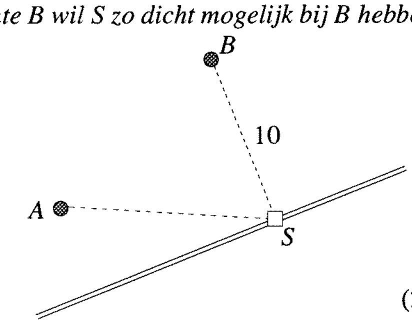
De gemeenten A en B liggen aan dezelfde kant van een spoorlijn resp. op afstand 5 km en 10 km van die lijn. De afstand van A tot B is (hemelsbreed) 13 km. De spoorwegmaatschappij wil een station aan genoemde spoorlijn bouwen en overlegt met diverse instanties waar de beste plaats voor het station (S) is. Het terrein aan de kant van de spoorlijn waar A en B liggen is nog braak en munt niet uit door natuurschoon, zodat men voor de aanleg van de wegen AS en BS alle vrijheid heeft.

Gemeente A wil natuurlijk dat S zo dicht mogelijk bij A ligt (zie 1).



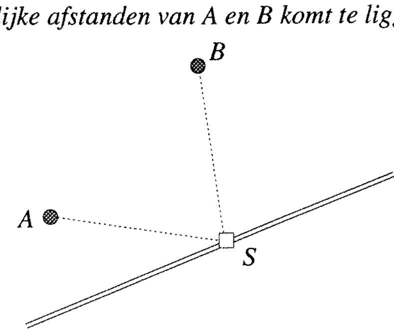
(1)

Gemeente B wil S zo dicht mogelijk bij B hebben (2).



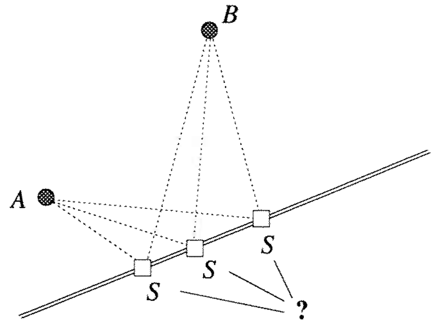
(2)

Het provinciebestuur zou het liefst zien dat S op hemelsbreed gelijke afstanden van A en B komt te liggen (3).



(3)

Tenslotte wil de provinciale busmaatschappij dat de totale afstand AS + SB zo klein mogelijk is (4).



(4)

Geval (4) is, wiskundig gezien, natuurlijk het interessantst en eerlijk gezegd was het ons juist om dat probleem te doen. Steevast een dilemma voor educatieve ontwerpers is dan: gooi je de leerling meteen in het diepe of hanteer je een uitgekiend programma van voorbereidende opgaven. Onder andere vanwege de complexiteit van het geheel, een meetkundige probleemstelling waarbij een analytische methode wordt verwacht met als extra dimensie de teken-reken-machine, hebben we hier voor het laatste gekozen. In de leerlingentekst zijn vragen gesteld over achtereenvolgens de situaties (1) tot en met (4).

(1) en (2) zijn bedoeld als verkenning van de onderlinge ligging van plaatsen en spoorlijn en brengt de leerlingen meteen op het idee de stelling van Pythagoras te gebruiken. Bovendien is er met (1) of (2) een referentiepunt voor het vervolg.

(3) geeft aanleiding om de plaats van S, ten opzichte van bijvoorbeeld situatie (2), te variëren, zeg x km richting A, en de afstanden AS en BS uit te drukken in x.

De vergelijking $BS = AS$ (ofwel $y_1 = y_2$) kan nu grafisch worden opgelost via de invoer van de functies

$$y_1 = \sqrt{100 + x^2} \text{ respectievelijk } y_2 = \sqrt{25 + (12 - x)^2}$$

Deze handreikingen maken het mogelijk om (4) snel en adequaat aan te pakken; een van de fantastische gemakken van de TI-81 is dat je met eenmaal ingevoerde functies weer nieuwe kunt bakken, in dit geval is een simpel '$y_3 = y_1 + y_2$' voldoende. In een handomdraai maak je nu de grafiek van $BS + AS$ als functie van x, en door het spoor van die grafiek te volgen (TRACE) en daarbij de coördinaten onderin het venster te lezen (zoals je bij schaatswedstrijden op de buis de rondetijden en de totaaltijden leest), kun je snel en vrij nauwkeurig het minimum met de bijbehorende plaats bepalen. Dat daarmee de kous nog niet af is, volgt onmiddellijk uit de in de aanhef aangehaalde didactische stellingname, maar daarover straks.

Bij (1) en (2) heb ik achteraf weinig commentaar. Het idee om op deze manier binnen te komen, voldeed goed. Ook met (3) was niets mis. Geen van de leerlingen kwam op het idee de middelloodlijn van AB te tekenen en de plaats van S te construeren, waarmee eventueel de analytische aanpak zou zijn gefrustreerd. Het zal de lezer vermoedelijk niet verbazen en ook wij beschikten over voldoende realiteitszin om niet te veronderstellen dat dit zou gebeuren. Wat me wel verraste is dat bij de vraag naar de exacte oplossing een leerling van vwo 5 B met het volgende staaltje voor de dag kwam:

$$\sqrt{100 + x^2} = \sqrt{25 + (12 - x)^2}$$

Nou, eh, eerst kwadrateren...

De leraar knikt bemoedigend en laat zich dicteren:

$$100 + x^2 = 25 + (12 - x)^2$$

En hoe verder?

Nou weer worteltrekken...

Vragende grimas op gezicht van de leraar, maar de leerling zet door:

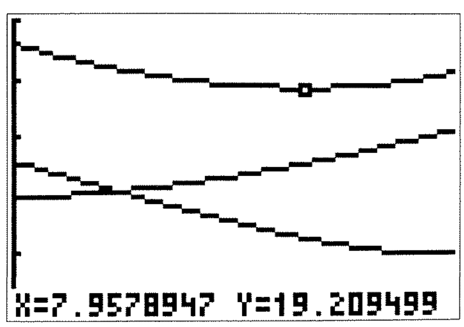
$$10 + x = 5 + (12 - x)$$

Daar sta je dan met je goede gedrag...

Nu moeten we hier ook weer niet al te dramatisch over doen, het is typisch een (mechanistische) fout van alle tijden en van alle leerplannen. Al moet ik zeggen dat ik zelden zo'n mooi rijtje onder elkaar zag. Het leuke van dit elektronische tijdperk is dat je als leerling onmiddellijk kan checken of je goed zit, in dit geval door het snijpunt te traceren en bij twijfel in te zoomen. Er zou hier inderdaad even twijfel kunnen zijn, want de laatste vergelijking geeft x = 3.5, terwijl het correcte antwoord luidt: x = 2.875. Idealiter moet de houding van de leerling dan zo zijn dat hij niet onmiddellijk help roept, maar zijn methode aan een kritisch onderzoek onderwerpt, bijstelt, opnieuw controleert, enzovoort. In de les werd de hier gesignaleerde denkfout overigens ontmaskerd door een andere leerling (die stap mag niet, je moet de wortel van het hele ding nemen...) waarna de leraar het heft in handen nam door aan te sturen op het bekende tegenvoorbeeld: $3^2 + 4^2 = 5^2$, maar ... $3 + 4 = 7$.

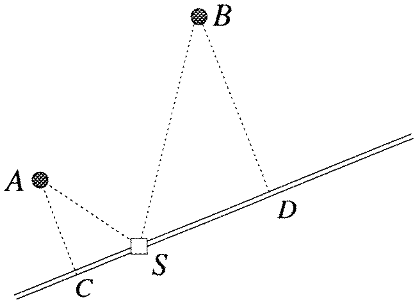
Terug naar situatie (4).

Na invoer van de functies y_1, y_2 en y_3 (= $y_1 + y_2$) met RANGE X = [0 ; 12] en RANGE Y= [0 ; 25] komt er op het scherm dit plaatje:



Uit de grafiek wordt afgelezen dat de minimale afstand $AS + BS$ ongeveer gelijk is aan 19.21 voor x is ongeveer 7.96. Dat laatste is natuurlijk hier het belangrijkst, want

daardoor wordt de plaats van S bepaald. Behalve de vraag naar het minimum was er ook de opdracht:
Lees uit de grafieken op het scherm af, hoe groot de verhoudingen $CS : DS$ en $AS : BS$ zijn in het geval de totale afstand minimaal is.



De vraag bleek met betrekking tot de eerste verhouding enigszins misleidend. DS is direct af te lezen van het scherm (7.9578947); voor CS geldt dit niet, maar moet $CS = 12 - DS$ worden toegepast.
Voor $AS : BS$ is de vraag aardig omdat met de trace-pijltjes kan worden overgewipt naar de grafieken van y_1 en y_2 en de bijbehorende ordinaten verschijnen in beeld. Een fraaie mogelijkheid geeft de TI-81 om de verhouding y_2 / y_1 direct op het rekenscherm te krijgen: toets Y-vars in en kies y_2 en na ENTER op het scherm verschijnt nu 6.429511253; doe hetzelfde voor y_1 en daarna voor y_2 / y_1; 'enteren' geeft de uitkomst van ongeveer 0.5 en het lijkt er dus op dat $AS : BS = 1{:}2$

```
Y2
        6.429511253
Y1
        12.77998782
Y2/Y1
        .5030921269
█
```

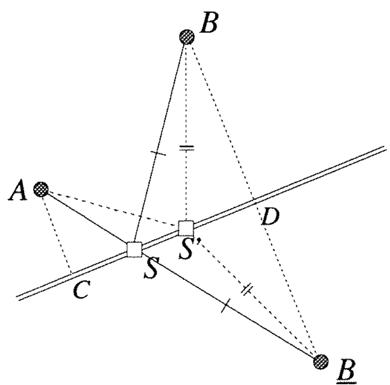
Dit handigheidje blijkt ook voor de x uitvoerbaar: toets (met de grafiek in het venster en het trace-spinnetje op het minimumpunt) de knop *X/T* in, en na enter komt de abscis van het laagste punt van de grafiek van y_3 op het rekenscherm; desgewenst kunnen nu $12 - x$ en $(12-x)/x$ direct worden afgelezen met als resultaat van het laatste alweer een getal in de buurt van 0.5.
Het resultaat wijst er op dat AS en BS (evenals CS en DS) zich verhouden als de (loodrechte) afstanden van A en B tot de spoorbaan. Aldus de tekst, met als vervolg: *ga na of dat ook klopt als A wat verder weg of wat dichterbij de spoorbaan ligt.* Kijk, dat is nu de kracht van een apparaat als de TI-81 ten voeten uit: met een simpele ingreep kun je een ander geval laten doorrekenen en tekenen. Als je A laat bewegen in een richting loodrecht op de spoorbaan, hoef je hier maar één getalletje te veranderen in de formule van y_2 en de rest gaat vanzelf. Als verschillende leerlingen dan verschillende wijzigingen hebben toegepast, beschik je als leraar meteen over een empirisch onderzoekje. Maar wiskunde zou wiskunde niet zijn, als je daar vrede mee zou hebben. De hypothese lijkt te kloppen, maar waarom? Grote wiskundigen als Fermat en Leibniz hebben zich destijds ook over dit vraagstuk gebogen, zij het dat de context een beetje anders was. In plaats van de spoorbaan dachten zij aan een spiegel en de route ASB was in hun probleemstelling de gang van een lichtstraal uitgaande van de lichtbron A en aankomend in B. Leibniz wilde bij zijn oplossing natuurlijk de differentiaalrekening gebruiken die hij net had uitgevonden. De positie van S, waarbij $AS + BS$ minimaal is, kan worden gevonden door y_3 te differentiëren naar x en de afgeleide nul te stellen. Kortom de plaats van S is bepaald door de vergelijking:

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{dy_2}{dx}$$

De opdracht voor de leerlingen in dit verhaal luidde:

Bereken y_1' en y_2' met behulp van de kettingregel en laat zien dat de eerste gelijk is aan $DS : BS$ en de tweede gelijk aan het tegengestelde van $CS : AS$.
Verklaar hieruit dat bij minimale afstand ASB de hoeken die AS en BS met de spoorbaan maken, gelijk zijn.

Wat me opviel in de klas was dat de techniek van het differentiëren geen enkel probleem gaf. Maar hetzelfde meisje dat feilloos en vlot de uitkomsten dicteerde raakte het spoor bijster bij terugkoppeling naar de meetkundige betekenis.
De leraar: *zie je wel* $DS = x$, $BS = \sqrt{(100 + x^2)}$, *dus ...*
Oh. En na voltooiing van de conclusie, waarbij en passant wat cosinussen op het bord verschenen, zegt ze: ik zie het geheel niet. Aangenomen dat dit niet een staaltje taalgebruik uit Couperus' tijd was, bedoelde ze: ik mis het overzicht. En dat is wat ik ook wel bij andere leerlingen constateerde: het algebrawerk is zeker niet te hoog gegrepen, de meetkundige probleemstelling wordt goed doorzien, het invoeren van formules in de TI-81 en het aflezen van het scherm gaat prima, maar het soepel overspringen van het een naar het ander met behoud van het overzicht, dat vraagt in dit stadium erg veel van ze. Na overleg met de leraar besluit deze de volgende les alles nog eens helder op een rijtje te zetten. Het werkt en de klap op de vuurpijl is Heron's meetkundige oplossing uit de klassieke oudheid:

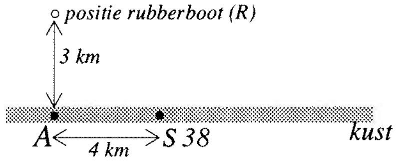


Het plaatje zegt eigenlijk genoeg...
Het is toch wel leuk als leerlingen met een 'ouderwetse' onderbouw (ik bedoel met betrekkelijk weinig meetkunde) reageren met een uitroep: waarom leren ze altijd eerst de moeilijke en dan de makkelijke oplossing?
Overigens hoef je je als leraar hier niet in allerlei bochten te wringen. Ten eerste komt een gewone sterveling zo maar niet op het idee om één van de stations te spiegelen in de spoorbaan en ten tweede is de methode beperkt. Neem nu de volgende variant: de steden A en B zijn zeer verschillend van grootte: is de voorgestelde manier (4) om S te bepalen dan wel 'eerlijk'?
Noem ik de inwonersaantallen van A en B respectievelijk N_A en N_B dan leidt dat gemakkelijk tot het voorstel om maar liever $N_A \cdot y_1 + N_B \cdot y_2$ te minimaliseren.
Meetkundig is niet een, twee, drie te zien, hoe S bijvoorbeeld in het geval $N_A : N_B = 2 : 1$, zou moeten worden geconstrueerd. De TI-81-methode vraagt nauwelijks om aanpassing, het is slechts een kwestie van coëfficiënten plaatsen voor y_1 en/of y_2. De methode van Leibniz doet het ook goed, met als resultaat dat de cosinussen van de hoeken die AS en BS met de spoorbaan moeten maken zich dienen te verhouden als $N_B : N_A$.
Het station S moet nog een naam hebben, en ik zou de NS adviseren nu eens af te stappen van de traditie Ede-Wageningen, Driebergen-Zeist, enzovoort, maar het 'station Snellius' te noemen, voelt u hem al?

Agent 007

Het probleem van het station speelt in het boekje een beetje de rol van een 'case-studie'. Het wordt gevolgd door een hoofdstuk met korte optimaliseringsproblemen betreffende omtrek, oppervlakte en inhoud, die door de leerlingen trouwens met succes werden gemaakt. Vervolgens komen opnieuw kortste (maar vooral snelste) wegen ter sprake. Aan een Hawexboekje [3] ontleenden we het volgende verhaal:

James Bond, Geheim Agent 007, is op drie kilometer afstand van de kust gedropt. Met een rubberboot wil hij de kust bereiken om bij strandpaal 38 een geheime boodschap achter te laten. Natuurlijk is het zaak dat hij zijn missie zo snel mogelijk volbrengt. Met de rubberboot kan hij zich roeiend verplaatsen met een snelheid van 6 km/u. Het water is zo rustig dat de vaarrichting niet van invloed is op zijn snelheid. Op het strand kan hij een lange poos een snelheid van 12 km/u volhouden. In onderstaande situatieschets zie je dat de strandpaal (S 38) 4 km verwijderd is van de plaats (A) op het strand die James Bond zou bereiken als hij de kortste weg naar het strand zou nemen.



De context ontlokt hier en daar wat gegniffel.
Als oriënterende opdracht wordt eerst gevraagd hoeveel tijd hij nodig zou hebben bij minimale roeiafstand (dus met de vaarroute loodrecht op de kust) en hoeveel als hij linea recta naar *S 38* zou varen. Vervolgens wordt nagegaan dat hij tijdwinst kan boeken door bijvoorbeeld halverwege A en de strandpaal aan land te gaan.
Daarna volgt een procedure die erg lijkt op het spoorbaanprobleem: stel landingsplaats ligt op x km van A, roeitijd = y_1, looptijd = y_2 en de totale tijd = y_3 (alle tijden bijvoorbeeld in uren). De grafische methode leert dat de optimale plaats om aan land te gaan op ongeveer 1.72 km van A ligt.
Hoe moet James Bond het aanleggen om precies daar aan te leggen? Wel, dat is een kwestie van de goede koers uitzetten. De hoek tussen vaarrichting en de richting loodrecht op de kust is daarbij een uitstekende graadmeter. Een kleine afwijking van die hoek kan noodlottige gevolgen hebben voor onze held; daarom wil hij de *exacte* waarde van die hoek weten.
Er zijn nu twee mogelijkheden:

- je rekent met behulp van de differentiaalrekening de exacte optimale waarde van x uit ($=\sqrt{3}$) en dan volgt dat de tangens van de hoek gelijk is aan $\sqrt{3}/3$, ofwel de hoek is 30°
- als variabele kies je de hoek en je lost het probleem op met behulp van goniometrische functies; dat leidt dan tot

$$y_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{\cos x} + \frac{1}{12} \cdot (4 - 3\tan x)$$

Uit het differentiëren hiervan en het vernullen van de afgeleide vloeit voort: $\sin x = \frac{1}{2}$, prima dus.

Merk nog op dat de afstand van de strandpaal tot A er niet zo vreselijk veel toe doet, zolang de koerslijn naar die paal geen kleinere hoek dan 30° maakt met de loodlijn op de kust. Achteraf goed te begrijpen, maar toch even een verrassing ...
Bij deze laatste aanpak kan natuurlijk ook weer de TI-81 worden ingezet. Met de MODE op degree zie je al gauw dat de optimale hoek in de buurt van 30° moet zijn. Maar zoals gezegd, het ging om de exacte waarde.
In de praktijk van de les, die tamelijk vlot verliep, kwam de goniometrische methode niet aan bod, dat wordt tenminste iets voor de handleiding, of misschien moet die toch worden afgedwongen in de leerlingentekst?
Ook hier ligt het voor de hand te generaliseren, met als resultaat dat de optimale landingsplaats wordt bepaald door de formule:

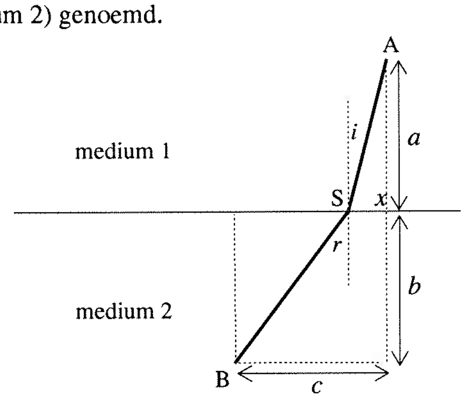
$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}$$

waarbij v_1 en v_2 achtereenvolgens de snelheden ter zee en ter land voorstellen en α de koershoek is. Voorwaarde in dit geval is $0 < v_1 \leq 0.8 \cdot v_2$. Natuurlijk moet er worden ingegaan op de grensgevallen.

Een mooie uitbreiding van het James Bond verhaal is het landinwaarts verplaatsen van het punt waar de boodschap moet worden afgeleverd ten opzichte van de strandpaal. Uiteraard moet de afstand tot de kustlijn bekend zijn. Het probleem begint dan heel erg te lijken op het spoorlijnprobleem-met-gewogen-afstanden... Of in een andere context: op het probleem van de breking van een lichtstraal bij zijn gang door twee media met verschillende dichtheden.
De Leibniz-methode leidt vrij gemakkelijk tot de evenredigheid die bekend staat onder de wet van Snellius:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

waarbij α en β de hoeken zijn die in de James Bond context de vaarkoers en de loopkoers met de richting loodrecht op de kust maken. In Snellius' wet zijn het de invalshoek en de brekingshoek (meestal aangeduid met i en r). De verhoudingen van de snelheden in het rechterlid, wordt dan de brekingsindex (van medium 1 naar medium 2) genoemd.



Ik merk op dat de oorspronkelijke James-Bond-opdracht kan worden opgevat als een grensgeval van de wet van Snellius, namelijk met $r = 90°$, en dat leidt dan weer tot $\sin i = v_1/v_2$. In de natuurkunde noemt men de hoek i die hieraan voldoet, de *grenshoek*; is de invalshoek van een lichtstraal groter dan die grenshoek, dan treedt terugkaatsing op. Interessant is het ook om nog even te kijken of de methode met variabele hoek en goniometrische functie hier ook succesvol is. Vervelend is natuurlijk dat het hier om twee hoeken gaat, zodat er een functie van twee variabelen komt:

$$y = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{a}{\cos i} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{b}{\cos r}$$

Die twee variabelen zijn echter gebonden door de betrekking:

$$a \cdot \tan i + b \cdot \tan r = c$$

Je kan er dus weer een functie van één variabele van maken, maar dat levert niet zo'n aantrekkelijke formule op. Geraffineerder is het om i en r beide als functie van x (zie figuur) te beschouwen en in beide formules te differentiëren. Met als resultaat:

$$y' = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{a \cdot \sin i}{(\cos i)^2} \cdot i' + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{b \cdot \sin r}{(\cos r)^2} \cdot r'$$

en

$$\frac{a}{(\cos i)^2} \cdot i' + \frac{b}{(\cos r)^2} \cdot r' = 0$$

Hieruit volgt betrekkelijk eenvoudig:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2}$$

De voorgaande afleiding kan natuurlijk even goed gedaan worden zonder de hulpvariabele x (heette die vroeger niet de obscure parameter?) namelijk door r als functie van i te beschouwen. Leuk toch die verschillende manieren van kijken naar een probleem? Het vraagt wat flexibiliteit van leraar en leerling, dat wel. En ik vrees dat dit in het huidige onderwijs van wiskunde B op het vwo niet zo gebruikelijk is.

Wiskunde B op het vwo

Zo ben ik dan aangeland bij de actualiteit in wiskundeland. De vele stemmen die opgaan om het wiskunde B programma te veranderen zijn bepaald niet unisono, en daarom verstout ik me ook maar om een toontje mee te zingen. Om te beginnen lijkt het me zonneklaar dat het gebruik van de grafische rekenmachine in de klas (maar dan ook intensief en verplicht) een verfrisssende werking kan hebben op èn de didactiek èn de feitelijke inhoud van de analyse van wiskunde B. Het vastgeroeste functieonderzoek dat zolang gezichtsbepalend is geweest, heeft al bijna afgedaan. En zonder ook maar in de verste verte een pleidooi te willen houden voor het overboord gooien van alle techniek, lijkt het me toch dat er wel wat geloosd kan worden. Zeker als je ook nog de bereikbaarheid van mathematische software als Derive in ogenschouw neemt. Kortom het analyseonderwijs zou zich kunnen beperken tot de kernpunten van de stof en zich niet hoeven te laten afleiden door het aanleren van allerlei technische foefjes. Of het verstandig is de vrijgekomen tijd te vullen met een wezenlijk nieuw stukje (discrete wiskunde heb ik horen roepen en zelfs coderingstheorie), dat betwijfel ik. Afgezien van het feit dat er ook nog wiskunde A bestaat, waar onderwerpen uit de discrete wiskunde perfect in passen, geloof ik dat we er beter aan doen het wiskunde B programma zo te veranderen dat het er homogener van wordt, in plaats van heterogener. Ik bedoel dat er in het gebied tussen (ruimte)-meetkunde en analyse attractieve mogelijkheden genoeg zijn die zowel de analytische kant als de meetkunde-inzichtelijke kant versterken. Om eens wat te noemen:

- Optimaliseringsproblemen in een (meetkundige) context die een diversiteit aan oplossingsmethoden toelaten (grafisch, analytisch, meetkundig); het in dit artikel geschetste voorbeeld is behoorlijk illustratief (goede bronnen zijn de klassieke werken [4] en [5]).

- Parameterkrommen in vlak en ruimte, in een andere geest dan tot nu toe gebruikelijk en met meer aandacht voor meetkundige, esthetische en historische aspecten (denk aan cycloïde, cardioïde, logaritmische spiraal, figuren van Lissajous, enzovoort). De grafische rekenmachine maakt dergelijke krommen direct toegankelijk; bij ruimtekrommen is de voorstelling wat lastiger, maar kunnen de projecties op de drie coördinaatvlakken snel worden geproduceerd. Een leuk voorbeeld is te vinden in de puzzelrubriek van de vorige Nieuwe Wiskrant [6] waarin mogelijke schaduwen van de schroeflijn werden onderzocht.
- Bundels grafieken, ruimtelijk gerangschikt, brengen gebogen vlakken voort; een vorm als $y = x^3 + ax$ bijvoorbeeld geeft in een $Oxay$-stelsel een interessant geplooid oppervlak en voor je het weet raak je een modern onderzoeksveld als chaos-theorie.
  In dit kader past ook een begrip als partiële afgeleide vanuit zijn meetkundige betekenis.
- Als mooie toepassing van differentiaalvergelijkingen en wat vectorrekening denk ik aan 'planetenbanen en de wetten van Keppler' (van Tiel [7] schreef hierover ooit een boekje onder de titel 'versnelling en beweging' bestemd voor vwo-abituriënten). Overigens blijft differentiaalvergelijkingen een omstreden onderwerp; willen we dat wel handhaven? Zo ja, dan zou men zich naar mijn mening het beste kunnen beperken tot de zeer eenvoudige types waar toegankelijke toepassingen van zijn, namelijk $y' = ay + b$ en $y'' = ay$.
- Oppervlakte- en inhoudsberekeningen volgens het principe van Cavalieri, met een vertaling naar de integraalrekening (ook hiervan is een mooi voorbeeld in [6]) te vinden). In dit kader wil ik nogmaals wijzen op de bron die meetkunde kan zijn voor het bouwen van functies (voorbeeld: de oppervlakte van een snijvlak met een lichaam als functie van de hoogte, waarbij kwesties als continuïteit en differentieerbaarheid op informele en natuurlijke wijze naar voren kunnen komen).

Dit alles (?) met behoud van de goede elementen van het huidige B-programma, met de grafische rekenmachine op zak en ondersteund door een portie educatieve software van goed gehalte. Ik ben er van overtuigd dat het B-programma voor de leerlingen met een exacte aanleg aldus aan aantrekkelijkheid kan winnen. Door veel aandacht te besteden aan het vergelijken van methoden (de empirische via de grafische zakrekenmachine, de analytische om hypothesen hard te maken en de meetkundige om zaken aanschouwelijk te maken en om iets van de meetkundige bewijstrant te laten ervaren) lijkt het me dat aan de veelgehoorde klachten uit wiskundig-universitaire kring over het gebrek aan ervaring met typisch wiskundige redeneringen (ook wel bewijzen genoemd) tegemoet gekomen wordt. Veel zal afhangen van hoe de eindexamens zich zullen ontwikkelen. Zal men het aandurven werkelijk naar inzicht te vragen of bijvoorbeeld verschillende methoden bij één probleem te eisen? Het is vooral ook daarom dat voor een herziening van wiskunde B een bescheiden experiment met examenfaciliteiten hard nodig zal zijn. Vanuit zo'n experiment zouden dan nascholing en auteurteams gevoed kunnen worden, kortom het Hewet-Hawex-model, zij het op een wat kleinere schaal. Welbeschouwd is er bij dit alles een gloeiende haast: in 1997 stromen de met een kersvers wiskunde 12-16 opgeleide leerlingen de vwo-bovenbouw binnen en dan zou de bovenbouw-aanpassing eigenlijk voltooid moeten zijn. Tja...

Literatuur

[1] M. Kindt, Het functieonderzoek begint met de grafiek, *Euclides 67*, (1991/92) nrs 7 en 8.

[2] P. Drijvers en M. Kindt, *Optimaliseren met de grafische zakrekenmachine*, Freudenthal instituut, Utrecht, *in voorbereiding*.

[3] M. Kindt e.a., *De techniek van het differentiëren, Hawex*, Freudenthal instituut, Utrecht 1992.

[4] R. Courant en H. Robbins, *What is mathematics*, Oxford University Press, New York 1958.

[5] G. Polya, *Induction and analogy in Mathematics*, (volume I of Mathematics and plausible reasoning), Princeton University Press, Princeton 1973.

[6] A. Goddijn, Strips, Spiralen en Euclidiennes, *Nieuwe Wiskrant 12* (4), 56-60.

[7] J. van Tiel, *Versnelling en beweging*,Wolters Noordhoff, Groningen 1968.