Twee bekende limieten

H. Zunneberg
Geert Groote College, Deventer

Het hoofdstuk *Limieten* is niet eenvoudig. (ε,δ) redeneringen zijn voor leerlingen moeilijk om te begrijpen.
De gemiddelde leerling kan volgens mij meer aan dan het toepassen van de regel van De l'Hôpital en bezig zijn met de rekenmachine. Het gaat bij wiskunde toch om meer dan alleen maar het verkrijgen van de goede uitkomst.
Volgens mij is er een tussenweg met betrekking tot twee belangrijke standaardlimieten. Alvorens deze te laten zien volgt eerst een korte bespreking van twee vraagstukken op het niveau van respectievelijk 3 en 5vwo.

Opgave

Teken een lijn l die een hoek van 30° maakt met de positieve x-as.

a. *Kies twee punten op l, meet de coördinaten van deze punten en bepaal hiermee een benadering van de richtingscoëfficiënt van l.*
b. *Bereken tan 30° met de rekenmachine en vergelijk de uitkomst hiervan met het antwoord van vraag a.*

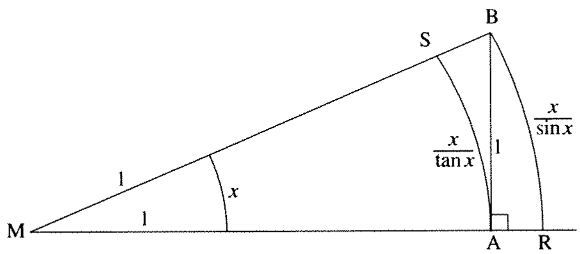
Zo'n stel elkaar ondersteunende opdrachten beoogt het inzicht van de leerling te verhogen en getuigt van een werkwijze die misschien wel kenmerkend is voor het huidige wiskundeonderwijs.
Ogenschijnlijk is de volgende opgave hier ook een voorbeeld van.

a. *Benader met de rekenmachine*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad en \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.$$

b. *Bereken beide limieten met de regel van De l'Hôpital en vergelijk de antwoorden met die van vraag a.*

Ogenschijnlijk, want De l'Hôpital verschaft geen inzicht en de rekenmachine uiteraard nu ook niet. Hoogstens versterken a. en b. samen het geloof dat 1 het goede antwoord zou kunnen zijn.
Volgens mij vormen beide limieten nog steeds het begin van de differentiaalrekening van goniometrische functies en daarom dient een elementaire methode te worden gezocht. Na enig zoeken bleek het volgende mogelijk.



In de figuur ligt boog x op de eenheidscirkel met middelpunt M. Verder geldt: hoek A is 90°, $AB = 1$ en $0<x<\frac{1}{4}\pi$.
Hieruit volgt: $MA = \frac{1}{\tan x}$ en $MB = \frac{1}{\sin x}$.

De bogen AS en BR met middelpunt M ontstaan door vermenigvuldiging van boog x ten opzichte van M met

$MA = \frac{1}{\tan x}$, $MB = \frac{1}{\sin x}$ respectievelijk, zodat

boog $AS = \frac{x}{\tan x}$ en boog $BR = \frac{x}{\sin x}$ [noot 1].

De gekromde figuur $ARBS$ heeft een oppervlakte die gelijk is aan

$$\frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot[MB^2 - MA^2] = \frac{1}{2}x\cdot AB^2 = \frac{1}{2}x\cdot 1 = \frac{1}{2}x.$$

Maakt men AM steeds groter, dan wordt x kleiner en nadert tot 0, evenals oppervlakte $ARBS$.
De figuur $ARBS$ wordt steeds dunner, terwijl lijnstuk AB steeds in de figuur ligt. De bogen RB en AS worden dus, wanneer x naar 0 nadert als het ware tegen lijnstuk AB 'platgedrukt'.

Anders bezien (zonder oppervlakte):
Hoe dicht R ook ligt bij A (op de lijn door $A \perp AB$), steeds kan men met behulp van de middelloodlijn van lijnstuk RB een punt M construeren dat middelpunt is van de bogen x, RB en AS, waarbij steeds geldt dat $AR = SB$, dus S nadert tot B als R nadert tot A. Met andere woorden:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$ (want x nadert tot 0 als R nadert tot A).

Door omkering en met behulp van bijvoorbeeld de formules $\sin(-x) = -\sin x$ en $\tan(-x) = -\tan x$ volgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Noot

[1] Door uit te gaan van een lijnstuk AB met lengte 1 hoeven x, $\sin x$ en $\tan x$ niet afzonderlijk beschouwd te worden in het limietproces, waardoor $\frac{0}{0}$ vermeden wordt.
Een troebele uitspraak als:

"$\sin x \approx x$, dus $\frac{\sin x}{x} \approx 1$, als x heel klein is"

(waar ik als leerling al moeite mee had), kan dan ook vermeden worden. Die uitspraak is troebel, omdat '$\approx$' niet '$=$' betekent en ook niet '$\neq$'.

Eventuele correspondentie kunt u zenden naar de auteur
Herman Zunneberg
leraar G.G.C.
Herman Boerhavelaan 1
7415 ES Deventer

Opening Centrum Vrouwen en Exacte Vakken

Waarom profiteren meisjes zo weinig van het onderwijs in exacte vakken?
De werkgroepen 'Vrouwen & Wiskunde' en 'Vrouwen & Natuurwetenschappen' houden zich beiden al een aantal jaren bezig met het bevorderen van de deelname van meisjes aan de exacte vakken in het voortgezet onderwijs. De werkgroepen zetten zich stevig af tegen het aloude beeld van exacte vakken waarin voor vrouwen weinig plaats lijkt te zijn. In de afgelopen jaren is er een scala aan activiteiten ontwikkeld waarmee de werkgroepen zich een positie verworven binnen het onderwijsveld. Daarnaast vervullen de werkgroepen ook een netwerkfunctie voor haar leden, voornamelijk onderwijsgevenden en onderzoekers. De werkgroepen bundelen nu de krachten en vormen samen een stichting.

Het bureau/documentatiecentrum van de stichting Vrouwen en Exacte Vakken, Zwarte Woud 2, Utrecht, zal op 5 november a.s. van 15.00 tot 17.00 feestelijk geopend worden.

Het thema tijdens de opening is beroepenoriëntatie. Want, waarom zou je exacte vakken kiezen in je eindexamenpakket? Omdat je het leuke vakken vindt, omdat ze nuttig zijn voor later, of vanwege die aardige docent? In elk geval kom je wis-, natuur- en scheikunde in heel veel beroepen tegen. Ook in beroepen waarvan je het in eerste instantie niet zo verwacht.
Ter gelegenheid van de opening van het Centrum wordt de bundel *Wiskunde en werk* gepresenteerd. Deze bundel laat leerlingen kennismaken met vrouwen in beroepen en de wiskunde die daar bij komt kijken: van verrassende beroepen zoals verloskundige of beeldhouwkundige tot beroepen in bijvoorbeeld de hardwaretechniek of de bouw. De gekozen voorbeelden zijn verwerkt tot lesmateriaal voor leerlingen van verschillende niveaus en schooltypes. De praktijksituatie in een bepaald beroep vormt steeds het uitgangspunt. Zo kunnen leerlingen zelf een tuin ontwerpen of het inkoopbeleid van hun eigen sportshop doorrekenen.
Het is niet toevallig dat de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' deze bundel heeft samengesteld. Om allerlei redenen kiezen meisjes minder vaak wiskunde in hun pakket dan jongens. In het algemeen hebben meisjes een minder helder toekomstbeeld dan jongens. In het algemeen hebben meisjes een minder helder toekomstbeeld dan jongens en zijn zij minder gericht op een toekomstig beroep of carrière. Veertien beroepsvrouwen zijn daarom door de Werkgroep Vrouwen & Wiskunde uitgenodigd om ter gelegenheid van haar tweede lustrum in 1992 een workshop te verzorgen met als thema 'Vrouwen gebruiken wiskunde in hun werk'. Het materiaal van deze workshops is uitgewerkt, met de bundel *Wiskunde en werk* als resultaat. Tijdens de opening zal daarnaast op ludieke wijze duidelijk worden dat 'vrouwen' en 'exacte vakken' wèl samengaan.

Voor andere informatie kunt u zich in verbinding stellen met het *Centrum Vrouwen en Exacte Vakken*, Zwarte Woud 2, 3542 SJ Utrecht, tel. 030-856746.