

Martin Kindt: Lessen in Projectieve Meetkunde

Boekbespreking

J. van de Craats

Koninklijke Militaire Academie, Breda

Je kunt de projectieve meetkunde op twee manieren opzetten: de *synthetische manier*, waarbij je alle resultaten strikt logisch afleidt uit een beperkt aantal axioma's, en de *analytische manier*, waarbij je alles met coördinaten doet. Bij de tweede manier zijn die coördinaten elementen van een lichaam, en net als bij de lineaire algebra kun je de aard van het lichaam aanvankelijk nog in het midden laten. Dat geeft dus een heel algemene theorie die allerlei banden heeft met andere gebieden van de wiskunde en haar toepassingen.

De synthetische methode heeft het voordeel dat het aantal axioma's klein is. Met een handvol kom je al een heel eind, maar juist daardoor is deze weg geen gemakkelijke: bewijzen zijn vaak heel subtiel, en een onderzoek van de consequenties van voor de hand liggende varianten in de axioma's hoort natuurlijk ook tot het programma. Uiteindelijk is dan het invoeren van coördinaten één van de hoogtepunten, en de aard van de gebruikte axioma's blijkt de aard van het onderliggende coördinatenlichaam vast te leggen.

A. Heyting koos in zijn boek *Projectieve Meetkunde* (1963, herdruk: Epsilon Uitgaven, Utrecht 1986) voor de analytische aanpak. Maar in zijn voorwoord noemde hij ook nog een derde weg: 'uitgaan van de Euclidische meetkunde en tot de projectieve ruimte overgaan door toevoeging van de oneigenlijke elementen'. Hierover zei hij: '(Deze weg) is zowel om didactische als om wetenschappelijke redenen te verwerpen. Wanneer men van de Euclidische meetkunde uitgaat, dan is het moeilijk, de leerling er later van te overtuigen, dat de projectieve meetkunde toch onafhankelijk van de Euclidische is'. In *Lessen in Projectieve Meetkunde*, het onderwerp van deze boekbespreking, slaat Martin Kindt tòch zo'n derde weg in, en ik denk dat je kunt stellen dat het resultaat, zeker in didactisch opzicht, Heytings stellingname voor een belangrijk deel ontkracht.

Maar eerst wat over het gebruikelijke onderwijs in de projectieve meetkunde, synthetisch of analytisch. Al heel lang is projectieve meetkunde een examenonder-

deel van de mo-examens, vroeger zowel bij mo-A als bij mo-B, thans alleen nog maar bij mo-B. Ik heb het vele malen mondeling geëxamineerd, en wat me daarbij telkens weer opviel, was dat de kandidaten eigenlijk nooit blijk gaven dit vak in hun meetkundige ervaringswereld te kunnen inpassen. Stellingen van Pappos, Desargues, Pascal – als het goed was konden ze formuleren en bewijzen, maar het bestaan van verbanden met de 'gewone' meetkunde en perspectieftekeningen bleef toch tamelijk duister. Het was een vak apart waar je nu eenmaal doorheen moest, en na het examen kon je het ook rustig weer vergeten. Dat lag natuurlijk niet alleen aan de kandidaten, maar ook aan hun opleiders en aan de gebruikte literatuur.

Het is de grote verdienste van Martin Kindt dat hij de aansluiting met de meetkundige ervaringswereld van alledag, de meetkunde die we tegenwoordig op school behandelen, met name de ruimtemeetkunde en de 'kijkmeetkunde' van het nieuwe havo-B programma, nadrukkelijk gezocht en uitgebuit heeft. Die meetkunde is op het eerste gezicht een nogal rommelig geheel van losse resultaten: de stelling van Pythagoras, eenvoudige eigenschappen van eenvoudige ruimtelijke figuren. Veel lijn lijkt er niet in te zitten (althans figuurlijk), en van strikte axiomatische opbouw is al helemaal geen sprake.

Sommige leraren worden dan ook een beetje zenuwachtig als je in de meetkunde het woord 'bewijs' laat vallen. Immers, waar mag je van uitgaan? Wat staat vast? Bepaalde dingen 'zie je zo', maar ziet de leerling ze ook? Coördinaten bieden soms uitkomst: je kunt dan van alles door berekeningen controleren. Maar op grond waarvan kun je in een vlak of in de ruimte eigenlijk een coördinatenstelsel aanbrenge(n)? Is dat een axioma? Een ervaringsfeit? Een geloof? Gelukkig stellen leerlingen zelden zulke vragen. Als je eerlijk bent, moet je toegeven dat de meetkunde op school meer een soort natuurkunde is: je beschrijft bepaalde eigenschappen van de ruimte om je heen, en probeert verbanden en wetmatigheden te ontdekken. Af en toe vindt er wel logische deductie plaats, maar alleen op lokaal niveau: ondoorzichtige stellingen worden tot vertrouwdere resultaten herleid.

Dat de meetkunde ook in veelomvattende logische systemen past, is natuurlijk schitterend, maar dat kun je eigenlijk pas waarden als je al over een flinke dosis meetkundige ervaring beschikt. Bij een cursus projectieve meetkunde voor beginners moet de eerste vraag daarom niet zijn of je het vak analytisch of synthetisch opzet, maar of de meetkundige ervaring van de cursisten al rijk genoeg is om een strikt logische behandeling in vruchtbare aarde te laten vallen.

Ik denk dat Martin Kindt zich die vraag ook heeft gesteld, en dat hij zijn eerste prioriteit heeft gelegd bij het verder ontwikkelen van die meetkundige ervaringswereld. Zijn boek is gebaseerd op lessen aan de deeltijdopleiding tot eerstegraads leraar wiskunde aan de Hogeschool Midden-Nederland in Utrecht. Het eerste deel, *Van projecties naar projectieve meetkunde*, het perspectieftekenen, vormt het uitgangspunt van een onderzoek naar eigenschappen van de centrale projectie. De dubbelverhouding van vier punten op een lijn blijkt een belangrijk hulpmiddel te zijn, en alras komen daarna de gebruikelijke onderwerpen ter tafel: puntenreeksen en lijnenwaaiers, dualiteit, perspectiviteiten en projectiviteiten, volledige vierhoeken, de constructie van Steiner,

de stellingen van Pappos en Desargues. Alles gebeurt in een reële context, projectieve meetkunde is in dit boek de studie van het reële projectieve vlak. In het tweede deel komen de kegelsneden aan de orde, en daarmee ook de stellingen van Pascal en Brianchon.

Vermeldenswaard is dat de tekst van Pascals *Essay pour les coniques* uit 1640 met de originele tekeningen als appendix is opgenomen, maar helaas zonder toelichting. Het derde deel, *Projectieve meetkunde met coördinaten*, is het kortst. De verbanden met de lineaire algebra komen daarin ter sprake, maar ook zaken als projectieve, affiene en euclidische eigenschappen en een eerste kennismaking met de hyperbolische meetkunde.

Lessen in Projectieve Meetkunde is geschreven in de enthousiaste, enigszins informele stijl die we van Martin Kindt gewend zijn. Elk van de 36 korte hoofdstukken wordt afgesloten met een serie welgekozen opgaven. De lay-out oogt aangenaam en de vele illustraties zijn uitstekend verzorgd. Van harte aanbevolen als inleiding in dit mooie vak!

Martin Kindt, *Lessen in Projectieve Meetkunde*, Epsilon Uitgaven 26, Utrecht 1993, 200 p., prijs f 34,50, isbn 90-5041-031-6